Astr. U. 2.

Astronomie

Astr. U.
2

D. C.
XV
139.

par le P. Esprit Pezenas

Mathesis. Astronomia. Systemata et methodi 707.

ASTRONOMIE
DES
MARINS.

R

ASTRONOMIE DES MARINS,

OU

NOUVEAUX ÉLÉMENS D'ASTRONOMIE

A LA PORTÉE DES MARINS,

Tant pour un Obſervatoire fixe, que pour un Obſervatoire mobile,

Par l'Auteur des Mémoires de Mathématique & de Phyſique redigés à l'Obſervatoire de Marſeille.

A AVIGNON,

Chez la Veuve GIRARD, Imprimeur-Libraire, Place St. Didier;

Et ſe vend à Marſeille,

Chez J. MOSSI, Libraire, à la Canébiere.

M. DCC. LXVI.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

PRÉFACE.

L'ASTRONOMIE est la partie la plus essentielle de l'art de naviguer ; c'est néanmoins celle qui est la moins connuë de nos Marins. Ils se bornent pour la plûpart à l'usage de la Boussole, du Lock, de l'Arbalestrille, ou du Quartier Anglois ; ceux qui sont plus habiles se servent de l'Octant, dont ils ne connoissent pas les divers usages.

La Boussole leur fournit une route très-incertaine ; ils tachent de la corriger par l'observation du lever & du coucher du Soleil ; & si le tems a été couvert dans ces deux momens critiques, il ne leur reste que l'observation de la hauteur méridienne du Soleil. C'est leur derniere ressource ; ils y sont tellement bornés que, si quelque nuage les empêche de voir le Soleil à midi, ils ne connoissent gueres d'autres moyens Astronomiques pour y suppléer. Est-ce leur faute ? Ou n'est-ce pas plutôt la faute des Géométres & des Astronomes, & sur-tout des Auteurs qui ont donné au Public divers Traités de Navigation. Je n'excepte pas ceux que j'ai fait imprimer en 1733 & en 1741. Quoique j'aie donné plus d'étenduë aux Problémes d'Astronomie que les autres Auteurs François dans ma *Pratique du Pilotage* ; je conçois néanmoins que je n'ai pas assez éclairci une matiere aussi importante.

Je m'imaginai en 1744, que l'Astronomie Nau-

tique de Feu Mr. de Maupertuis pourroit remplir tous les vuides de nos Traités de Navigation. Le Miniſtre de la Marine envoya ce Livre dans tous les Ports. On le lût, on l'admira, on y trouva beaucoup d'Algébre, des Equations du ſecond degré très compliquées, du calcul différentiel, & en un mot beaucoup de Théorie, ſans aucune application à la Pratique. Si l'Auteur avoit voulu faire une eſſai de ſes Solutions algébriques ſur un ſeul exemple ; il auroit été rebuté par la longueur du calcul & par l'équivoque des ſignes. Par exemple, dans le Probléme XXX, *Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois Etoiles & l'intervalle de tems entre le moment où l'une des trois ſe trouve dans un même vertical que chacune des deux autres : trouver l'heure & la hauteur du pole* ? Il nous donne cette Equation pour la cotangente de l'angle horaire de la premiere Etoile au moment de la premiere obſervation,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{r\alpha b X + a\alpha p X - a\beta q X - rr\alpha X' + raq X''}{ra\alpha X - a\beta p X - a\alpha q X + rap X''}\right)$$

Deux hauteurs d'un Aſtre, dont la déclinaiſon eſt connuë, étant données, avec le tems écoulé entre les obſervations ; trouver la hauteur du pole & l'heure des obſervations ? Il nous donne pour la hauteur du pole cette Equation du ſecond degré,

$$\left.\begin{matrix} ooxx \\ rrpp \end{matrix}\right\} ss \left\{\begin{matrix} -2rrohx \\ -2rroh'x \end{matrix}\right\} s = \left\{\begin{matrix} +rrppyy \\ +2r^3qhh' \\ -r^4hh \\ -r^4h'h' \end{matrix}\right.$$

Je ne crois pas qu'aucun Aſtronome ait jamais employé ce calcul pour trouver la hauteur du pole, quoique ce calcul ſoit à la portée des Aſtronomes de profeſſion. De là vient que cet ouvrage, qui renferme d'ailleurs les belles découvertes des Aſtronomes de Ruſſie, n'a pourtant eu aucun cours parmi les Marins.

Il paroit que Mr. de Maupertuis a été trop prévenu en faveur de nos Pilotes. Il les a crû capables de la Théorie la plus ſublime, mais il paroit auſſi que les autres Auteurs les ont trop mépriſés; Ils n'oſent pas leur parler de la Trigonométrie ſphérique, qui eſt la baſe de l'Aſtronomie. Cette Science ſûrement n'eſt pas au-deſſus de leur portée; elle ne conſiſte que dans des additions & des ſouſtractions, qui peuvent dans très peu de tems leur devenir très familiéres. Je ne vois pas trop ſur quels principes Mr. de Maupertuis nous dit dans ſa Préface que la Trigonométrie ſphérique eſt une *Science ſecondaire* dans la réſolution des Problémes Aſtronomiques. Je ſoutiens au contraire, que c'eſt la Science la plus directe; puiſque les Problémes Aſtronomiques ne ſont eux mêmes que des triangles ſphériques, dont on cherche les angles ou les côtés.

Il n'eſt pas néceſſaire que l'origine des regles de la Trigonométrie ſphérique *ſoit préſente à l'eſprit*, comme Mr. de Maupertuis paroit l'inſinuer : on peut les employer avec ſuccés ſans ſe donner la peine d'en pénétrer les démonſtrations. Les Aſtronomes n'ont pas l'origine de ces régles *préſente à*

l'eſprit , lorſqu'ils calculent le mouvement des Aſtres. Ils ſçavent qu'elles leur ont été autrefois démontrées, & qu'ils ne peuvent pas s'égarer en s'y conformant.

Qu'il me ſoit donc permis de renvoyer aux Livres connus & très communs de Géométrie & d'Arithmétique , la démonſtration de toutes les méthodes que je me hâte de donner aux Marins, pour déterminer à toutes les heures du jour & de la nuit, la latitude & la longitude du Navire , la variation de la Bouſſole & la vraie correction des routes & même des obſervations. Je ne ſçaurois trop les exhorter à ſe rendre habiles dans la Pratique de la Trigonométrie ſphérique & dans l'application de cette Science merveilleuſe à la ſolution des Problêmes d'Aſtronomie. Cette Trigonométrie, dont le ſeul nom les éffraie, ſe réduit après tout, comme je l'ai déja dit, aux deux regles les plus ſimples de l'Arithmétique, à l'Addition & à la Souſtraction. Qu'on me donne un jeune Pilote, qui ſache lire dans la Table des Logarithmes , le Sinus, le Coſinus, la Tangente & la Côtangente d'un arc de cercle ; il ne trouvera plus aucune difficulté dans l'Aſtronomie. J'ai tâché de ramener à la Trigonométrie ſphérique les Problêmes les plus difficiles de l'Aſtronomie Nautique de Mr. de Maupertuis, & j'ai multiplié les Exemples, pour exercer les Commençans.

La Trigonométrie rectiligne & ſphérique ſerviront d'introduction. On y trouvera toutes les définitions geométriques & la ſolution de tous les

cas poſſibles. J'ai appliqué l'une & l'autre à un ſeul exemple varié de toutes les manieres, pour faire ſentir le parfait accord de toutes les analogies, & pour donner aux Marins une connoiſſance expérimentale des deux Trigonométries ; connoiſſance qui pourra les raſſurer & diſſiper leurs doutes.

Je donne dans le premier Chapitre, une idée ſuffiſante de tous les cercles de la ſphére ; & pour la rendre plus ſenſible, je l'accompagne de quelques Figures que j'avois omiſes dans mes Elémens de Pilotage. Je me flatte que mes définitions Aſtronomiques ne laiſſeront aucune obſcurité dans l'eſprit des Lecteurs, pour peu qu'ils ſoient attentifs.

On trouvera dans le Chapitre II. Les Elémens de Chronologie qui m'ont paru les plus curieux & les plus utiles aux Marins.

Dans le III. Je donne la deſcription des Inſtruments les plus propres à obſerver la hauteur & l'Azimuth des Aſtres.

Dans le IV. Je donne fort au long la maniere de réſoudre par le calcul un très grand nombre de Problémes Aſtronomiques, pour déterminer la Latitude, l'Azimuth & l'heure. On en trouve ſept pour le Soleil & autant pour les Etoiles dans les meilleurs Livres anglois. Il m'a fallu tripler ce nombre, & même le porter juſques au 47e. qui eſt le dernier Probléme de ce IV. Chapitre. On en trouvera pluſieurs dont les Marins en France n'ont aucune idée, & qui leur ſeront très utiles ;

plusieurs autres qui ont échapé aux Auteurs Anglois, quoiqu'ils se soient beaucoup étendus sur l'Astronomie Nautique, dans leurs Traités de Navigation.

On en trouvera quelques-uns, qui n'ont pas encore été résolus, que je sache ; par exemple, *ayant pris trois hauteurs d'un même Astre & la différence de ses Azimuths, trouver sa dèclinaison, l'angle horaire & la hauteur du pole?* Ce Probléme, où je ne fais pas entrer l'intervalle des tems, revient à celui dont j'envoyai la solution à l'Académie Royale des Sciences lorsque j'étois à Marseille, *Trois observations d'une même tache du Soleil étant données, trouver le tems de sa rotation, & la position de son axe?*

On trouve dans l'Astronomie Nautique, Probl. XVIII, une méthode pour déterminer la latitude par le seul intervalle du tems que le Soleil emploie à s'élever sur l'horizon ou à s'abaisser de tout son disque. L'Auteur avoüe que cette méthode étant appuyée sur le calcul différentiel, n'a pas lieu dans les grandes latitudes. J'en ai trouvé une, indépendante de ce calcul & qui convient à toutes les latitudes. Elle ne contient que la solution de trois triangles sphériques.

Le V. Chapitre est destiné à corriger les erreurs qui résultent du mouvement du Navire ou du défaut des observations dans le calcul des Problémes Astronomiques. Il est aussi destiné à déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.

Le Chap. VI. contient la maniere de déterminer la longitude en mer par l'observation des Astres.

On y donne la méthode la plus sûre & la plus approchante de celle de Mr. Harrison pour cette belle découverte, en attendant que la construction de sa montre ne soit plus un mistére.

Depuis l'impression de cette Astronomie, on m'a écrit de Londres que les Mathématiciens & Horlogers, nommés par le Bureau des longitudes, pour examiner toutes les parties de la Montre du Sr. Harrison, lui ont livré un certificat dont voici la traduction.

* » Nous soussignés certifions que Mr. Jean Har-
„ rison a démonté sa Montre en notre présence,
„ qu'il en a développé les Principes & la construc-
„ tion à notre entiere satisfaction, qu'il a re-
„ pondu à toutes les questions que nous lui avons
„ faites, d'une maniere très-satisfaisante, que
„ nous en avons comparé les diverses parties avec
„ le dessein qu'il nous a produits, & que nous les
„ avons toutes trouvées parfaitement conformes
„ au dessein.

Signés, Nevill Mashelyne, John Mitehall, Ludlam, Bird, Mudge, Mathews, Kendall.

Quoique notre méthode ne soit pas aussi facile & aussi expéditive que celle de cet illustre Anglois, elle n'en est pas moins exacte. Parceque les Tables de Mr. Mayer que l'on trouve à la fin de notre Astronomie, donnent la longitude de la Lune à une ou deux minutes près.

* VVe VVose Names are herenntọ subscribed do certify that Mr. John Harrison has taken his Timekeeper to pieces in the presence of us & explained the Principles & construction thereof & every thing relative thereto to our entire satisfaction & that he also did to our satisfaction ansvver to every question proposed by us or any of us relative thereto & that vve have compared the dravvings of the Same vvith the parts & do find that they perfectly correspond.

Dans le Chapitre VII. nous donnons la ſolution des Problémes Aſtronomiques ſur un demi-globe.

Dans le VIII & dernier Chapitre, nous donnons la maniere de réſoudre tous les cas poſſibles de la Trigonométrie ſphérique, avec la regle ſeule & le compas.

Le Quartier de réduction me paroit trop myſtérieux, l'orſqu'on l'applique à la ſolution des Problémes Aſtronomiques; je ne perdrai pas mon tems à développer ces myſtéres. Le Quartier ſphérique vaut mieux. Il peut beaucoup aider à ſe former une idée de tous les cercles de la ſphére. Je l'avois rejettée dans une Piéce imprimée à Paris, parmi celles qui ont concouru au prix de l'Académie Royale des Sciences en 1747, ſur la meilleure maniere de trouver l'heure en mer. J'avois ſubſtitué à cet inſtrument le demi-cercle ſphérique, qui eſt beaucoup plus commode que le Quartier ſphérique. Celui-ci eſt fondé ſur la projection orthographique, & le demi-cercle ſphérique eſt un développement de la projection ſtéréographique, dont les Anglois font beaucoup de cas. Ces opérations ſubſidiaires peuvent aider, diriger, & même rectifier le calcul. Je crois néanmoins que la meilleure de toutes les projections eſt celle qu'on nomme *Gnomonique*. Nos Marins me paroiſſent n'en avoir aucune idée; quoiqu'on puiſſe l'appliquer plus aiſément qu'aucune autre à la ſolution de tous les Problémes Aſtronomiques.

TABLE

TABLE DES MATIERES.

Introduction. Définitions géométriques, page 1 & 2
Principes de la Trigonométrie rectiligne, 3
Des Logarithmes, 5
De la Partie proportionnelle, 9
Du Complément arithmétique, 11
Des Triangles rectilignes, rectangles, 14
L'un des angles étant donnés avec le côté adjacent, trouver le reste? 14
Deux côtés étant donnés, trouver le reste? 15
L'hypothénuse étant donnée avec un côté, trouver le reste? 15
Des Triangles rectilignes, obliquangles, 16
Les trois côtés étant donnés, trouver les angles? 16
Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? 17
Un côté étant donné avec deux angles, trouver le reste? 18
Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 18
Trigonométrie sphérique, Principes généraux, 20
Solution de tous les cas possibles des triangles rectangles, 22
L'hypothénuse étant donnée avec l'un des côtés, trouver le reste? 22
L'hypothénuse étant donnée avec un des angles, trouver le reste? 23
L'un des côtés étant donné avec l'angle opposé, trouver le reste? 25
L'un des côtés étant donnés avec l'angle adjacent, trouver le reste? 26
Les deux côtés étant donnés, trouver le reste? 28
Les deux angles étant donnés, trouver le reste? 29
Regle générale pour les triangles dont un côté est de 90 degrés, 29
Solution de tous les cas possibles des triangles obliquangles, 30
Les trois côtés étant donnés, trouver les trois angles? 30
Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés? 32
Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? 33
Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reste? 36
Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 39
Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 43

CHAPITRE I. *Définitions astronomiques*, 47

Latitude, hauteur du pole, 50
De la longitude, du premier Méridien, 50
Du mouvement diurne, de l'Ecliptique, des Equinoxes & Solstices, 53

Des Etoiles fixes, Constellations, signes du Zodiaque, page 56
Des cercles de déclinaison, Colures des Solstices, des Equinoxes, 57
De l'Ascension droite, 57
De l'angle azimuthal, des Amplitudes, 60

CHAPITRE II. *Elémens de Chronologie,* 61

Des Heures égales, & inégales, Heures planétaires, 62
Heures Babiloniques, Italiques, Astronomiques, 63
Mois synodique & périodique de la Lune, 64
Année Siderale, Année Tropique, Périodique, 65
Année Julienne, 66
Réforme du Calendrier par Grégoire XIII, 67
Des Calendes, Ides & Nones, 67
Lettre Dominicale, 68
Cycle Solaire, 69
Cycle Lunaire, 70
Nombre d'or, Epactes, 71
Fête de Pâques, 73
Période de Denis le petit, 73
Cycle de l'Indiction, Période Julienne, 74
Année Platonique, 75
Epoques de la Création, du Déluge, des Olympiades, de la Fondation de Rome, 75
Ere Espagnole, 76
Ere Chrétienne, Hégire, 77

CHAPITRE III. *Des Instrumens les plus propres à observer la hauteur & l'azimuth des Astres,* 77

Octant d'Hadley & de Caleb Smith, 78
Vérification de l'Octant, 79
Maniere d'observer la hauteur d'un Astre avec l'Octant, 80
Des Transversales, 82
Du Nonius ou Vernier, 83
Des hauteurs apparentes, 84
De la parallaxe & de la refraction, 86
Octant de Mr. Caleb Smith, 87
Différence de cet Octant & de celui de Mr. Hadley, 88
Quartier Anglois, 89
Des Instrumens à plomb, du Niveau à bulle d'air, 90
Du Compas de variation, 91
Du Compas azimuthal, 92

CHAPITRE IV. *Résolution des Problémes astronomiques,* 94

PROBLEME I. *Trouver le lieu du Soleil pour un tems vrai à Paris,* 94
Application de la méthode à un exemple, 95
Correction du tems par la longitude vraie, & l'anomalie moyenne, 96
Explication des Tables, VIII & IX, 97

PROBL. II. *Trouver la longitude du Soleil pour un Méridien plus oriental ou plus occidental que Paris,* page 98

PROBL. III. *La longitude du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison, son ascension droite & l'angle de l'Ecliptique avec le Méridien?* 99

PBOBL. IV. *Trouver l'heure du passage d'une Etoile par le Méridien,* 101

PROBL. V. *La Longitude & la latitude d'une Etoile étant données, trouver son ascension droite & sa déclinaison?* 103

PROBL. VI. *L'Ascension droite & la déclinaison d'une Etoile étant données, trouver sa longitude & sa latitude?* 105

PROBL. VII. *Etant données, la latitude du lieu, la déclinaison & la hauteur d'un astre, trouver l'heure?* 107

PROBL. VIII. *Connoissant la latitude du lieu, la déclinaison & la hauteur d'un Astre, trouver l'angle azimuthal?* 110

PROBL. IX. *La hauteur d'un Astre, sa déclinaison & son azimuth étant donnés, trouver l'heure & la latitude?* 111

PROBL. X. *La Latitude du lieu étant donnée, la déclinaison d'un Astre & son azimuth, trouver l'heure?* 114

PROBL. XI. *La hauteur du pole étant donnée, la hauteur d'un Astre & son azimuth, trouver l'heure?* 115

PROBL. XII. *La hauteur du pole, la hauteur d'un Astre & l'angle horaire étant donnés, trouver l'angle azimuthal?* 116

PROBL. XIII. *La hauteur d'un Astre, son azimuth & l'angle horaire étant donnés, trouver la latitude?* 117

PROBL. XIV. *La hauteu d'un Astre, sa déclinaison & l'angle horaire étant donnés, trouver l'angle azymuthal?* 118

Résolution plus facile des mêmes Problémes en certains cas par la Trigonométrie réctiligne. 119

I. *La hauteur d'un Astre au Méridien de six heures étant donnée avec sa déclinaison, trouver son azimuth & la hauteur du pole?* 119

II. *La Latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil à 6 heures, trouver l'angle azimuthal?* 120

III. *L'Azimuth du Soleil à 6 heures étant donné avec sa déclinaison, trouver la hauteur du pole?* 120

IV. *La déclinaison du Soleil étant donnée dans le premier vertical, avec sa hauteur, trouver la latitude & l'angle horaire?* 121

V. *La déclinaison du Soleil étant donnée, & le tems de son passage par le premier vertical, trouver la latitude & la distance au Zénith?* 122

VI. *Le Soleil étant dans l'Equateur, son angle horaire & la latitude étant données, trouver sa hauteur & son azimuth?* 122

VII. *La latitude étant donnée avec la hauteur du Soleil dans l'Equateur, trouver son azimuth & l'heure?* 123

VIII. *La hauteur du Soleil dans l'Equateur & son azimuth étant donnés, trouver l'heure & la latitude?* 123

IX. *La hauteur du Soleil dans l'Equateur & l'heure étant données ; trouver l'azimuth & la latitude ?* page 124
X. *La hauteur du pole étant donnée avec la déclinaiſon d'un Aſtre, trouver l'heure de ſon lever ou de ſon coucher ?* 124
PROBLEME XV. *La Latitude étant donnée avec la déclinaiſon du Soleil, trouver le commencement de l'aurore & la fin du crépuſcule ?* 126
PROBL. XVI. *Connoiſſant la réfraction horiſontale d'un Aſtre, ſa déclinaiſon & la hauteur du pole, trouver l'amplitude apparente & le tems du lever & du coucher apparent de cet Aſtre ?* 127
PROBL. XVII. *Etant donné le tems du lever & du coucher apparent du Soleil, ſa déclinaiſon & la hauteur du pole, trouver la réfraction horiſontale ?* 129
PROBL. XVIII. *La hauteur Méridienne d'un Aſtre étant donnée, trouver la hauteur du pole ?* 130
PROBL. XIX. *Etant donné le tems que le Soleil a à monter ou à deſcendre de tout ſon diamètre, trouver la hauteur du pole, l'azimuth & la latitude ?* 132
Méthode de Mr de Maupertuis pour la ſolution de ce Probléme, 133
PROBL. XX. *La différence des azimuths ou des amplitudes entre les deux momens où le bord inférieur & le bord ſupérieur du Soleil touchent l'horiſon, étant donnée avec ſa déclinaiſon, trouver la latitude, l'heure & la vraie amplitude ?* 136
Remarque ſur les Problémes qui dépendent des obſervations du lever ou du coucher du Soleil, 137
PROBL. XXI. *Trois hauteurs d'un Aſtre étant données dans le voiſinage du Méridien, avec l'intervalle des tems entre les obſervations, trouver le moment du paſſage de l'Aſtre par le Méridien, & ſa hauteur méridienne ?* 140
PROBL. XXII. *Trois hauteurs d'un Aſtre inconnu étant données avec les deux intervalles de tems écoulé entre les obſervations, trouver la déclinaiſon de l'Aſtre & la hauteur du pole ?* 145
PROBL. XXIII. *Deux hauteurs d'un Aſtre dont la déclinaiſon eſt connue étant données avec le tems entre les obſervations, trouver la hauteur du pole, l'heure des obſervations & l'azimuth ?* 153
PROBL. XXIV. *Deux hauteurs du Soleil étant données avec ſa déclinaiſon & la différence des azimuths correſpondans, trouver la latitude ?* 157
PROBL. XXV. *Ayant deux hauteurs d'un Aſtre dont on ne connoit pas la déclinaiſon, & ayant obſervé la différence des tems & des azimuths correſpondans, trouver la latitude du lieu & la déclinaiſon de l'Aſtre ?* 159
PROBL. XXVI. *N'ayant pris qu'une hauteur d'un Aſtre dont on connoit la déclinaiſon, & ayant obſervé le changement de ſon azimuth pendant un tems donné depuis l'obſervation de ſa hauteur, trouver la latitude du lieu, l'azimuth & l'angle horaire pour le tems de l'obſervation ?* 160

PROBL. XXVII. *La hauteur de deux Etoiles connues ayant été observée dans un même instant, trouver la latitude, l'angle horaire & l'azimuth?* page 161

PROBL. XXVIII. *Ayant pris trois hauteurs d'une Etoile avec la différence des azimuths, trouver sa déclinaison & la hauteur du pole?* 165

PROBL. XXIX. *Ayant observé trois Etoiles connues dans un même almicantarath inconnu, avec la différence des angles horaires, trouver la latitude & la vraie hauteur des Etoiles?* 169

PROBL. XXX. *Les hauteurs des deux Astres étant données, avec leurs déclinaisons & leurs ascensions droites & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure & la hauteur du pole?* 170

COROL. 1. *Solution plus aisée par deux hauteurs du même Astre,* 173

COROL. 3. PROBL. 24, *De l'Astronomie nautique,* 173

COROL. 4. PROBL. 23, *De l'Astronomie nautique,* 174

PROBL. XXXI. *Etant donnée la hauteur d'un Astre inconnu, la différence de son azimuth avec celui d'un autre Astre connu, & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure, la hauteur du pole & l'angle azimuthal?* 175

PROBL. XXXII. *La hauteur du pole étant donnée, & deux Astres connus étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation & l'angle azimuthal?* 177

PROBL. XXXIII. *L'heure du passage des deux Astres connus par le même vertical étant donnée, trouver la hauteur du pole, l'angle azimuthal & la hauteur des Astres?* 79

PROBL. XXXIV. *La hauteur d'un Astre connu étant donnée, avec le tems écoulé entre l'observation de sa hauteur & le passage d'un autre Astre connu par le même vertical, trouver la latitude, l'angle azimuthal, & l'heure?* 182

PROBL. XXXV *L'angle Azimuthal étant donné avec le tems du passage de deux Astres par le même vertical, trouver la latitude, l'heure & la hauteur des Astres?* 183

PROBL. XXXVI. *La hauteur du pole étant connue, & la différence des hauteurs de deux Astres dans un même vertical, trouver l'heure, l'angle azimuthal & la hauteur des Astres?* 183

PROBL. XXXVII. *La différence des hauteurs de deux Astres connus étant donnée avec l'angle azimuthal commun, trouver la latitude, l'angle horaire & la hauteur des deux Astres?* 184

PROBL. XXXVIII. *La hauteur du pole étant donnée, & deux Astres connus étant vûs dans un même almicantarath inconnu; trouver l'heure, la hauteur des Astres & l'angle azimuthal?* 185

PROBL. XXXIX. *Deux Astres étant vus en même tems dans un même almicantarath inconnu, & l'heure étant donnée, trouver la latitude, l'angle azimuthal & la hauteur des Astres?* 187

PROBL. XL. *Deux Astres connus étant vus en même tems dans un même almicantarath inconnu, & connoissant l'angle compris entre leurs*

azimuths dans ce même instant, trouver l'heure & la latitude, page 189

PROBL. XLI. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois ou quatre Etoiles & l'intervalle de tems où les deux premieres se trouvent dans un même vertical, & où les deux autres se trouvent dans un autre même vertical, trouver l'heure, l'azimuth & la latitude ?* 190

PROBL. XLII. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre Etoiles, & le tems écoulé entre le moment où les deux premieres se trouvent dans le même almicantarath & celui où les deux autres se trouvent dans un autre même almicantarath, trouver l'heure de l'une des observations, l'azimuth, la hauteur des Astres & la latitude ?* 198

PROBL. XLIII. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre Etoiles & le tems écoulé entre les momens où deux se trouvent dans un même vertical, & deux autres dans un même almicantarath, trouver l'heure, l'angle azimuthal, la latitude & la hauteur des Etoiles ?* 205

PROBL. XLIV. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical, & celui où l'on a observé la hauteur du troisieme, trouver la hauteur du pole, les azimuths & les angles horaires ?* 208

PROBL. XLV. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même almicantarath inconnu, & celui où l'on a observé la hauteur du troisieme, trouver les angles horaires & azimuthaux, & la hauteur du pole ?* 211

PROBL. XLVI. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & l'angle compris entre le vertical où les deux premiers se trouvent en même tems, & le vertical où se trouve le troisieme, trouver l'heure & la latitude ?* 214

PROBL. XLVII. *Les passages de deux Etoiles par le Méridien, par deux verticaux & par deux almicantaraths inconnus, mais constans, étant donnés, trouver la déclinaison des Etoiles & la hauteur du pole ?* 216

CHAPITRE V. *Correction des erreurs qui résultent des observations dans le calcul des Problémes Astronomiques avec la maniere de déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.* 226

Regles des variations. Premiere Regle. Lorsque l'un des côtés d'un triangle sphérique est invariable, avec l'un des angles adjacens, 226

Seconde Regle. Lorsque l'un des côtes est invariable, avec l'angle opposé, 227

Troisieme Regle. Lorsque deux côtés sont invariables, 228

Quatrieme Regle. Lorsque deux angles sont invariables, 229

PROBL. I. *La déclinaison étant donnée avec l'angle horaire, trouver à*

quelle erreur on s'expose dans le calcul de la latitude par le défaut de la hauteur, & quelle est la hauteur la plus propre à cette observation? page 230

Exemple d'une grande erreur dans la latitude, 231

PROBL. II. *La déclinaison étant donnée avec l'angle horaire, trouver à quelle erreur on s'expose dans la latitude par l'observation de l'azimuth?* 232

PROBL. III. *La hauteur d'un Astre & sa déclinaison étant données, trouver l'angle horaire le plus propre à déterminer son azimuth?* 233

PROBL. IV. *La déclinaison d'un Astre & la latitude du lieu étant données, trouver la hauteur de l'Astre la plus propre à déterminer son angle horaire?* 234

PROBL. V. *La déclinaison & la latitude étant données, trouver la hauteur la plus favorable pour déterminer l'azimuth?* 235

PROBL. VI. *La réfraction horisontale étant donnée, trouver combien elle affecte l'amplitude d'un Astre & le tems de son lever & de son coucher apparent?* 236

COROLLAIRE, *pour trouver par la différence des tems la refraction horisontale,* 237

PROBL. VII. *La précession des Equinoxes étant donnée, avec la déclinaison actuelle d'un Astre & son ascension droite, trouver la variation de sa déclinaison & de son ascension droite?* 238

PROBL. VIII. *Réduire les distances apparentes des Etoiles à la Lune à leurs distances véritables, & réciproquement?* 239

PROBL. IX. *Trouver l'effet de la variation de l'obliquité de l'Ecliptique sur les longitudes, les latitudes, les déclinaisons & les ascensions droites des Astres?* 241

PROBL. X. *La parallaxe verticale d'une planete étant donnée, trouver sa parallaxe en longitude & en latitude?* 242

PROBL. XI. *Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales du Soleil, lorsque sa déclinaison a varié dans l'intervalle des deux observations?* 243

PROBL XII. *Trouver par observation l'angle de position?* 247

PROBL. XIII. *Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales, lorsqu'on a navigué Est Ouest sans changer de latitude?* 247

PROBL. XIV. *Corriger le midi trouvé par des hauteurs égales, lorsqu'on a navigué Nord & Sud sans changer de Méridien?* 248

COROLLAIRE. *Lorsque le Navire a fait route entre le Sud & l'Ouest,* 249

CHAPITRE VI. *Maniere de trouver la longitude en mer par l'observation des Astres,* 251

Acte du Parlement d'Angleterre sous la Reine Anne, pour la découverte des longitudes. 251

Premies Essais de Mr. Harrisson en 1716 *pour parvenir à cette découverte, par le moyen d'une pendule,* 252

Nouveaux Essais en 1726, par une montre à balancier, page 253
Divers succès de Mr. Harrison en 1735, 37, 39 & 41, 254
Précautions qui furent prises en 1761 pour éprouver la troisieme montre de M. Harrison sur un Vaisseau qui devoit faire voile pour la Jamaïque 255
Défaut des observations des Satellites de Jupiter, 257
Nouvelles instructions en 1761 pour le voyage de la Jamaïque, 257
Observations correspondantes à Portmsouth avant le départ, le 18 Octobre & le 6 Novembre 1761, 258
Départ du Vaisseau le 18 Novembre 1761; 258
Observations dans le cours du voyage, 259
Arrivée à la Jamaïque le 19 Janvier 1762. Hauteurs correspondantes,
Différence entre la longitude trouvée par la montre & celle qui avoit été par le passage de Mercure, seulement de 5″ de tems ou d'un mille, 260
Tempête violente au retour, 260
Arrivée à Portsmouth le 26 Mars. Hauteurs correspondantes, 261
Objections contre les expériences de Mr. Harrison, 262
Erreur de la montre 18 milles, tant en allant de Portsmouth à la Jamaïque, qu'en revenant de la Jamaïque à Portsmouth, 262
Moyen proposé par le Sr. Halley pour connoître l'utilité de la montre de Mr. Harrison, 263
Remise de 5000 livres sterlings à compte de 20000, 265
Voyage à la Barbade le 28 Mars 1764. Arrivée le 13 Mai, 265
Décision du Bureau des longitudes que la montre avoit déterminé la longitude en deçà des limites prescrites par l'Acte de la Reine Anne, 265
Nouvel acompte de 5000 livres sterling, 265
Précautions à prendre pour se servir utilement de quelque bonne montre, 266
Méthode proposée par Mr. Huygens en 1764, par le moyen des pendules, 267
Succès de cette méthode, & instructions de Mr. Huygens, 268
Méthode de Mr. de Radouai par le moyen d'une montre, 275
Maniere de calculer la longitude & la latitude de la Lune par les nouvelles Tables de Mr. Tobie Mayer, 279
Leur exactitude pour la longitude de la Lune par la comparaison de deux cens observations, dont dix seulement se sont éloignées du calcul de $1'\frac{1}{2}$, 279
Principes & explication de ces tables, 280
Tables de la latitude de la Lune moins exactes que les autres, 281
Regles & modele du calcul, 282
PROBL. I. *L'heure étant donnée avec la hauteur apparente de la Lune, & sa distance à une Etoile connue, trouver la longitude du lieu de l'observation?* 288
PROBL. II. *L'heure étant donnée, avec la hauteur du pole & la seule distance de deux Etoiles connues au bord éclairé de la Lune, trouver*

trouver la longitude du lieu de l'observation? page 294

PROBL. III. *Trouver la longitude du Navire par les observations des deux Problémes précédens, lorsqu'on n'a pu le faire dans le même instant?* 300

PROBL. IV. *L'heure étant donnée avec la seule distance d'une Etoile connue au bord éclairé de la Lune, trouver la longitude du lieu de l'observation?* 301

Remarques sur cette méthode de Mr. Halley, 305

PROBL. V. *Etant donné le tems vrai du passage de la Lune par le Méridien & de l'observation de sa distance à une Etoile connue, trouver la longitude du ieu de l'observation?* 307

PROBL. VI. *L'angle horaire de la Lune étant donné avec sa distance apparente au Zénith, trouver la longitude?* 310

PROBL. VII. *L'angle azimuthal de la Lune étant donné avec son angle horaire, trouver la longitude?* 311

PROBL. VIII. *L'angle azimuthal de la Lune étant donné avec sa hauteur, trouver la longitude?* 312

PROBL. IX. *La hauteur méridienne de la Lune & le tems de son passage au Méridien étant donnés, trouver la longitude?* 312

Remarque sur ces Problémes, 312

CHAPITRE VII. *Solution des Problémes Astronomiques sur un demi-globe,* 314

Regles générales. Premiere Regle. Trouver les poles d'un arc de cercle qu'on aura tracé sur le demi-globe? 315

Seconde Regle. L'un des poles d'un grand cercle étant donné décrire ce grand cercle sur la surface du globe? 315

Troisieme Regle Le pole le plus proche d'un petit cercle étant donné avec sa distance à ce pole, tracer ce petit cercle? 315

Quatrieme Regle. Trouver la valeur d'un angle sphérique tracé sur le globe? 316

Cinquieme Regle. Décrire autour d'un point donné un angle sphérique donné? 316

Sixieme Regle. Abaisser d'un point donné un arc perpendiculaire à un arc donné? 316

Trigonométrie sphérique rectangle. Premier Cas. Un côté étant donné avec l'hypothénuse, trouver le reste? 317

Second Cas. L'hypothénuse étant donnée avec un angle, trouver le reste? 317

Troisieme Cas. Un angle étant donné avec le côté opposé, trouver le reste? 317

Quatrieme Cas. Un angle étant donné avec le côté adjacent, trouver le reste? 318

Cinquieme Cas. Deux côtés étant donnés, trouver le reste? 318

Sixieme Cas. Deux angles étant donnés, trouver le reste? 318

Trigonométrie sphérique obliquangle. Premier Cas. Les trois côtés étant

donnés, trouver les trois angles? page 318
Second Cas. Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés? 319
Troisieme Cas. Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? 319
Quatrieme Cas. Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reste? 319
Cinquieme Cas. Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un des deux, trouver le reste? 320
Sixieme Cas. Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 320
PROBL. I. *Etant données deux hauteurs d'un même Astre connu, ou de deux Astres différens & connus, avec l'intervalle du tems des observations, trouver la latitude, les angles horaires & l'azimuth?* 321
PROBL. II. *Trois hauteurs d'un même Astre étant données avec la différence des angles azimuthaux, trouver la déclinaison de l Astre, la hauteur du pole, l'angle horaire & l angle azimuthal?* 321
PROBL. III. *La hauteur du pole étant donnée, trouver à quelle heure deux Etoiles connues paroîtront ensemble dans le même vertical?* 322
PROBL. IV. *Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux Astres connus, trouver la hauteur du pole?* 322
PROBL. V. *Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath deux Astres connus, trouver la hauteur du pole?* 323
PROBL. VI. *Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Etoiles, & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres, trouver l'heure & la hauteur du pole?* 323
PROBL. VII. *L'angle horaire, l'angle azimuthal & la hauteur d'un Astre étant donnés, trouver sa déclinaison & la latitude?* 324
PROBL. VIII. *La hauteur du pole & la déclinaison d'un Astre étant données, trouver son arc semi diurne?* 324
PROBL. IX. *Trouver sur mer la hauteur du pole par la durée du jour?* 324
Méprise considérable qui pourroit égarer le Lecteur, 325
CHAPITRE VIII. *Résolution des Problémes Astronomiques par les différentes projections de la sphére,* 326
Projection Gnomonique, 327
PROBL. I. *Diviser en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle qui passe par le centre du plan de projection?* 327
PROBL. II. *Diviser en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle qui ne passe pas par le centre du plan de projection?* 328
PROBL. III. *Trouver la valeur d'un angle que deux grands cercles font ensemble?* 329
PROBL. IV. *Resoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique. Premier Cas. Les trois côtés étant donnés, trouver les angles?* 330

Second Cas. Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? page 331
Troisieme Cas. Un côté étant donné avec les deux angles adjacens, trouver le reste? 332
Quatrieme Cas. Deux côtés étant donnés avec un angle opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 332
Cinquieme Cas. Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? 333
Sixieme Cas. Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés? 334
Remarque sur les cadrans solaires, 335
Projection stéréographique, 337
PROBL. I. *La distance de deux points dans le ciel étant donnée, décrire tous les cercles grands ou petits, dont ces deux points sont les poles?* 338
PROBL. II. *Faire passer un cercle par deux points donnés dans le Planisphére?* 340
PROBL. III. *Trouver la valeur de l'arc qu'on a tracé?* 341
Corollaire. Mesurer un angle mixtiligne, 341
PROBL. IV. *Resoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique?* 341
Projection orthographique, sphérique, 344
Avantage de ces diverses projections, 345
PROBL. I. *La longitude du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & son ascension droite par la seule inspection?* 346
PROBL. II. *L'ascension droite du Soleil étant donnée, trouver de même sa déclinaison & son ascension droite?* 347
PROBL. III. *La hauteur du pole & la déclinaison du Soleil étant donnée, trouver son amplitude ortive ou occase, & l'heure de son lever ou de son coucher, presque par la seule inspection dans le Quartier sphérique?* 348
PROBL. IV. *L'amplitude du Soleil étant donnée avec sa déclinaison, trouver la hauteur du pole & le tems du lever ou du coucher de cet Astre par le Quartier sphérique?* 350
PROBL. V. *La hauteur du pole étant donnée avec le tems du lever ou du coucher du Soleil, trouver son amplitude & sa déclinaison?* 351
PROBL. VI. *L'heure du lever ou du coucher du Soleil étant donnée avec sa déclinaison, trouver l'amplitude & la hauteur du pole?* 352
PROBL. VII. *L'amplitude du Soleil étant donnée avec le tems de son lever ou de son coucher, trouver sa déclinaison & la hauteur du pole?* 352
PROBL. VIII. *La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil, trouver le commencement de l'aurore & la fin du crépuscule?* 353
PROBL. IX. *La latitude étant donnée avec la hauteur & la déclinaison du Soleil, trouver l'heure de l'observation?* 353
PROBL. X. *La latitude, la déclinaison du Soleil & sa hauteur étant données, trouver son angle azimuthal?* 355
PROBL. XI. *La déclinaison du Soleil étant donnée avec sa hauteur &*

son azimuth, trouver la hauteur du pole? page 355
PROBL. XII. *La déclinaison du Soleil, sa hauteur & l'heure étant données, trouver la latitude?* 356
PROBL. XIII. *Deux hauteurs d'un Astre, dont la déclinaison est connue, étant données, avec le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure & la latitude?* 357
PROBL. XIV. *Deux hauteurs du Soleil étant données, avec sa déclinaison & la différence des azimuths correspondans, trouver la latitude?* 358
PROBL. XV. *La hauteur de deux Etoiles connues ayant été observée dans le même instant, trouver la latitude & l'angle horaire?* 359
Résolution par la projection gnomonique. PROBL. I. *L'ascension droite du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & sa longitude?* 360
PROBL. II. *La longitude du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & son ascension droite?* 361
PROBL. III *La déclinaison du Soleil étant donnée, trouver sa longitude & son ascension droite?* 361
PROBL IV. *La hauteur du pole étant donnée avec la déclinaison du Soleil, trouver son amplitude & l'heure de son lever & de son coucher?* 361
PROBL. V. *La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil & sa hauteur, trouver l'heure?* 362
PROBL. VI. *La latitude étant donnée avec la déclinaison & la hauteur du Soleil, trouver l'angle azimuthal?* 363
PROBL. VII. *La hauteur du Soleil, sa déclinaison & son azimuth étant donnés, trouver la latitude?* 364
PROBL. VIII. *La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil, trouver l'heure?* 364
PROBL. IX *La hauteur du pole étant donnée, la hauteur du Soleil & son azimuth, trouver l'heure?* 364
PROBL. X. *La hauteur du pole, celle du Soleil & son angle horaire étant donnés, trouver son azimuth?* 365
PROBL XI. *La hauteur d'un Astre, son azimuth & son angle horaire étant donnés, trouver la latitude?* 365

Fin de la Table des Matieres.

INTRODUCTION.

INTRODUCTION.

L'ASTRONOMIE des Marins suppose les idées communes de la Géométrie, les principes de la Trigonométrie rectiligne, & la pratique de la Trigonométrie sphérique

L'Angle rectiligne est l'ouverture de deux lignes droites qui ont un point commun. Ce point se nomme la *pointe de l'angle* : on emploie ordinairement trois lettres, comme BCA, pour indiquer un angle (fig. 1). Fig. 1. celle du milieu en indique la pointe. La grandeur d'un angle ne dépend nullement de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur ouverture.

On appelle *Rapporteur* un demi-cercle, ou plusieurs demi-cercles gradués, ou divisés en degrés. Tout le monde sçait que les Géométres ont de tout tems divisé le cercle en 360 parties égales, qu'on nomme *degrés*, chaque degré en 60 *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, & ainsi de suite à l'infini. On indique les degrés par un petit o, les minutes par un petit trait, & les secondes par deux traits qu'on met au haut du chiffre. Par exemple, $25.^{o}\ 30.'\ 15''$ signifie 25 degrés, 30 minutes, 15 secondes.

Le *Quartier de réduction* si connu des Marins est la moitié d'un Rapporteur. On peut s'en servir comme du Rapporteur, pour mesurer tous les angles rectilignes. Il faut pour cela ouvrir le compas de la grandeur du demi-diamètre de l'un des cercles du Rapporteur ou du quartier. Ensuite de la pointe C de l'angle, comme cen-

tre, on décrira un arc de cercle AB terminé par les deux côtés CA, CB, de cet angle; & l'on verra combien l'arc du rapporteur égal à AB contient de degrés & de minutes. Ce nombre de degrés sera la valeur de l'angle BCA. Par exemple, supposé que l'arc de cercle égal & semblable à AB contienne 10 degrés, l'angle ACB sera de dix degrés. Peu importe que l'arc AB soit portion d'un grand ou d'un petit cercle; car le petit arc *ab* contient autant de degrés que le grand arc AB. On a seulement plus de facilité à distinguer les degrés & les minutes dans les grands cercles que dans les petits. Les cercles *semblables* sont ceux dont les demi-diamètres sont égaux.

Si l'on veut faire au point C, un angle BCA d'un certain nombre de degrés, on prend sur le rapporteur, ou sur le quartier de réduction, un demi-diamètre AC, & l'on trace avec le compas, du centre C, un arc AB égal à celui qui dans le rapporteur, contient le nombre des degrés que l'angle doit avoir.

L'angle de 90^{o} est mesuré par le quart de cercle, & il se nomme *angle droit*. Les lignes qui forment ensemble un angle droit, sont dites *perpendiculaires* l'une à l'autre. On appelle *angle obtus* celui qui est plus grand que l'angle droit, & *angle aigu* celui qui est plus petit.

On peut mesurer avec le quartier de réduction un angle obtus, en le divisant en deux angles aigus, égaux, ou inégaux.

On sçait que le *triangle rectiligne* est terminé par trois lignes droites, qui forment ensemble trois angles. Ces trois lignes sont les trois *côtés* du triangle. Si ces trois côtés sont égaux, le triangle est *équilatéral*; s'ils sont tous trois inégaux, on le nomme *scaléne*; si deux côtés seulement sont égaux, on le nomme *isoscéle*.

Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. Le triangle *obtusangle* a un angle obtus; & les trois angles du triangle *acutangle* sont aigus.

Les trois angles de tout triangle rectiligne, pris ensemble, valent précisément deux angles droits, ou 180 de-

grés. Ainsi un angle est toujours *supplément* des deux autres; c'est-à-dire, qu'il contient ce qui manque aux deux autres pour faire 180.°

Le *complément* d'un angle est la différence entre cet angle & l'angle droit. Ainsi 60 est le complément de 30 & de 150 degrés. Car si de 90 on retranche 30, ou si de 150 on retranche 90, le reste sera 60.

Par la même raison 30 est le complément de 60 & de 120, puisque 30 & 60 valent 90, & 30 & 90 valent 120.

Principes de la Trigonométrie Rectiligne.

SI l'on décrit un cercle quelconque ABD*cb* (fig. 2) toutes les lignes EF, BC, H*f* perpendiculaires au diamètre AD, seront les *sinus* des arcs AE, AB, AH respectivement, ou des angles ACE, ACB, ACH. L'arc AE est aigu, l'arc AH est obtus ; & si l'angle ACB est droit, son sinus BC est le plus grand de tous les sinus, on le nomme *rayon* & quelquefois *sinus total.* Fig. 2.

Le sinus EF de l'angle aigu ACE est égal au sinus H*f* de son supplément ACH qui est toujours un angle obtus; quoique ces deux sinus soient placés en deux points différens E & H de la circonférence.

Tous ces sinus sont *positifs*, parce qu'ils sont au-dessus du diamètre AD; & les sinus *ef*, *b*C, *h*F sont *négatifs*, parce qu'ils sont au-dessous du même diamètre AD. C'est-à-dire, que si l'on dit en général qu'il faut ajouter le sinus d'un arc, il faudra faire tout le contraire, lorsque cet arc surpassera 180.° On ajoutera les sinus de tous les arcs AE, AB, AH &c. moindres que 180.°, & l'on soustraira les sinus *ef*, *b*C, *h*F &c. de tous les arcs plus grands que le demi-cercle.

Le sinus C*b* opposé au sinus total, est le sinus de 270°. Il est égal au rayon ; mais il est négatif, parce qu'il est au-dessous du diamètre AD. C'est le plus grand de tous les sinus négatifs.

La partie CF du diamètre AD comprise entre le centre C & le sinus EF d'un arc EA, se nomme *cosinus* de cet arc. On la nommoit autrefois *sinus du complement*.

Le cosinus C*f* de l'arc AEBH compris entre le centre C & le sinus H*f* de cet arc plus grand que le quart de cercle, est un cosinus *négatif*, parce qu'il est de l'autre côté du centre.

La division du cercle commence au point A, les sinus partent des extrémités E, B, H, *e*, *b*, *h* des arcs, & les cosinus partent du centre & s'étendent de part & d'autre sur le diamètre AD.

La *Tangente* AT d'un arc AE, est une ligne qu'on éleve perpendiculairement au diamètre AD, dans le commencement A de la division du cercle. Ce point A est l'origine de toutes les tangentes ; elles s'étendent jusqu'à la rencontre T du diamètre *e*CE qui passe par l'extrémité E de l'arc AE, & que l'on prolonge jusqu'à la tangente en T.

La tangente de l'arc AB de 90° est par conséquent infinie ; puisqu'elle ne peut pas rencontrer le diamètre *b*CB qui passe par l'extrémité B de l'arc AB ; ce diamètre étant parallèle à toutes les tangentes.

Mais la tangente A*t* d'un arc ABH plus grand que 90°, & moindre que 180°, est négative ; parce qu'elle ne peut rencontrer le diamètre HC*h* qui passe par l'extrémité H de cet arc, que dans un point *t* au dessous du diamètre AD. La tangente du demi-cercle ABD est zero, comme celle du point A ; puisqu'elles rencontrent l'une & l'autre le diamètre AD au point A, qui est l'origine des tangentes.

La tangente AT de l'arc ABD*e* plus grand que le demi-cercle, est positive ; parce qu'elle rencontre en T, le diamètre *e*CE qui termine le grand arc ABDE, & qu'elle est par conséquent au dessus du diamètre AD.

Celle de l'arc ABD*b* de 270° est infinie, étant parallèle au diamètre *b*CB qui passe par l'extrémité *b* de cet arc.

Enfin la tangente A*t* de l'arc ABD*bh* plus grand

que trois quarts de cercle, eſt négative ; puiſqu'elle rencontre en *t*, au deſſous du diamètre AD, l'autre diamètre HC*h* qui paſſe par l'extrémité *h* de ce grand arc ; & la tangente de 360° s'anéantit en A.

Les lignes CT, C*t*, qui partent du centre, & coupent les tangentes en T & *t*, ſe nomment *ſécantes* ; & elles ſont poſitives, ou négatives, ſelon que les tangentes ſont poſitives ou négatives.

La *Cotangente* eſt la tangente du complément d'un arc, & la *Coſécante* eſt auſſi la ſécante du complément d'un arc.

Le *ſinus verſe* d'un arc eſt la partie AF ou A*f* du diamètre AD, compriſe entre l'origine A de cet arc, & ſon ſinus droit EF ou H*f*. Ainſi AF eſt le ſinus verſe de l'arc AE, & A*f* celui de l'arc ABH, & de l'arc ABD*e*.

Rèmarque.

Mr. Mayer dans ſa belle Trigonométrie inſerée au ſecond Volume des Mémoires de Petersbourg, prétend que le ſinus total eſt poſitif pour tous les arcs qui ſe terminent entre A & B, ou entre A & *b* dans le demi-cercle B A *b*, & qu'il eſt négatif pour tous les arcs qui ſe terminent entre B & D, ou entre *b* & D ; mais il n'en donne aucune raiſon. Son but a été de rendre poſitive la tangente d'un angle obtus, ou d'un arc ABH plus grand que 90°. Mais par la definition des tangentes, qui partent de l'origine A des diviſions du cercle & qui rencontrent le ſecond diamètre prolongé HC*h*, il eſt évident que la tangente de l'arc ABH ne peut rencontrer ce diamètre que dans un point *t* au deſſous du premier diamètre AD, & qu'ainſi elle eſt négative.

Si l'on ſaiſit bien ces définitions des ſinus & coſinus, des tangentes & cotangentes, on comprendra aiſément l'uſage de la Table des ſinus & tangentes.

Les ſinus, tangentes, coſinus & cotangentes y ſont exprimés en nombres qu'on appelle *logarithmes*. On a imagi-

né ces nombres pour épargner la peine des grandes multiplications & divisions. Au lieu de multiplier un sinus par un nombre, par un autre sinus, ou par une tangente, on ne fait qu'ajouter ensemble leurs logarithmes, & la somme de ces logarithmes donne le logarithme de leur produit. De même au lieu de diviser un nombre par un autre nombre, on soustrait le logarithme du second du logarithme du premier ; le reste de la soustraction est le logarithme du quotient de la division du premier par le second.

Après la table des sinus & des tangentes, on trouve celle des logarithmes de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 9999, ou au-delà Les logarithmes des nombres moindres que 100 sont inutiles, & on pourroit se dispenser de les mettre dans les tables. Il faut seulement observer que le logarithme de 1 est 0 ; celui de 10 est 1, celui de 100 est 2, celui de 1000 est 3. Ces logarithmes sont des nombres entiers. Les figures qui les suivent sont des fractions décimales, c'est-à-dire, des dixièmes, des centièmes, des millièmes &c. de l'unité. On les sépare des nombres entiers par un point dans les logarithmes, & par une virgule dans les nombres naturels, ou quelquefois aussi par un point. Ainsi 1 . 3 ou 1,3 signifie 1 & 3 dixièmes; 2 . 36 signifie 2 & 36 centièmes, & ainsi des millièmes, dix millièmes, cent millièmes &c. selon le nombre des figures.

Les nombres entiers dans les logarithmes se nomment aussi *Caractéristiques*. On les supprime quelquefois dans les Tables des nombres, parce qu'ils varient suivant que le nombre naturel de la première colonne est un nombre moindre ou plus grand que 10. Si le nombre proposé est moindre que 10, sa caractéristique est 0. S'il est plus grand que 10 & moindre que 100, sa caractéristique est 1. S'il est plus grand que 100 & moindre que 1000, sa caractéristique est 2, & ainsi de suite à l'infini. La caractéristique des fractions est négative ; on l'exprime par le

ſigne — qui ſignifie moins, comme + ſignifie plus. Celle du logarithme des dixièmes eſt — 1; des centièmes, — 2; des millièmes — 3, & ainſi de ſuite.

Mais pour eviter ces ſignes négatifs, on a imaginé de leur ſubſtituer leur complément à 10; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de — 1 on écrit 9; au lieu de — 2, on écrit 8; 7 au lieu de — 3, & ainſi de ſuite. Après quoi on retranche toutes les dixaines, de la ſomme.

Exemples.

Si l'on demande le logarithme du nombre 21, il faut chercher 21 dans la première colonne de la table des nombres, & on trouvera vis-à-vis dans la ſeconde colonne 1. 322219, ou ſeulement . 322219; à quoi on ajoutera la caractériſtique 1, pour avoir 1 . 322219.

Le logarithme de 2100 eſt le même avec ſa caractériſtique 3; celui de 2101 eſt 3 . 322426, & ainſi de ſuite.

Le logarithme de 2 dixièmes, ou de 0, 2 eſt 9 . 301030, le même que celui de 2, à la caractériſtique près. Celui de 2 centièmes, ou de 0,02 eſt 8 . 301030. Celui de 0, 0021 eſt 7 . 322219. Celui de 0, 0002101 eſt 6. 322426.

Pour trouver le logarithme d'un nombre accompagné de fractions, il faut reduire le tout à une fraction impropre. Par exemple $1\frac{1}{3}$ ſe reduit à $\frac{4}{3}$. $20\frac{1}{4}$ ſe reduit à $\frac{81}{4}$. Après quoi on ſouſtrait le logarithme du dénominateur de celui du numérateur; le reſte ſera le logarithme de la fraction.

Ainſi dans le premier exemple, du logarithme de 4,	0 . 602060
Je ſouſtrais le logarithme de 3,	0 . 477121
Le reſte eſt le logarithme de $\frac{4}{3}$ ou de $1\frac{1}{3}$,	0 . 124939
Dans le ſecond exemple, du logarithme de 81,	1 . 908485
Je ſouſtrais le logarithme du dénominateur 4,	0 . 602060
Le reſte eſt le logarithme de $\frac{81}{4}$, ou de $20\frac{1}{4}$,	1 . 306425

Il eſt ordinairement plus commode de réduire les fractions ordinaires en fractions décimales ; ce qui ſe fait en joignant pluſieurs zero au numérateur, & le diviſant par le dénominateur.

Exemples.

Pour reduire $\frac{1}{4}$ en fraction décimale, je diviſe 1,00 par 4, & le quotient 0,25 eſt une fraction décimale qui vaut $\frac{1}{4}$; & en effet 25 centièmes ſont $\frac{1}{4}$ de l'unité. Pour réduire $\frac{1}{3}$ en fraction décimale, je diviſe 1,0000 &c. par 3, & le quotient 0,3333 à l'infini vaut $\frac{1}{3}$. Cette diviſion n'a point de fin dans ce cas, & l'on s'arrête où l'on veut ; parce que après cinq ou ſix figures décimales, le reſte eſt inſenſible. De même pour avoir $\frac{2}{3}$, on diviſe 2,000 &c. par 3, & le quotient eſt 0,6666 à l'infini. Mais pour ajouter ces deux fractions 0,3333 . . . 0,6666 . . . on doit faire attention que la ſomme 0,9999 . . . vaut autant que 1 ; parce qu'on doit ajouter 1 à la dernière décimale, lorſque celle qu'on néglige ſurpaſſe 5.

Pour réduire les minutes en fractions décimales d'heures ou de degrés, il faut les diviſer par 60. Ainſi 35',000 par 60, donnent la fraction décimale 0,58333 . . .

Pour réduire les ſecondes en fractions décimales d'heures ou de degrés, il faut les diviſer par 3600, parce qu'une heure ou un degré, contient 3600''. Ainſi diviſant 20'',0000 par 3600, on aura 0,00555 . . .

L'addition des fractions décimales ſe fait comme celle des nombres entiers, en obſervant de placer les dixièmes ſous les dixièmes, les centièmes ſous les centièmes, & ainſi de ſuite.

Par exemple, 35 minutes ſont en décimales d'heure	0, 583333
Et 20 ſecondes ſont	0, 005555
Leur ſomme ſera donc	0, 588888

Et comme on néglige ici 8, il faudra ajouter 1 à la dernière figure, qui ſera 9.

Ayant ainſi reduit toutes les fractions en décimales, on trouvera fort aiſément le logarithme d'un nombre

accompagné de fractions, en faisant attention à la caractéristique. Par exemple, le logarithme de $10^{o}. 35'. 20''$, ou de 10,58888 ... est 1,024850.

De la Partie proportionnelle.

Les nombres naturels ne sont pas entr'eux comme leurs logarithmes ; mais les différences des nombres naturels sont à fort peu près en même proportion que les différences de leurs logarithmes. Ainsi lorsqu'on ne trouve pas dans la Table des nombres le logarithme d'un nombre donné, on prend celui des quatre premières figures, & l'on fait cette regle de proportion :

Comme la différence entre les deux nombres naturels les plus approchans du nombre donné, l'un plus grand, l'autre plus petit, est à la différence de leurs logarithmes ; ainsi la différence entre le nombre donné & le nombre trouvé dans la table, est à la différence de leurs logarithmes. Cette différence se nomme la *partie proportionnelle.* Il faut l'ajouter au logarithme trouvé, si le nombre donné est plus grand que le nombre trouvé, & la retrancher du logarithme trouvé, si le nombre donné est plus petit.

Exemple.

On demande le logarithme de 0,588889 ?

On trouve dans la table des nombres le logarithme des quatre premières figures 0,5888, qui est 9.769968. C'est aussi le logarithme de 0,588800. Le nombre qui suit immédiatement dans la table est 0,588900 ; son logarithme est 9.770042. La différence de ces nombres naturels est 100, & celle de leurs logarithmes est 74. Je dis donc selon la regle : comme 100 est à 74, ainsi la différence 89 entre le nombre donné & le nombre trouvé est à la partie proportionnelle 66, qu'il faut ajouter au moindre logarithme 9.769968, pour avoir le logarithme de 0,588889, qui sera 9.770034.

Le logarithme étant donné, on trouvera le nombre qui lui répond, en renversant la regle précédente : comme la différence des deux logarithmes les plus approchans

du logarithme donné, eſt à la différence des nombres correſpondans, ainſi la différence entre le logarithme donné & l'un des deux logarithmes les plus approchants, eſt à la *partie proportionnelle*, qu'il faut ajouter au plus petit des deux nombres, ou retrancher du plus grand.

Exemple.

Quel eſt le nombre qui répond au logarithme 9 . 770034 ?

Les deux logarithmes les plus approchans ſont 9 . 769968, & 9.770042, qui répondent dans la table, aux nombres 0, 5888 & 0,5889; dont la différence eſt 1 ou 10 ou 100. La différence de ces deux logarithmes eſt 74, & la différence entre le logarithme donné & le moindre logarithme de la table 9 . 769968 eſt 66. Je dis donc:

Comme la différence 74 des deux logarithmes les plus approchans dans la table, eſt à la différence 1 ou 100 des nombres correſpondans, ainſi la différence 66 entre le logarithme donné 9 . 770034 & le moindre des logarithmes trouvés eſt à la partie proportionnelle 89, qu'il faut ajouter au moindre nombre 0,588800, pour avoir le nombre requis 0,588889.

Application de cette Régle aux ſinus & tangentes.

ON trouve au haut de la Table des ſinus, tous les degrés depuis 0 juſques à 45°, & au bas tous les autres depuis 45° juſqu'à 90.° La colonne à main gauche marque toutes les minutes qui appartiennent aux degrés d'en haut, & qui croiſſent en deſcendant; celle à main droite marque toutes les minutes des degrés d'embas, & elles croiſſent en montant. Ainſi il n'eſt pas difficile de trouver le ſinus & le coſinus d'un nombre quelconque de degrés & de minutes.

Mais pour avoir les ſinus & coſinus des degrés, minutes & ſecondes, il faut emploier la partie proportionnelle, & dire : comme 60″ ſont au nombre donné des ſecondes, ainſi la différence entre deux ſinus conſécutifs eſt à la partie proportionnelle qu'il faut ajouter au moindre ſinus.

Exemple.

On demande le ſinus de 36.° 50.′ 20″ ?

Dans la colonne marquée en haut 36° à côté de 50′, on trouve le ſinus	9 . 777781
Dans la même colonne 36° à côté de 51′, on trouve le ſinus	9 . 777950
Leur différence par la ſouſtraction, eſt	169

Je dis donc : comme 60″ ſont à 20″, ainſi 169 à 56, partie proportionnelle qu'il faut ajouter au moindre ſinus 9.777781, pour avoir le ſinus 9 . 777837 de 36.° 50.′ 20″.

On trouve de même le coſinus du même angle 9 . 903266, & ſa tangente 9 . 874571.

Lorſqu'on a un ſinus ou un coſinus qui ne ſe rencontre pas exactement dans la table, on prend la minute du ſinus le plus approchant en moins, & l'on fait cette proportion : comme la différence des deux ſinus conſécutifs dans la table, eſt à la différence du ſinus donné au ſinus le plus approchant de la table en moins, ainſi 60″ ſont aux ſecondes qu'il faut ajouter.

Exemple.

On demande l'arc de cercle dont le ſinus eſt 9 . 777837 ?

L'arc le plus approchant en moins eſt 36.° 50.′ Son ſinus dans la table eſt	9 . 777781
Le ſinus de l'arc ſuivant 36.° 51.′ eſt	9 . 777950
Leur différence eſt	169
La différence du ſinus donné au moindre ſinus trouvé eſt	56

Je dis donc : 169 eſt à 56, comme 60″ à 20″ preſque, ou à 19″82. Donc l'arc requis eſt de 36.° 50′. 20.″

Du Complément Arithmétique.

LE *Complément Arithmétique* d'un nombre, eſt le logarithme d'une fraction qui a ce nombre pour dénominateur, & dont le numérateur eſt 1. On le trouve fort aiſément par la ſeule inſpection, en ôtant de 9 chacune des figures du logarithme de ce nombre, excepté la dernière à main droite qu'il faut ſouſtraire de 10.

Exemple I.

Le logarithme de 7736 étant 3 . 888516, on demande ſon complément Arithmétique, ou le logarihme de $\frac{1}{7736}$?

De 9 ôtez ſucceſſivement 3 . 888516, & de 10 la dernière figure; vous aurez le complément Arithmétique 6 . 111484. C'eſt le logarithme de $\frac{1}{7736}$.

Exemple II.

Le logarithme de 41, 3 eſt 1 . 615950. Son complément Arithmétique eſt donc 8 . 384050, la dernière figure étant ici 5, qu'il faut ſouſtraire de 10, & toutes les autres de 9.

Le logarithme de la cotangente d'un arc de cercle eſt toujours le complément arithmétique de ſa tangente. Ainſi quand même la table ne donneroit que les tangentes de tous les arcs depuis o juſqu'à 45°, on y trouveroit fort-aiſément leurs cotangentes, c'eſt-à-dire, les tangentes de tous les autres arcs depuis 45.° juſques à 90.° en prenant les complémens arithmétiques.

Par exemple, la tangente de 43° 18′ eſt dans la table 9 . 974213. Son complément arithmétique 0.025787 eſt ſa cotangente, ou la tangente de 46.° 42.′

Le logarithme de la ſecante eſt le complément arithmétique du coſinus, & le logarithme de la coſecante eſt le complément arithmétique du ſinus.

La partie proportionnelle des tangentes eſt la même que celle des cotangentes excepté que l'une va en croiſſant, & l'autre en diminuant.

La partie proportionnelle des ſécantes eſt la même que celle des coſinus, & celle des coſécantes eſt la même que celle des ſinus.

Dans toutes les régles de la Trigonométrie, on n'a que des proportions à faire, ou des régles de trois directes. Si l'on n'avoit pas le ſecours des logarithmes, il faudroit multiplier le ſecond terme par le troiſième, & diviſer le produit par le premier terme; ce qui ſeroit fort long, fort pénible & très-ſujet à erreur. Par le moyen des logarithmes,

on ne fait qu'ajouter ensemble le complément arithmétique du premier terme & les logarithmes du second & du troisième termes. La somme de ces trois nombres est le logarithme du quatrième terme.

Lorsqu'on veut trouver le quarré d'un grand nombre, on double son logarithme, & lorsqu'on veut le cuber, on triple son logarithme.

Pour extraire la racine quarrée d'un nombre, on prend la moitié de son logarithme, & le tiers, pour extraire la racine cubique.

On comprendra mieux l'avantage du calcul par logarithmes, si on l'applique aux questions les plus épineuses de l'arithmétique. Par exemple, on demande ce que produira dans cent ans un capital de 20000 livres au denier vingt, intérêts sur intérêts? La solution ordinaire de ce Problême par les nombres naturels exige un calcul immense. Mais par les logarithmes, il suffit de prendre le logarithme de 1,05, qui est la somme d'une livre & de son intérêt. Ce logarithme est 0.0211893.... Je le multiplie par 100, & j'ai 2.118930

J'ajoute à ce logarithme celui de 20000 liv. qui est 4.301030

La somme des deux est le logarithme du nombre requis 2630025 liv. 6.419960

C'est à quoi montent les 20000 liv. au denier vingt, intérêts sur intérêts, au bout de 100 ans.

Rèmarque.

Pour abréger les expressions, nous exprimerons les proportions en cette manière, A : B :: C : D, c'est-à-dire, A est à B, comme C est à D, ou 3 : 6 :: 7 : 14, c'est-à-dire, 3 est à 6 comme 7 est à 14.

On exprime l'égalité par le signe =. Ainsi $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ signifie que ces deux fractions sont égales. On exprime la multiplication par le signe ×. Ainsi 3 × 5 signifie 3 multiplié par 5, ou le produit de 3 par 5. Quelquefois on ne met qu'un point au lieu de ×. Ainsi $a \cdot b$ signifie le produit

de *a* par *b*. Le signe + est celui de l'addition, il signifie *plus* (comme on l'a déja dit) & — signifie *moins*. Par exemple $6 \times 7 + 3 \times 14 = 84$ signifie que le produit de 6 par 7 plus le produit de 3 par 14 est égal à 84. Et $6 \times 7 - 3 \times 14 = 0$ signifie que la différence de ces deux produits est zero.

Des Triangles Rectilignes, Rectangles.

Fig. 3. 1. EN prenant un côté AB (fig. 3.) d'un triangle rectangle pour le rayon d'un cercle, l'autre côté BC devient la tangente, & l'hypothénuse AC (c'est-à-dire, le plus grand côté) devient la secante de l'angle compris entre l'hypothénuse & le côté qu'on a pris pour rayon.

2. Si l'on prend l'hypothénuse AC pour rayon, les deux autres côtés seront les sinus des angles opposés, qui sont complémens l'un de l'autre; BC sera donc le sinus, & AB le cosinus de l'angle A, ou le sinus de l'angle C.

Ces deux principes suffisent pour résoudre tous les cas des triangles rectangles.

I. CAS.

L'un des angles A *étant donné avec le côté adjacent* AB, *trouver le reste?*

Exemple.

Soit AB = 64 lieues, l'angle A de 36°. 52.' On demande le reste?

1. L'angle C. complément de l'angle A, est de 53°. 8.'

2. Comme le rayon est à la tangente de l'angle A de 36°. 52.' 9 . 875010

Ainsi le côté AB, 64 lieues 1 . 806180

Est au côté BC, 47, 99. ou 48 lieues 1 . 681190

3. Le rayon : eſt à la ſecante de l'angle A, 36.° 52.′ 0.096892
: : Le côté AB 64 1.806180

: Eſt à l'hypothénuſe AC = 80 1.903072

II. Cas.

Deux côtés AB, BC, *étant donnés, trouver le reſte ?*

Soit AB = 64. BC = 48.

1. AB : BC : : le rayon : à la tangente de l'angle A.

Prenez le complément arithmétique de AB = 64, 8 . 193820

Ajoutez le log. du ſecond terme BC = 48, 1 . 681190

Le logarithme du rayon étant zero, vous aurez la tangente de A. 36°. 52.′ 9 . 875010

2. Le complément de l'angle A eſt égal à l'angle C = 53.° 8′.

3. On aura l'hypothénuſe AC, comme dans le premier Cas.

III. Cas.

L'hypothénuſe AC *étant donnée avec un côté* AB, *trouver le reſte ?*

Prenez la ſomme & la différence de l'hypothénuſe & du côté donné, & ajoutez au logarithme de la ſomme le logarithme de la différence ; vous aurez le logarithme du quarré de l'autre côté BC. La moitié de ce logarithme ſera le logarithme de BC.

Exemple.

AC = 80
AB = 64

Somme 144 . Logarithme de la ſomme 2 . 158362
Différence 16 . Logarithme de la différence 1 . 204120

Logarithme du quarré de BC 3 . 362482
Logarithme de BC = 48 1 . 681241

On trouve auſſi ce côté par les nombres naturels ;

Du quarré de AC	6400
Otez le quarré du côté AB	4096
Le reſte ſera le quarré de BC	2304

Et ſa racine quarrée 48, ſera le côté BC.

Par la même raiſon ſi l'on ajoute enſemble les deux quarrés de AB & de BC, on aura celui de l'hypothénuſe AC.

On trouve les angles du triangle comme dans les deux autres cas.

Des Triangles rectilignes obliquangles.

I. CAS.

Fig. 4. *Les trois côtés étant donnés, trouver les angles ?* (fig. 4).

Ajoutez enſemble les trois côtés. Prenez la moitié de leur ſomme, & de cette moitié ôtez ſucceſſivement les deux côtés autour de l'angle requis. Enſuite vous ajouterez les logarithmes de ces deux reſtes aux complémens arithmétiques des deux côtés. La moitié de la ſomme de ces quatre logarithmes ſera le ſinus de la moitié de l'angle requis.

Exemple.

Les trois côtés donnés ſont AE = 142, AD = 104, DE = 70 } on demande l'angle A.

Leur ſomme = 316
Leur demi-ſomme = 158

Otez AD = 104 .	Compl. arith. de AD =	7.982967
1^er. reſte = 54 .	Logar. du 1^er. reſte =	1.732394
Otez AE = 142 .	Compl. arith. de AE =	7.847712
2^d. reſte = 16 .	Logar. du 2^d. reſte =	1.204120
Somme des quatre logarithmes		8.767193
La demi-ſomme eſt le ſinus de la moitié de l'angle A 13.°59.'50"		9.383596

Donc l'angle A = 27.°59.'40".

Remarquez que dans la ſomme des quatre logarithmes la

la caractéristique 8 équivaut à 18, à cause des complémens arithmétiques; & ainsi la moitié de cette caractéristique doit être 9.

Si l'on cherche l'angle D par la même méthode, il faut retrancher AD & DE de la demi-somme

	158		
— AD =	104	Complément arithmétique de AD =	7.981967
1er reste =	54	Logarithme du 1er reste =	1.732394
— DE =	70	Complément arithmétique de DE =	8.154902
2d reste =	88	Logarithme du 2d reste =	1.944483
		Somme	9.814746

Sinus de la moitié de l'angle D = 53.° 53.' 39." ½ somme 9.907373

Donc l'angle ADE = 107.° 47.' 18."

Si l'on ajoute à cet angle le 1er. A = 27. 59. 40

On aura le supplément du 3e = 135. 46. 58

Donc le 3e angle E est = 44. 13. 2

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris par ces deux côtés, trouver le reste?

1. La somme des deux côtés : est à leur différence : : la tangente de la moitié du supplément de l'angle compris par ces deux côtés : est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles. Ajoutez cette demi-différence au demi-supplément de l'angle donné; vous aurez le plus grand angle, qui est toujours opposé au plus grand côté: retranchez cette demi-différence du même demi-supplément, vous aurez le plus petit des deux angles requis.

2. Ayant les trois angles, on trouvera le troisième côté par la Regle générale; les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés qui leur sont opposés.

Exemple.

AE est = 142. L'angle A compris est de 27°.59'.40". son suppl. 152.°0.'20"
AD est = 104 la moitié 76. 0. 10.

Leur s. 246
Leur dif. 38

On demande les deux autres angles & le 3.e côté.

1. La somme des côtés donnés 246 ; son complément arithmétique	7.609065
: Est à leur différence 38. . son logarithme	1.579784
: : La tang. du demi-supplément de l'angle A, 76.° 0'. 10''.	0.603319
: A la tang. de la ½ différence des angles D & E, 31.° 47. 8	9.792168

Ajoutant cette ½ diff. au ½ suppl. on a l'ang. D 107. 47. 18
La retranchant du demi-suppl. on a l'angle E 44. 13. 2

2. Le sinus de l'angle E, 44.° 13.' 2'' Son complem. arithm.	0.156530
: Est au côté opposé AD, 104 Son logarithme	2.017033
: : Le sinus de l'angle A, 27.° 59.' 40.''	9.671530
: est au côté opposé DE = 70	1.845093

III. Cas.

Un côté étant donné avec deux angles, trouver le reste ?

1. Le troisième angle est le supplément de la somme des deux autres.

2. On aura les deux autres côtés par la regle générale : les côtés sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés.

Exemple.

Le côté donné AE est = 142. Les deux angles { A = 27.° 59.' 40'' ; E = 44. 13. 2

Leur somme = 72. 12. 42
Leur supplement est l'angle D = 107. 47. 18

Le sinus de l'angle D ou de son supplement 72. 12. 42. Complement arithmétique.	0.021276
: Est au côté AE, 142	2.152288
: : Le sinus de l'angle A, 27.° 59.' 40.''	9.671530
: Est au côté DE = 70	1.845094

On trouvera de même le côté AD.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

1. Le côté opposé à l'angle donné est au sinus de cet angle, comme l'autre côté donné est au sinus de l'angle qui lui est opposé.

Mais cet angle trouvé eſt ambigu, s'il eſt oppoſé au plus grand des deux côtés donnés, c'eſt-à-dire, qu'on ne peut pas ſçavoir en vertu de cette regle, s'il eſt aigu ou obtus.

2. Ayant déterminé cet angle, on aura le troiſième, qui eſt le ſupplément de la ſomme des deux autres; & l'on trouvera le troiſième côté par la même regle.

Exemple.

AE eſt = 142. AD = 104. & l'angle E oppoſé au côté AD eſt = 44.° 13.′ 2″. on demande le reſte ?

1. AD = 104. ſon complément arithmétique	7.982967
: Eſt au ſinus de l'angle oppoſé E, 44.° 13.′ 2.″	9.843470
: : L'autre côté AE = 142	2.152288
: Au ſinus de l'angle oppoſé D ou *d*.	9.978725

Si l'on fait A*d* = AD & que l'on prolonge ED vers *d*, l'angle *d* égal à l'angle A D *d* ſera ſupplément de l'angle ADE, & le ſinus que l'on vient de trouver, ſera le ſinus de l'angle aigu *d* = 72.° 12.′ 42″, ou de l'angle obtus ADE ſon ſupplément = 107.° 47.′ 18.″ Ainſi cet angle eſt ambigu, & par conſéquent l'angle A qui eſt le ſupplément des deux autres angles, eſt indéterminé. Si l'angle *d* eſt aigu, l'angle *d* AE eſt = 63.° 34.′ 16″; & ſi l'angle D eſt obtus, l'angle DAE eſt = 27.° 59.′ 40.″ Celui-ci eſt oppoſé à DE, & l'angle *d* A E eſt oppoſé à *d* E. On ne peut donc déterminer *d*E ou DE, qu'après avoir déterminé l'eſpèce de l'angle D

2. Le ſinus de l'angle D ou *d*, 72.° 12.′ 42.″ ſon compl. arithmétique.	0.021275
: Eſt au côté oppoſé AE = 142	2.152288
: : Le ſinus de l'angle DAE = 27.° 59.′ 40.″	9.671530
: Eſt au côté oppoſé DE = 70, comme dans le 3e cas.	1.845093
Ou bien :: Le ſinus de l'angle *d*AE = 53.° 34.′ 16.	9.952059
: Eſt au côté oppoſé *d* E = 133, 54.	2.125622

AE étant plus grand que AD, ſi l'on connoît l'angle D, ou l'angle *d*, oppoſé au plus grand de ces deux côtés, la proportion des ſinus ne donnera aucune ambiguité.

B ij

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Principes généraux.

1. LA *Trigonométrie Sphérique* eſt la ſcience du calcul des triangles formés ſur la ſurface d'un globe, par trois arcs de grands cercles.

Les petits cercles de la ſphère n'entrent pas directement dans le calcul de la Trigonométrie ; on peut néanmoins s'en ſervir pour découvrir les deux poles d'un cercle.

2. Les *poles* d'un cercle ſont les extrêmités d'un diamètre de la ſphère, perpendiculaire au plan de ce cercle.

La diſtance de chaque point de la circonférence d'un grand cercle à chacun de ſes poles, eſt un arc de 90 degrés. Le pole d'un grand cercle ne peut pas être le pole d'un autre grand cercle, mais ſeulement de tous les petits cercles parallèles au grand.

3. La meſure d'un angle ſphérique eſt la même que celle de l'angle d'inclinaiſon des deux plans des grands cercles, dont l'interſection forme cet angle ſphérique ; c'eſt
Fig 5. l'angle BCD (fig. 5.) formé par les demi-diamètres BC, DC, perpendiculaires à l'interſection AE des deux grands cercles ABE, ADE. Ainſi l'arc DB du grand cercle DCB, dont A & E ſont les poles, meſure l'angle ſphérique DAB ; puiſqu'il meſure l'inclinaiſon DCB ; & les deux angles ſphériques DAB, DEB aiant la même meſure DB, ſont égaux entr'eux.

Les tangentes des deux grands cercles, ou les lignes qui les touchent en A dans leurs plans, peuvent auſſi meſurer par leur inclinaiſon, l'angle ſphérique. Car ces tangentes étant toutes deux perpendiculaires au demi-diamètre commun AC, ſont parallèles l'une à BC, l'autre à DC. Donc elles forment enſemble un angle égal à l'inclinaiſon BCD.

Il ſuit de là que deux angles ſphériques oppoſés au ſommet, & formés par l'interſection de deux arcs, ſont égaux entre eux, & que ſi un arc de cercle forme deux angles de ſuite avec un autre arc de cercle, ces deux angles ſeront ſupplément l'un de l'autre.

4. Si les points E, F, G de la ſphére (fig. 6.) ſont les poles les plus proches du triangle ſphérique ABC, c'eſt-à-dire, ſi E eſt le pole de BC, F de AB, & G de AC, le triangle ſphérique FEG aura trois côtés qui ſeront ſupplémens des angles A, B & C reſpectivement, FG de l'angle A, EF de l'angle B, & EG de l'angle C; & les angles E, F, G ſeront ſupplémens des côtés oppoſés, BC, AB, AC reſpectivement. Fig. 6.

5. La ſomme de deux côtés quelconques d'un triangle ſphérique, eſt plus grande que le troiſième côté.

6. Un côté quelconque d'un triangle ſphérique eſt plus petit qu'un demi-cercle.

7. La ſomme des trois côtés d'un triangle ſphérique eſt toujours moindre que 360 degrés.

8. La ſomme des trois angles eſt toujours plus grande que 180°, & moindre que 540° ou que 6 angles droits. D'où il ſuit qu'un triangle ſphérique peut avoir trois angles droits; & même trois angles obtus.

9. Deux triangles ſphériques ſont égaux 1.° ſi les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés homologues de l'autre, chacun à chacun, 2.° s'ils ont deux côtés homologues égaux, qui renferment un angle égal, 3.° s'ils ont deux angles homologues égaux, qui comprennent un côté égal, 4.° ſi les trois angles de l'un ſont égaux aux trois angles de l'autre, chacun à chacun.

10. Dans tout triangle iſoſcèle, les deux angles oppoſés aux côtés égaux, ſont égaux; & ſi un triangle a deux angles égaux, les deux côtés oppoſés ſont égaux.

Le triangle dont les trois angles ſont égaux, eſt équilatéral, & réciproquement. Chaque angle du triangle équilatéral a plus de 60 degrés; & lorſque les trois côtés ſont chacun de 90°, chaque angle eſt auſſi de 90.°

11. Dans tout triangle ſphérique, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle.

Solution de tous les cas poſſibles des Triangles rectangles.

Fig. 7. SOit H (fig. 7.) l'hypothénuſe, c'eſt-à-dire, le côté oppoſé à l'angle droit; B & P les deux autres côtés; *b* & *p* les angles qui leur ſont oppoſés. Deux de ces cinq termes étant donnés, on trouvera les autres par les analogies ſuivantes.

I. Cas.

L'hypothénuſe H *étant donnée avec l'un des côtés* B *ou* P, *trouver le reſte?*

1. Le ſinus de l'hypothénuſe H eſt au rayon, comme le ſinus du côté donné eſt au ſinus de l'angle qui lui eſt oppoſé, & qui eſt de même eſpèce que le côté oppoſé, tous deux *aigus* ou *obtus*.

2. Le rayon eſt à la cotangente de l'hypothénuſe, comme la tangente du côté donné eſt au coſinus de l'angle adjacent à ce côté; & cet angle ſera *aigu*, ſi l'hypothénuſe & le côté donné ſont de même eſpèce: il ſera *obtus* ſi ces deux quantités ſont de différente eſpèce.

3. Le Coſinus du côté donné eſt au rayon, comme le coſinus de l'hypothénuſe eſt au coſinus de l'autre côté, qui ſera *aigu* ſi l'hypothénuſe & le côté donné ſont de même eſpèce, & *obtus* s'ils ſont de différente eſpèce.

Exemple 1.

L'hypothénuſe H eſt = 61.° 4.′ 56″, le côté B = 40.° 30.′ 20.″ on demande le reſte?

1. Comme le ſinus de l'hypothénuſe H, 61.° 4′. 56″ ſon comp. arithm.	0.057836
: Eſt au Rayon : : Ainſi le ſinus du côté donné B, 40.° 30′ 20.″	9.812594
: Eſt au ſinus de l'ang. oppoſé *b*, 47.° 54.′ 20″, *aigu* comme B	9.870430

2\. Le rayon est à la Cotang. de l'hypothénuse H, 61.° 4.′ 56.″ 9.742281
: : Comme la tangente du côté donné B, 40.° 30.′ 20.″ 9.931584

: Est au cosinus de l'angle adjacent *p*. 61.° 50.′ 29.″ 9.673865
Et cet angle est *aigu* parce que H & B sont aigus.

3\. Le cosinus du côté donné B, 40.° 30.′ 20″, son compl. arithmétique. 0.118991
: Est au rayon : : le cosinus de l'hypothénuse H, 61.° 4.′ 56.″ 9.684445

: Au cosinus du côté P. 50.° 30.′ 30.″ 9.803436

Cet arc P est *aigu*, parce que l'hypothénuse est de même espèce que le côté donné B.

Exemple. 2.

L'hypothénuse H étant = 61.° 4.′ 56″, le côté P = 50.° 30.′ 30″; on demande le reste?

1\. Le sinus de l'hypothénuse, 61.° 4.′ 56.″ son complem. arithmetique 0.057836
: Est au Rayon : : le sinus du côté donné P 50.° 30.′ 30.″ 9.887458
: Est au sinus de l'angle opposé *p*, 61.° 50.′ 29″, *aigu* parceque P est aigu 9.945294

2\. Le rayon: est à la cotang. de l'hypothénuse, 61.° 4.′ 56.″ 9.742281
: Comme la tangente du côté donné P. 50.° 30.′ 30.″ 0.084024

: Au cosinus de l'angle adjacent *b*, 47.° 54.′ 20.″ 9.826305

Cet angle adjacent *b* est *aigu*, parce que H & P sont de même espèce.

3\. Le cosinus du côté P, 50.° 30.′ 30″. son complem. arithmétique. 0.196565
: Est au rayon : : comme le cos. de l'hypothénuse, 61.° 4′ 56.″ 9.684445

: Est au cosinus du côté B, 40.° 30.′ 20.″, 9.881010

Ce côté est *aigu*, parce que H & P sont de même espèce.

II. Cas.

L'hypothénuse H *étant donnée avec un des angles, trouver le reste?*

1\. Pour avoir le côté opposé à l'angle donné, on dira comme le rayon est au sinus de l'hypothénuse, ainsi le sinus de l'angle donné est au sinus du côté opposé, qui sera de même espèce que l'angle donné.

2. On trouvera l'autre côté, en disant le rayon est au cosinus de l'angle donné, comme la tangente de l'hypothénuse, est à la tangente de l'autre côté; qui sera *aigu*, si les deux quantités données sont de même espèce; & *obtus*, si elles sont de différente espèce.

3. Pour avoir l'autre angle, on dira : le rayon est au cosinus de l'hypothénuse, comme la tangente de l'angle donné est à la cotangente de l'autre angle, qui sera *aigu*, si les deux quantités données sont de même espèce, & *obtus*, si elles sont de différente espèce.

Exemple 1.

L'hypothénuse H = 61.° 4.′ 56″; l'angle *p* = 61.° 50.′ 29.″ on demande le reste?

1. Pour trouver le côté P opposé à l'angle *p*, dites : le rayon est au sinus de H, 61.° 4.′ 56″	9.942164
:: Le sinus de l'angle donné *p*, 61.° 50.′ 29″	9.945294
: Au sinus du côté opposé P, 50.° 30.′ 30″, *aigu* parce que *p* est *aigu*	9.887458

2. Pour avoir l'autre côté B, on dira :	
Le rayon : est au cosinus de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29″	9.673863
:: La tangente de l'hypothénuse, 61.° 4.′ 56″	0.257719
: A la tangente du côté B, 40.° 30.′ 20″, *aigu* parce que H & *p* sont de même espèce	9.931582

3. Pour l'autre angle *b*,	
Le rayon : est au cosinus de l'hypothénuse, 61.° 4.′ 56.″	9.684445
:: La tangente de l'angle donné *p*, 61.° 50.′ 29″	0.271430
: A la cotang. de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20″, *aigu* parce que H & *p* sont de même espèce	9.955875

Exemple 2.

H = 61.° 4.′ 56.″ l'angle *b* = 47.° 54.′ 20.″ on demande le reste?

1. Pour le côté opposé B, le rayon est au sinus de l'hypothénuse 61.° 4.′ 56.″	9.942164
:: Le sinus de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20.″	9.870430
: Au sinus du côté opposé B, 40.° 30.′ 20″, *aigu* parce que *b* est *aigu*	9.812594

2. Pour l'autre côté P ; le rayon est au cosinus de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20.″ — 9.826305
:: La tangente de l'hypothénuse H, 61.° 4.′ 56.″ — 0.257719
: A la tangente du côté P, 50.° 30.′ 30″, *aigu* parce que H & *b* sont de même espèce — 0.084024

3. Pour l'autre angle *p* ; le rayon est au cosinus de l'hypothénuse 61.° 4.′ 56″ — 9.684445
:: La tangente de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20″ — 0.044126
: A la cotangente de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29″, *aigu* parce que H & *b* sont de même espèce — 9.728571

III. Cas.

L'un des côtés étant donné avec l'angle qui lui est opposé, trouver le reste ?

1. Pour avoir l'hypothénuse H, on dira : le sinus de l'angle donné, est au sinus du côté opposé, comme le rayon est au sinus de H, qui peut être *aigu*, ou *obtus*, selon les circonstances ; c'est qu'on appelle un angle *ambigu*.

2. Pour l'autre côté, on dira : le rayon est à la tangente du côté donné comme la cotangente de l'angle opposé, est au sinus de l'autre côté, *ambigu*, c'est-à-dire, *aigu* ou *obtus*.

3. Pour l'autre angle, le cosinus du côté donné est au rayon, comme le cosinus de l'angle opposé est au sinus de l'autre angle, *ambigu*.

Exemple I.

Le côté B = 40. 30.′ 20.″ l'angle opposé *b* = 47.° 54.′ 20.″ on demande le reste ?

1. Pour avoir l'hypothénuse, on dira : comme le sinus de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20.″ son complément arithmétiq. — 0.129572
: Au sinus du côté opposé B, 40.° 30.′ 20.″ — 9.812594
:: Le rayon : au sinus de l'hypothénuse 61.° 4.′ 54.″ *ambigu* — 9.942166

2. Pour l'autre côté P, le rayon : à la tang. du côté donné B, 40.° 30.′ 20.″ — 9.931584
:: La cotangente de l'angle opposé *b*, 47.° 54.′ 20.″ — 9.955873
: Au sinus du côté P, 50.° 30.′ 30.″ *ambigu* — 9.887457

3. Pour l'angle *p*; le cosinus du côté B, 40.° 30.′ 20.″ compl. arithmétique	0.118991
: Au rayon : : le cosinus de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20″	9.826305
: Au sinus de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29.″ *ambigu*	9.945296

Exemple 2.

Le côté P = 50.° 30.′ 30″. l'angle opposé *p* = 61.° 50.′ 29.″ on demande le reste ?

1. Pour avoir l'hypothénuse H, on dira : Comme le sinus de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29.″ son complém. arithmétique	0.054706
: Au rayon : : le sinus du côté opposé P, 50.° 30.′ 30.″	9.887458
: Au sinus de l'hypothénuse H, 61.° 4.′ 56″, *ambigu*	9.942164
2. Pour l'autre côté B, le rayon est à la tangente du côté P, 50.° 30.′ 30.″	0.084014
: : La cotangente de l'angle opposé *p*, 61.° 50.′ 29.″	9.728569
: Au sinus du côté B, 40.° 30.′ 20.″ *ambigu*	9.812593
3. Pour l'autre angle *b*, le cos. du côté P, 50.° 30.′ 30.″ compl. arithm.	0.196566
: Au rayon : : le cosinus de l'angle opposé *p*, 61.° 50.′ 29.″	9.673863
: Au sinus de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20.″ *ambigu*	9.870429

On verra dans les Problêmes Astronomiques de quelle manière on peut déterminer ces arcs *ambigus*, à être *aigus* ou *obtus*.

IV. Cas.

L'un des côtés étant donné, avec l'angle adjacent, trouver le reste ?

1. Pour avoir l'hypothénuse H, on dira : le rayon est à la cotangente du côté donné, comme le cosinus de l'angle donné est à la cotangente de l'hypothénuse ; qui sera un arc *aigu*, si les deux quantités données sont de même espèce, & *obtus*, si elles sont de différente espèce.

2. Pour avoir l'autre côté, on dira : le rayon est au sinus du côté donné, comme la tangente de l'angle donné est à la tangente de l'autre côté, qui sera de même espèce que l'angle opposé.

3. Pour l'autre angle ; on dira : le rayon eſt au coſinus du côté donné, comme le ſinus de l'angle donné eſt au coſinus de l'autre angle, qui ſera de même eſpèce que le côté donné.

Exemple 1.

Le côté B = 40.° 30.′ 20.″ l'angle adjacent *p* = 61.° 50.′ 29.″ on demande le reſte ?

1. Pour l'hypothénuſe, comme le rayon eſt à la cotang. de B, 40.° 30.′ 20.″	0.068416
: : Le coſinus de l'angle donné *p*, 61.° 50.′ 29.″	9.673863
: A la cotang. de l'hypothénuſe H, 61.° 4.′ 56.″ *aigu* parce que B & *p* ſont aigus	9.742279
2. Pour l'autre côté P ; le rayon eſt au ſinus du côté donné B, 40.° 30.′ 20.″	9.812594
: : La tangente de l'angle donné *p*, 61.° 50.′ 29.″	0.271431
: A la tangente du côté P, 50.° 30′. 30.″ *aigu*, parce que *p* eſt aigu	0.084025
3. Pour l'autre angle *b*, le rayon eſt au coſinus du côté donné B, 40.° 30.′ 20.″	9.881009
: : Le ſinus de l'angle donné *p*, 61.° 50.′ 29.″	9.945295
: Au coſinus de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20.″ ; *aigu*, parce que B eſt aigu	9.826304

Exemple 2.

Le côté P = 50.° 30.′ 30.″ l'angle adjacent *b* = 47.° 54.′ 20.″ trouver le reſte ?

1. Pour l'hypothénuſe, le rayon eſt à la cotang. du côté P, 50.° 30.′ 30.″	9.915976
Comme le ſinus de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20.″	9.826305
Eſt à la cotangente de l'hypoth. H, 61.° 4.′ 56.″	9.742281

L'hypothénuſe eſt un arc *aigu*, parce que P & *b* ſont de même eſpèce.

2. Pour l'autre côté B, le rayon eſt au ſinus du côté P, 50.° 30.′ 30.″	9.887458
Comme la tangente de l'angle donné *b*, 47.° 54.′ 20.″	0.044126
A la tangente du côté B, 40.° 30.′ 20.″, *aigu*, parce que *b* eſt *aigu*	9.931584

3. Pour l'autre angle *p*, le rayon est au cosinus du côté P, 50.° 30.' 30." 9.803434
:: Le sinus de l'angle donné *b*, 47.° 54.' 20." 9.870428
: Au cosinus de l'angle *p*, 61.° 50.' 29." *aigu* parce que P est *aigu* 9.673862

V. Cas.

Les deux côtés B & P *étant donnés, trouver le reste?*

1. Pour l'hypothénuse H, le rayon est au cosinus de l'un des deux côtés, comme le cosinus de l'autre est au cosinus de H, qui sera un arc *aigu*, si B & P sont de même espèce, & autrement *obtus*.

2. Pour avoir l'angle *b*, le rayon est au sinus du côté P, comme la cotangente du côté B opposé à l'angle *b*, est à la cotangente de l'angle *b*; qui sera de même espèce que le côté opposé B.

3. Pour avoir l'autre angle *p*, on dira de même, le rayon est au sinus du côté B, comme la cotangente du côté P opposé à l'angle *p*, est à la cotangente de l'angle *p*; qui sera de même espèce que le côté opposé P.

Exemple.

Le côté B = 40.° 30.' 20." le côté P = 50.° 30.' 30." ou demande le reste?

1. Pour avoir H, je dis : le rayon est au cosinus du côté B, 40.° 30.' 20." 9.881009
Comme le cosinus du côté P, 50. 30. 30. 9.803434
Est au cosinus de l'hypoth.. H, 61. 4. 56. *aigu* parce que B & P sont aigus 9.684443

2. Pour l'angle *b*, le rayon est au sinus du côté P, 50.° 30.' 30." 9.887458
Comme la cotangente du côté B, 40.° 30.' 20." 0.068416
Est à la cotang. de l'angle opposé *b*, 47.° 54.' 20." *aigu*, parce que B est *aigu* 9.955874

3. Pour l'autre angle *p*, le rayon est au sinus du côté B, 40.° 30.' 20." 9.812594
Comme la cotangente de l'autre côté P, 50.° 30.' 30." 9.915976
Est à la cotangente de l'angle *p*, 61.° 50.' 29", *aigu* comme le côté P 9.728570

VI. CAS.

Les deux angles b & p *étant donnés, trouver le reste ?*

1. On aura l'hypothénuse H, en disant : le rayon est à la cotangente de l'un des angles *b*, comme la cotangente de l'autre angle *p* est au cosinus de H, qui ne sera aigu que lorsque *b* & *p* seront de même espèce.

2. Pour le côté B, on dira : le sinus de l'angle *p* est au rayon, comme le cosinus de l'angle *b* opposé au côté B, est au cosinus du côté B, de même espèce que l'angle opposé *b*.

3. De même pour le côté P : le sinus de l'angle *b* est au rayon, comme le cosinus de l'angle *p* opposé au côté P, est au cosinus du côté P, qui est aussi de même espèce que l'angle opposé *p*.

Exemple.

L'angle $b = 47.^\circ\ 54.'\ 20.''$ l'angle $p = 61.^\circ\ 50.'\ 29.''$ on demande le reste ?

1. Pour l'hypothénuse, le rayon est à la cotangente de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20.″	9.955873
Comme la cotangente de l'autre angle *p*, 61.° 50.′ 29.″	9.728569
Est au cosinus de l'hypothénuse H, 61.° 4.′ 56″, *aigu*, parce que *b* & *p* sont aigus	9.684442
2. Pour le côté B, le sinus de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29.″ complém. arithmétique	0.054706
: Au rayon :: le cosinus de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20″, opposé à B	9.826305
: Au cosinus du côté B, 40.° 30.′ 20″, *aigu*, parce que *b* est aigu	9.881011
3. Pour l'autre côté P, le sinus de l'angle *b*, 47.° 54.′ 20.″ complém. arithmétique	0.129572
: Au rayon :: le cosinus de l'angle *p*, 61.° 50.′ 29″, opposé à P	9 673863
: Au cosinus du côté P, 50.° 30.′ 30″, *aigu* parce que *p* est aigu	9.803435

Règle générale pour les Triangles dont un côté est de 90 degrés.

Il faut changer ce triangle en un autre dont les angles seront les supplémens des côtés opposés, & dont les côtés

feront les fupplémens des angles oppofés. On aura par ce moyen, un triangle rectangle, que l'on réfoudra par les régles précédentes.

Exemple.

Fig. 8. Le côté oppofé à l'angle *h* (fig. 8.) étant de 90.°, B = 132.° 5.′ 40.″, P = 118.° 9.′ 31.″ on demande les trois angles.

Dans le triangle fupplémental, l'angle oppofé au côté 90°, eft de 90° fupplément de 90; le côté B étant = 132.° 5.′ 40″, l'angle *b′* dans le triangle fupplémental fera = 47.° 54.′ 20″; & le côté P étant = 118.° 9.′ 31″, l'angle *p′* oppofé dans le triangle fupplémental fera = 61.° 50.′ 29″. Donc par le 6.^e Cas, les angles *b′* & *p′* étant donnés, on trouvera l'hypothénufe H = 61.° 4.′ 56″ fupplément de l'angle *h*, le côté B′ = 40.° 30.′ 20.″ fupplément de l'angle oppofé *b*, & le côté P′ = 50.° 30.′ 30″ fupplément de l'angle *p*.

Dans ces exemples nous nous fommes fixés à un même triangle rectangle, pour faire fentir aux commençans l'accord de toutes les analogies, & pour leur donner une connoiffance expérimentale de la Trigonométrie fphérique rectangle. Ils peuvent fe propofer eux-mêmes d'autres triangles rectangles connus, pour s'exercer à ce calcul, qui eft la bafe de l'Aftronomie pratique.

Solution de tous les cas poffibles des Triangles obliquangles.

Fig. 9. CEs Triangles (fig. 9.) contiennent trois angles *a*, *b*, *c*, & trois arcs de cercle A, B, C, qui en font les côtés & qui font oppofés aux trois angles. Dès qu'on connoit trois de ces fix quantités, on peut connoître les autres par les Regles fuivantes.

I. CAS.

Les trois côtés A, B, C, *étant donnés, trouver les trois angles?*

Soient A & B deux côtés qui renferment l'un des angles requis *c*.

Retranchez de la demi-fomme des trois côtés, chacun

des deux côtés A & B; ajoutez aux complémens arithmétiques des ſinus de A & de B qui renferment l'angle requis *c*, les ſinus logarithmiques des deux reſtes : la moitié de la ſomme de ces quatre logarithmes ſera le ſinus de la moitié de l'angle *c*.

Exemple.

Côtés donnés { A=76.° 35.′ 36″ ; B=40. 0 10 ; C=50. 10 30 } On demande 1.° l'ang. *c* compris entre A & B.

Somme	166.	46.	16		
Demi-ſomme.	83.	23.	8		
Retranchez A	76.	35.	36	Compl. arithm. du ſinus du côté A	0.011999
1er. reſte	6.	47.	32	Sinus du 1er reſte. 6.° 47.′ 32	9.072872
Retranchez B	40.	0.	10	Compl. arithm. du ſinus de B	0.191907
2d. reſte	43.	22.	58	Sinus du 2d reſte. 43.° 22.′ 58.″	9.836874
				Somme	9.113652

La demi ſomme de ces quatre logar. eſt le ſinus de ½ *c*, 21.° 7.′ 36.″ ½ 9.556826

Le double de cet angle ſera l'ang. requis *c* = 42. 15. 13. ½

2. Pour trouver l'angle *b* compris entre les côtés A & C, on ſouſtraira de la

Demi-ſomme 83.° 23.′ 8″

Le côté A	76.	35.	36.	Compl. arithm. du ſinus de A	0.011999
1er reſte	6.	47.	32.	Sinus du 1er reſte	9.072872
Et le côté C.	50.	10.	30.	Compl. arithm. du ſinus de C	0.114636
2d reſte	33.	12.	38.	Sinus du 2d reſte	9.738556
				Somme	8.938063

La demi ſomme de ces quatre log. eſt le ſinus de ½ *b*, 17.° 7.′ 31″ ½ 9.469031

Le double de cet angle donnera l'ang. requis *b* = 34. 15. 2 ½

3. Pour avoir le troiſième angle *a* compris entre B & C on ſouſtraira de la

Demi-ſomme 83.° 23.′ 8″

Le côté B	40.	0.	10.	Complém. arithm. du ſinus de B	0.191907
1er. reſte	43.	22.	58.	Sinus du 1er reſte	9.836874
Et le côté C	50.	10.	30.	Compl. arithm. du ſinus de C	0.114636
2d reſte	33.	12.	38.	Sinus du 2d reſte	9.738556
				Somme	9.881973

La demi-ſomme eſt le ſinus de ½ *a*, 60.° 48.′ 10.″ 9.940986

Donc l'angle *a* double de l'angle trouvé eſt = 121. 36. 20

seront les supplémens des angles opposés. On aura par ce moyen, un triangle rectangle, que l'on résoudra par les régles précédentes.

Exemple.

Fig. 8. Le côté opposé à l'angle *h* (fig. 8.) étant de 90.°, B = 132.° 5.' 40.", P = 118.° 9.' 31." on demande les trois angles.

Dans le triangle supplémental, l'angle opposé au côté 90°, est de 90° supplément de 90; le côté B étant = 132.° 5.' 40", l'angle *b'* dans le triangle supplémental sera = 47.° 54.' 20"; & le côté P étant = 118.° 9.' 31", l'angle *p'* opposé dans le triangle supplémental sera = 61.° 50.' 29". Donc par le 6.e Cas, les angles *b'* & *p'* étant donnés, on trouvera l'hypothénuse H = 61.° 4.' 56" supplément de l'angle *h*, le côté B' = 40.° 30.' 20." supplément de l'angle opposé *b*, & le côté P' = 50.° 30.' 30" supplément de l'angle *p*.

Dans ces exemples nous nous sommes fixés à un même triangle rectangle, pour faire sentir aux commençans l'accord de toutes les analogies, & pour leur donner une connoissance expérimentale de la Trigonométrie sphérique rectangle. Ils peuvent se proposer eux-mêmes d'autres triangles rectangles connus, pour s'exercer à ce calcul, qui est la base de l'Astronomie pratique.

Solution de tous les cas possibles des Triangles obliquangles.

Fig. 9. CEs Triangles (fig. 9.) contiennent trois angles *a*, *b*, *c*, & trois arcs de cercle A, B, C, qui en sont les côtés & qui sont opposés aux trois angles. Dès qu'on connoit trois de ces six quantités, on peut connoître les autres par les Regles suivantes.

I. CAS.

Les trois côtés A, B, C, *étant donnés, trouver les trois angles?*

Soient A & B deux côtés qui renferment l'un des angles requis *c*.

Retranchez de la demi-somme des trois côtés, chacun

des deux côtés A & B; ajoutez aux complémens arithmétiques des ſinus de A & de B qui renferment l'angle requis *c*, les ſinus logarithmiques des deux reſtes : la moitié de la ſomme de ces quatre logarithmes ſera le ſinus de la moitié de l'angle *c*.

Exemple.

Côtés donnés { A=76.° 35.′ 36″ / B=40. 0 10 / C=50. 10 30 } On demande 1.° l'ang. *c* compris entre A & B.

Somme	166.	46.	16		
Demi-ſomme.	83.	23.	8		
Retranchez A	76.	35.	36	Compl. arithm. du ſinus du côté A	0.011999
1^er. reſte	6.	47.	32	Sinus du 1^er reſte. 6.° 47.′ 32	9.072872
Retranchez B	40.	0.	10	Compl. arithm. du ſinus de B	0.191907
2^d. reſte	43.	22.	58	Sinus du 2^d reſte. 43.° 22.′ 58.″	9.836874
				Somme	9.113652

La demi ſomme de ces quatre logar. eſt le ſinus de ½ *c*, 21.° 7.′ 36.″ ⅝ 9.556826

Le double de cet angle ſera l'ang. requis *c* = 42. 15. 13. ¼

2. Pour trouver l'angle *b* compris entre les côtés A & C, on ſouſtraira de la

Demi-ſomme	83.°	23.′	8″		
Le côté A	76.	35.	36.	Compl. arithm. du ſinus de A	0.011999
1^er reſte	6.	47.	32.	Sinus du 1^er reſte	9.072872
Et le côté C.	50.	10.	30.	Compl. arithm. du ſinus de C	0.114636
2^d reſte	33.	12.	38.	Sinus du 2^d reſte	9.738556
				Somme	8.938063

La demi ſomme de ces quatre log. eſt le ſinus de ½ *b*, 17.° 7.′ 31″ ⅜ 9.469031

Le double de cet angle donnera l'ang. requis *b* = 34. 15. 2 ¾

3. Pour avoir le troiſième angle *a* compris entre B & C on ſouſtraira de la

Demi-ſomme	83.°	23.′	8″		
Le côté B	40.	0.	10.	Complém. arithm. du ſinus de B	0.191907
1^er. reſte	43.	22.	58.	Sinus du 1^er reſte	9.836874
Et le côté C	50.	10.	30.	Compl. arithm. du ſinus de C	0.114636
2^d reſte	33.	12.	38.	Sinus du 2^d reſte	9.738556
				Somme	9.881973

La demi-ſomme eſt le ſinus de ½ *a*, 60.° 48.′ 10.″ 9.940986

Donc l'angle *a* double de l'angle trouvé eſt = 121. 36. 20

II. CAS.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés?

Le triangle ſupplémental réduit ce ſecond cas au premier en cette manière. Prenez pour chacun des angles, ſon ſupplément; retranchez de la demi-ſomme de ces trois ſupplémens, chacun des ſupplémens des angles qui renferment le côté requis; & aux complémens arithmétiques des ſinus de ces deux angles, ou de leurs ſupplémens, vous ajouterez les ſinus logarithmiques des deux reſtes : La moitié de la ſomme de ces quatre logar. ſera le ſinus de la moitié du ſupplément du côté compris entre ces deux angles.

Exemple.

Les angles donnés ſont $a = 121.^\circ\ 36.'\ 20''$, $b = 34.^\circ\ 15.'\ 2''\frac{3}{4}$. $c = 42.^\circ\ 15.'\ 13.''\frac{1}{4}$.

Leurs ſupplémens ſont,

Celui de a =	58.°	23.′	40″	On demande 1.° le côté B compris entre a & c.
Celui de b =	145.	44.	57¼	
Celui de c =	137.	44.	46¾	
Somme	341.	53.	24	
Demi-ſomme	170.	56.	42	

— ſuppl. a	58.	23.	40	Compl. arith. du ſinus de a ou de ſon ſuppl.	0.069726
1^er^ reſte	112.	33.	2	Sin. du 1^er^ reſte ou de ſon ſuppl. 67.° 26.′ 58″	9.965456
— ſuppl. c.	137.	44.	46¾	Compl. arithém. du ſin. de c 42.° 15.′ 13″¼	0.172363
2^d^ reſte	33.	11.	55¼	Sinus du 2^d^ reſte	9.738419
				Somme	9.945964

La ½ ſomme eſt le ſinus du ½ ſup. du côté B, 69.° 59.′ 55.″ 9.972982

Le double de cet arc eſt le ſupplément de B 139. 59. 50

Donc le côté B = 40.° 0.′ 10.″

2. Pour avoir le côté A, il faut ſouſtr. de la ½ ſomme les ſup. de b & c.

Demi ſomme 170.° 56.′ 42.″

Otez le ſuppl. de b	145.	44.	57¼	Compl. arith. du ſin. de b	0.249634
1^er^ reſte	25.	11.	44¾	Sinus du 1^er^ reſte	9.629116
Otez le ſuppl. de c.	137.	44.	46¾	Compl. arith. du ſinus de c	0.172363
2^d^ reſte	33.	11.	55¼	Sinus du 2^d^ reſte	9.738419
				Somme	9.789532

La ½ ſomme eſt le ſin. du ½ ſup. de A 51.° 42.′ 12.″ ½ ſomme 9.894766

Le ſupplément de A eſt donc 103. 24. 24.

Et le côté A = 76. 35. 36.

3°. Pour

3. Pour trouver le 3^{e}. côté C, il faut soustraire de la demi-somme les supplémens de *a* & *b* qui renferment C.

Demi-somme	170.° 56.′ 42″		
Otez le sup. de *a*	58. 23. 40.	Complément arithmétique du sin. de *a* ou de son suppl.	0.069726
1er. reste	112. 33. 2.	Sinus. du 1er reste, ou de son supplément	9.965456
Otez le sup. de *b*	145. 44. 57 $\frac{1}{4}$	Compl. arith. du sinus de *b*	0.249634
2^{d}. reste	25. 11. 44 $\frac{1}{2}$	Sinus du 2. reste	9.619116
		Somme	9.913932
La $\frac{1}{2}$ s. est le sin. du $\frac{1}{2}$ sup. de C,	64.° 54.′ 45.″		9.956966
Supplément de C	129. 49. 30.		
Donc le côté C =	50. 10. 30.		

III. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste?

1. Pour trouver les deux autres angles, on fera ces deux regles de trois.

1. Le sinus de la demi-somme des deux côtés donnés, est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris, est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles, qui sera toujours un angle *aigu*.

2. Le cosinus de la demi-somme des deux côtés donnés, est au cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris, est à la tangente de la demi-somme des deux autres angles; qui sera un angle *aigu*, si la somme des deux côtés ne surpasse pas 180.°, & *obtus*, si elle est plus grande.

Ensuite on ajoutera la demi-somme de ces deux angles à leur demi-différence, pour avoir le plus grand angle, c'est-à-dire, celui qui est opposé au plus grand des deux côtés, & l'on retranchera la demi-différence de la demi-somme, pour avoir le plus petit de ces deux angles.

2. Pour trouver le troisième côté, on fera ces deux proportions:

1. Le rayon est au cosinus de l'angle donné, comme

la tangente de l'un des deux côtés donnés, eſt à la tangente d'un angle M, qui ſera de même eſpèce que ce côté, ſi l'angle donné eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*. Nommons N la différence entre l'angle M & le ſecond côté. Enſuite

2. Le coſinus de M eſt au coſinus du premier côté, comme le coſinus de N eſt au coſinus du troiſième côté, qui ſera de même eſpèce que N, ſi l'angle compris eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*. On ne ſçauroit être trop attentif à ces différentes eſpèces, pour ne pas prendre un angle *aigu* pour un angle *obtus*, ce qui n'arrive que trop ſouvent dans les calculs que l'on fait avec trop de précipitation.

Exemple I.

Les deux côtés donnés ſont A = 76.° 35.′ 36.″ B = 40.° 0.′ 10.″ l'angle compris c = 42.° 15.′ 13″ ¼. On demande 1°. les deux autres angles.

A =	76.°	35.′	36″
B =	40.	0.	10
Somme	116.	35.	46
Différ.	36.	35.	26
Demi-ſom.	58.	17.	53
Demi-diff.	18.	17.	43
½ c	21.	7.	36 ⅝

Comme le ſin. de la ½ ſ. des côtés donnés, compl. arith.	0.070176
: Au ſinus de leur demi-différence	9.496811
: : La cotangente de la moitié de l'angle c	0.412956
: A la tang. de la demi-diff. des autres angles 43°. 40.′ 38″ ¾	9.979943
Comme le coſinus de la demi-ſom. des mêmes côtés, compl. arithmétique	0.279424
: Au coſinus de leur demi-différence	9.977474
: : La cotagente de la moitié de l'angle c	0.412956
: A la tang. de la demi-ſomme des autres angles 77.° 55.′ 41″ ¼	0.669854

Cette ½ ſomme eſt *aigue*, parceque B & C ſont moindres que 180.°

Ajoutez la demi-différence	43. 40. 38 ¾
La ſomme de ces deux quantités donne le plus grand angle a =	121. 36. 20
Leur différence donne le moindre b =	34. 15. 2 ½

2. Pour trouver le troisieme côté, on fera,

1. Le rayon est au cosinus de l'angle compris *c*, 42.° 15.′ 13″ ¼ 9.869334

:: La tangente de l'un des côtés B, 40.° 0.′ 10.″ 9.923856

: A la tangente d'un arc M (*aigu* parceque B est aigu) = 31.° 50.′ 46.″ 9.793190

L'autre côté A est	76.	35.	36	
La diff. A—M = N, est	44.	44.	50	

2. Comme le cosinus de M, 31.° 50.′ 46.″ son compl. arith-métique. 0.070853

: Au cosinus du premier côté B, 40.° 0.′ 10.″ 9.884236

:: Le cosinus de N, 44. 44. 50. 9.851393

: Au cosinus du troisieme côté C, 50. 10. 30. *aigu* comme N. 9.806482

Exemple 2.

Côtés donnés	C =	50.°	10.′	30.″
	B =	40.	0.	10.
Somme		90.	10.	40.
Différence		10.	10.	20.
Demi-somme		45.	5.	20.
Demi-différ.		5.	5.	10.
L'Angle *a* =		121.	36.	20.
½ *a*		60.	48.	10.

1. Le sinus de la demi-somme des côtés donnés complém. Arithmétique. 0.149892

: Au sinus de leur demi-différence 8.947693

:: La cotagente de ½ *a* 9.747270

: A la tang. de la demi-diff. des angles 4.° 0.′ 5″ ¾ 8.844855

2. Le cosinus de la demi-somme des côtés donnés, complément arithmétique 0.151190

: Au cosinus de leur demi-différence 9.998287

:: La cotangente de ½ *a* 9.747270

: A la tangente de la demi-somme des angles *b* & *c*, 38.° 15.′ 8.″ 9.896747

aigue, parce que B & C sont moindres que 180.°

Ajoutez à cette demi-somme la demi-différence	4.	0.	5. ¾
Vous aurez le plus grand angle *c*	42.	15.	13. ¾
Retranchez-la pour le moindre angle, vous aurez *b*	34.	15.	2. ¼

2. Pour trouver le troisieme côté, on fera les deux analogies suivantes.

1^e. le rayon est au cosinus de l'angle compris *a*,	121.° 36.' 20."	9.719388
: La tangente du côté B	40.° 0.' 10"	9.923856
: A la tangente de M, *obtus* comme *a*	156. 15. 38,3	9.643244
Otés de M le côté C	50. 10. 30.	
Vous aurez la différence N	106. 5. 8,3	

2^e. Le cosinus de M	156.° 15.' 38",3 compl. arith.	0.038396
: Au cosinus du côté B	40. 0. 10.	9.884236
: : Le cosinus de N	106. 5. 8,3	9.442595
: Au cosinus du 3^e. côté C différent de N en espèce	76.° 35.' 36."	9.365227

On trouve fort aisément le complément d'un angle obtus, par la soustraction de 90.° par exemple, celui de 106.° 5.' 8",3 est 16.° 5.' 8",3.

IV. Cas.

Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reste?

1. Pour les deux côtés, 1. Le sinus de la demi-somme des deux angles est au sinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté compris, est à la tangente de la demi-différence des deux autres côtés, qui est toujours un arc *aigu*.

2. Le cosinus de la demi-somme des deux angles donnés est au cosinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté compris est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés. Cet arc sera *aigu*, si la somme des deux angles est moindre que 180°, & *obtus*, si elle est plus grande.

Ajoûtez la demi-différence à la demi-somme des côtés; vous aurez le plus grand côté opposé au plus grand angle. Retranchez de la demi-somme, la demi-différence; vous aurez le moindre côté.

2. Pour avoir le troisième angle opposé au côté connu, on fera,

1. Le rayon est au Cosinus du côté connu, comme la tangente de l'un des deux angles est à la cotangente d'un arc *m*, qui sera de même espèce que cet angle, si le

côté connu eſt *aigu*, & de différente eſpèce, s'il eſt *obtus*.

La différence entre le ſecond angle & l'arc trouvé *m*, ſera nommée *n*.

2. Le ſinus de *m* eſt au coſinus du premier angle, comme le ſinus de *n* eſt au coſinus du troiſième angle, qui ſera de même eſpèce que le premier, ſi *m* eſt plus petit que le ſecond angle, & de différente eſpèce, ſi *m* eſt plus grand que le ſecond angle.

Exemple. I.

Angles donnés $a =$	121.°	36.′	20″	
$c =$	42.	15.	13 $\frac{1}{4}$	
Somme	163.	51.	33 $\frac{1}{4}$	Le côté B interjacent = 40.° 0.′ 10.″ on demande le reſte.
Différence	79.	21.	6 $\frac{3}{4}$	
Demi-ſomme	81.	55.	46 $\frac{5}{8}$	
Demi-différence	39.	40.	33 $\frac{3}{8}$	
$\frac{1}{2}$ B	20.	0.	5	

1. Pour trouver les autres côtés.

1. Le ſinus de la demi-ſomme des angles donnés, complément arithmétique	0.004323
: Au ſinus de leur demi-différence	9.805124
: : La tangente de la moitié du côté B	9.561098
: A la tangente de la demi-différence des autres côtés, 13.° 12.′ 33.″	9.370545
2. Le coſinus de la demi-ſomme des angles donnés, complément arithmétique	0.851666
: Au coſinus de leur demi-différence	9.886303
: : La tangente de la moitié du côté B	9.561098
: A la tangente de la demi-ſomme des autres côtés, 63.° 23.′ 3.″	0.300067

La demi-ſomme des côtés ſera *aigue*, parce-que la ſomme des angles eſt moindre que 180.°

A cette $\frac{1}{2}$ ſom. ajoûtant la $\frac{1}{2}$ diff.	13.	12.	33
On aura le plus grand côté A	76.	35.	36
Retranchant la $\frac{1}{2}$ différence on aura le moindre C	50.	10.	30

2, Pour avoir le 3e. angle *b*, on fera

1. Le rayon est au cosinus du côté donné B	9.884236
: La tangente de l'un des deux angles *c*	9.958303
: A la cotangente d'un arc *m* = 55.° 9.′ 59.″ *aigu* parce-que *c* est *aigu*	9.842539

L'autre angle *a* = 121. 36. 20. *m* étant plus petit que *a*, *b* sera *aigu*.

Différence *n* = 66. 26. 21.

2. Le sinus de *m*, son complément Arithmétique	0.085755
: Au cosinus du premier angle *c*	9.869334
: : Le sinus de *n*	9.962197
: Au cosinus du 3e. angle *b* = 34.° 15.′ 2″ $\frac{1}{4}$	9.917286

Exemple 2.

Angles donnés { *b* = 34.° 15′. 2″ $\frac{1}{4}$; *c* = 42. 15. 13 $\frac{1}{4}$

Somme	76. 30. 16
Différence	8. 0. 10 $\frac{1}{2}$
Demi-somme	38. 15. 8
Demi-différ.	4. 0. 5 $\frac{1}{4}$
Le côté donné A =	76. 35. 36
Demi A	38. 17. 48

On demande le reste, & 1°. les deux autres côtés,

1. Le sinus de la demi-somme des angles, complem. Arithm.	0.208223
: Au sinus de leur demi-différence	8.843742
: : La tangente de la moitié du côté A	9.897439
: A la tangente de la $\frac{1}{2}$ diff. des côtés 5.° 5.′ 10″	8.949403

La demi-somme des côtés est un arc *aigu*, parce que la somme des angles *b* & *c* est un arc moindre que 180°.

2. Le cosinus de la demi-somme des angles, complément Arithmétique.	0.104969
: Au cosinus de leur demi-différence	9.998940
: : La tangente de la moitié de A	9.897439
: à la tangente de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés, 45.° 5.′ 20″	0.001348

Demi-différence	5. 5. 10
Le plus grand côté C =	50. 10. 30
Le moindre côté B =	40. 0. 10

2. Pour trouver le 3ᵉ angle *a*, je dis

1. Le rayon eſt au coſinus du côté A	9.365228
:: La tangente de l'un des deux autres angles *b*	9.833080
	9.198308

: à la cotangente d'un arc *m* =	81.° 1.' 42" ½	*aigu* parce que A eſt aigu;
L'autre angle *c*	42. 15. 13 ½	*m* étant plus grand que
Différence *n*	38. 46. 29 ½	*c*, l'angle *a* ſera *obtus*.

2. Le ſinus de l'arc *m*, ſon complém. arithm.	0.005346
: Au coſinus du premier angle *b*	9.917286
:: Le ſinus de l'arc *n*	9.796756
: Au ſinus de l'angle *a obtus*; 121.° 36.' 20."	9.719388

V. CAS.

Deux côtés étant donnés avec un angle oppoſé à l'un des deux, trouver le reſte?

1. Pour trouver l'autre angle oppoſé à l'autre côté, on dira : comme le ſinus du côté oppoſé à l'angle donné, eſt au ſinus de cet angle ; ainſi le ſinus de l'autre côté eſt au ſinus de l'angle oppoſé, *ambigu*.

2. Pour trouver le troiſième angle compris entre les deux côtés, on dira 1. Le rayon eſt au coſinus du côté oppoſé à l'angle inconnu, comme la tangente de l'angle oppoſé à l'autre côté connu, eſt à la cotangente d'un arc *m*, qui ſera de même eſpèce que le premier côté donné, ſi l'angle connu oppoſé à l'autre côté eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*.

2. La tangente du ſecond côté, eſt à la tangente du premier, comme le coſinus de *m* eſt au coſinus d'un autre arc *n*, qui ſera de même eſpèce que le ſecond côté, ſi l'angle oppoſé à ce ſecond côté eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*.

L'angle compris entre les deux côtés donnés eſt égal à la ſomme ou à la différence de *m* & *n*.

3. Pour trouver le troiſième côté, on fera : 1. Le rayon eſt au coſinus de l'angle oppoſé au côté donné, comme la tangente de l'autre côté eſt à la tangente d'un arc *m*, qui ſera ſemblable au ſecond côté, ſi l'angle donné eſt

aigu, & d'une eſpèce différente, ſi cet angle eſt *obtus*.

2. Le coſinus du ſecond côté eſt au coſinus du premier, comme le coſinus de l'arc *m* eſt au coſinus d'un autre arc *n*, qui ſera ſemblable au premier côté, ſi l'angle donné eſt *aigu*, & d'une eſpèce différente, ſi cet angle eſt *obtus*.

Le troiſième côté eſt égal à la ſomme ou à la différence de *m* & *n*. Ainſi les trois ſolutions ſont *ambigues*. Mais ſi les deux côtés ſont égaux, ou, ſi l'un eſt ſupplément de l'autre, l'angle oppoſé que l'on cherche, eſt toujours ſemblable au côté qui lui eſt oppoſé.

Exemple I.

Le côté B = 40.° 0.′ 10.″ C = 50.° 10.′ 30″ l'angle *c* oppoſé au côté C = 42.° 15.′ 13″½.

1. Pour avoir l'angle *b* oppoſé à l'autre côté B, on dira :

Le ſinus du côté C, 50.° 10.′ 30.″ Son compl. arithm.	0.114637
: Au ſinus de l'angle *c* oppoſé à ce côté, 42.° 15.′ 13″½	9.827637
: : Le ſinus de l'autre côté B, 40.° 0.′ 10.″	9.808093
: Au ſinus de l'angle oppoſé *b*, 34.° 15.′ 2″¼, ou, 145.° 44.′ 57″¾	9.750367

2. Pour trouver l'angle *a* compris entre les deux côtés donnés B & C, je dis :

1. Le rayon eſt au coſinus du côté B	9.884236
: : La tangente de l'angle *c* oppoſé au côté C	9.958303
: A la cotangente d'un arc *m*, 55.° 9.′ 59″, *aigu* parce que B & *c* ſont *aigus*	9.842539
2. La tangente de l'autre côté C, complém. arithm.	9.921118
: A la tangente du premier côté B	9.923856
: : Le coſ. de l'arc *m* 55.° 9. 59″	9.756785
: Au coſ. de *n*, *aigu* 66. 26. 21, parce que C & *c* ſont *aigus*	9.601759

Angle *a* = { *n* + *m* 121. 36. 20 ou *n* — *m* 11. 16. 22 } *Ambigu*

3. Pour trouver le 3ᵉ. côté A,

1. Le rayon eſt au coſinus de *c* oppoſé à C	9.869334
: : La tangente de l'autre côté B	9.923856
: A la tangente d'un arc *m*, 31.° 50.′ 46.″ *aigu* parce que B & *c* ſont *aigus*	9.793190

2. Le cosinus de B. Complément arithmétique 0.115764
: Au cosinus de C 9.806482
:: Le cosinus de l'arc m 31.° 50.′ 46″ 9.929147
: Au cos. d'un autre arc n 44. 44. 50, *aigu* parce que c & C le sont 9.851393

Le 3^e. côté A = { $m+n$ 76. 35. 36 ou $m-n$ 12. 54. 4 } *Ambigu*

Exemple. 2.

Le côté C = 50.° 10.′ 30.″ le côté A = 76.° 35.′ 36.″ l'angle c opposé à C = 42.° 15.′ 13.″ $\frac{1}{4}$ on demande le reste?

Pour l'angle a, le sinus du côté C Compl. arithm. 0.114637
: Au sinus de l'angle opposé c 9.827637
:: Le sinus du côté A 9.988001
: Au sinus de l'angle opposé a, 58.° 23.′ 40″,
Ou de son suppl. 121. 36. 20. 9.930275

2. Pour avoir l'angle b compris entre A & C
1. Le rayon est au cosinus du côté A 9.365228
:: La tangente de l'angle donné c 9.958303
: à la cotang. de m, 78.° 6.′ 19″ $\frac{1}{4}$, *aigu*, parceque c & A sont *aigus* 9.323531

2. La tangente de l'autre côté C Compl arithm. 9.921118
: A la tangente du premier côté A 0.622773
:: Le cosinus de m, 78.° 6.′ 19″ $\frac{1}{4}$ 9.314105
: Au cosinus de n . 43. 51. 16 $\frac{1}{2}$, *aigu*, parce que C & c sont *aigus* 9.857996
L'angle b = à la somme 121. 57. 35 $\frac{3}{4}$,
Ou à la différence 34. 15. 2 $\frac{3}{4}$ de m & n.

3. Pour le troisième côté B,
1. Le rayon est au cosinus de l'angle donné c 9.869334
:: La tangente du côté A 0.622773
: A la tangente d'un arc m . 72.° 9.′ 0″ *aigu* parce que c & A sont *aigus* 0.492107

2. Le cosinus du côté A Compl. arith. 0.634772
: Au cosinus de l'autre côté C 9.806482
:: Le cosinus de m 72.° 9.′ 0.″ 9.486467
: Au cosinus de n 32. 8. 50, *aigu*, parce que c & C sont *aigus* 9.927721
Le côté B = $m+n$ = 104. 17. 50, ou $m-n$ = 40.° 0.′ 10.″

II. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés?

Le triangle ſupplémental réduit ce ſecond cas au premier en cette manière. Prenez pour chacun des angles, ſon ſupplément; retranchez de la demi-ſomme de ces trois ſupplémens, chacun des ſupplémens des angles qui renferment le côté requis; & aux complémens arithmétiques des ſinus de ces deux angles, ou de leurs ſupplémens, vous ajouterez les ſinus logarithmiques des deux reſtes: La moitié de la ſomme de ces quatre logar. ſera le ſinus de la moitié du ſupplément du côté compris entre ces deux angles.

Exemple.

Les angles donnés ſont $a = 121.^{\circ}\ 36.'\ 20''$, $b = 34.^{\circ}\ 15.'\ 2''\frac{1}{4}$. $c = 42.^{\circ}\ 15.'\ 13.''\frac{1}{2}$.

Leurs ſupplémens ſont,

Celui de a =	58.°	23.'	40"	On demande 1.° le côté B compris entre a & c.
Celui de b =	145.	44.	$57\frac{3}{4}$	
Celui de c =	137.	44.	$46\frac{1}{2}$	
Somme	341.	53.	24	
Demi-ſomme	170.	56.	42	

— ſuppl. a	58.	23.	40	Compl. arith. du ſinus de a ou de ſon ſuppl.	0.069726
1er reſte	112.	33.	2	Sin. du 1er reſte ou de ſon ſuppl. 67.° 26.' 58"	9.965456
— ſuppl. c.	137.	44.	$46\frac{1}{2}$	Compl. arithém. du ſin. de c 42.° 15.' 13"$\frac{1}{2}$	0.172363
2^{d} reſte	33.	11.	$55\frac{1}{2}$	Sinus du 2^{d} reſte	9.738419
				Somme	9.945964

La $\frac{1}{2}$ ſomme eſt le ſinus du $\frac{1}{2}$ ſup. du côté B, 69.° 59.' 55." 9.972982

Le double de cet arc eſt le ſupplément de B 139. 59. 50

Donc le côté B = 40.° 0.' 10."

2. Pour avoir le côté A, il faut ſouſtr. de la $\frac{1}{2}$ ſomme les ſup. de b & c.

Demi ſomme	170.°	56.'	42."		
Otez le ſuppl. de b	145.	44.	$57\frac{3}{4}$	Compl. arith. du ſin. de b	0.249634
1er reſte	25.	11.	$44\frac{1}{4}$	Sinus du 1er reſte	9.629116
Otez le ſuppl. de c.	137.	44.	$46\frac{1}{2}$	Compl. arith. du ſinus de c	0.172363
2^{d} reſte	33.	11.	$55\frac{1}{2}$	Sinus du 2^{d} reſte	9.738419
				Somme	9.789532

La $\frac{1}{2}$ ſomme eſt le ſin. du $\frac{1}{2}$ ſup. de A 51.° 42.' 12." $\frac{1}{2}$ ſomme 9.894766

Le ſupplément de A eſt donc 103. 24. 24.

Et le côté A = 76. 35. 36.

3°. Pour

3. Pour trouver le 3^{e}. côté C, il faut soustraire de la demi-somme les supplémens de *a* & *b* qui renferment C.

Demi-somme	170.°	56.′	42″		
Otez le sup. de *a*	58.	23.	40.	Complément arithmétique du sin. de *a* ou de son suppl.	0.069726
1er. reste	112.	33.	2.	Sinus. du 1er reste, ou de son supplément	9.965456
Otez le sup. de *b*	145.	44.	$57\frac{3}{4}$	Compl. arith. du sinus de *b*	0.249634
2^{d}. reste	25.	11.	$44\frac{1}{4}$	Sinus du 2. reste	9.629116
				Somme	9.913932

La $\frac{1}{2}$ s. est le sin. du $\frac{1}{2}$ sup. de C, 64.° 54.′ 45.″ 9.956966

Supplément de C 129. 49. 30.

Donc le côté C = 50. 10. 30.

III. CAS.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste?

1. Pour trouver les deux autres angles, on fera ces deux regles de trois.

1. Le sinus de la demi-somme des deux côtés donnés, est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris, est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles, qui sera toujours un angle *aigu*.

2. Le cosinus de la demi-somme des deux côtés donnés, est au cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris, est à la tangente de la demi-somme des deux autres angles; qui sera un angle *aigu*, si la somme des deux côtés ne surpasse pas 180.°, & *obtus*, si elle est plus grande.

Ensuite on ajoutera la demi-somme de ces deux angles à leur demi-différence, pour avoir le plus grand angle, c'est-à-dire, celui qui est opposé au plus grand des deux côtés, & l'on retranchera la demi-différence de la demi-somme, pour avoir le plus petit de ces deux angles.

2. Pour trouver le troisième côté, on fera ces deux proportions:

1. Le rayon est au cosinus de l'angle donné, comme

la tangente de l'un des deux côtés donnés, eſt à la tangente d'un angle M, qui ſera de même eſpèce que ce côté, ſi l'angle donné eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*. Nommons N la différence entre l'angle M & le ſecond côté. Enſuite

2. Le coſinus de M eſt au coſinus du premier côté, comme le coſinus de N eſt au coſinus du troiſième côté, qui ſera de même eſpèce que N, ſi l'angle compris eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*. On ne ſçauroit être trop attentif à ces différentes eſpèces, pour ne pas prendre un angle *aigu* pour un angle *obtus*, ce qui n'arrive que trop ſouvent dans les calculs que l'on fait avec trop de précipitation.

Exemple 1.

Les deux côtés donnés ſont A = 76.° 35.′ 36.″ B = 40.° 0.′ 10.″ l'angle compris c = 42.° 15.′ 13″ $\frac{1}{4}$. On demande 1°. les deux autres angles.

A =	76.°	35.′	36″
B =	40.	0.	10
Somme	116.	35.	46
Différ.	36.	35.	26
Demi-ſom.	58.	17.	53
Demi-diff.	18.	17.	43
$\frac{1}{2}$ c	21.	7.	36 $\frac{5}{8}$

Comme le ſin. de la $\frac{1}{2}$ ſ. des côtés donnés, compl. arith.	0.070176
: Au ſinus de leur demi-différence	9.496811
: : La cotangente de la moitié de l'angle c	0.412956
: A la tang. de la demi-diff. des autres angles 43°. 40.′ 38″ $\frac{1}{4}$	9.979943
Comme le coſinus de la demi-ſom. des mêmes côtés, compl. arithmétique	0.279424
: Au coſinus de leur demi-différence	9.977474
: : La cotagente de la moitié de l'angle c	0.412956
: A la tang. de la demi-ſomme des autres angles 77.° 55.′ 41″ $\frac{1}{4}$	0.669854

Cette $\frac{1}{2}$ ſomme eſt *aigue*, parceque B & C ſont moindres que 180.°

Ajoutez la demi-différence	43. 40. 38 $\frac{1}{4}$
La ſomme de ces deux quantités donne le plus grand angle a =	121. 36. 20
Leur différence donne le moindre b =	34. 15. 2 $\frac{1}{2}$

3. Pour trouver le troisieme côté, on fera,

1. Le rayon est au cosinus de l'angle compris c, 42.° 15.′ 13″ $\frac{1}{4}$ 9.869334

: La tangente de l'un des côtés B, 40.° 0.′ 10.″ 9.923856

: A la tangente d'un arc M (*aigu* parceque B est aigu) = 31.° 50.′ 46.″ 9.793190

L'autre côté A est 76. 35. 36

La diff. A—M = N, est 44. 44. 50

2. Comme le cosinus de M, 31.° 50.′ 46.″ son compl. arith-métique. 0.070853

: Au cosinus du premier côté B, 40.° 0.′ 10.″ 9.884236

: : Le cosinus de N, 44. 44. 50. 9.851393

: Au cosinus du troisieme côté C, 50. 10. 30. *aigu* comme N. 9.806482

Exemple 2.

Côtés donnés	C =	50.°	10.′	30.″
	B =	40.	0.	10.
Somme		90.	10.	40.
Différence		10.	10.	20.
Demi-somme		45.	5.	20.
Demi-differ.		5.	5.	10.
L'Angle a =		121.	36.	20.
$\frac{1}{2}$ a		60.	48.	10.

1. Le sinus de la demi-somme des côtés donnés complém. Arithmétique. 0.149892

: Au sinus de leur demi-différence 8.947693

: : La cotangente de $\frac{1}{2}$ a 9.747270

: A la tang. de la demi-diff. des angles 4.° 0.′ 5″ $\frac{3}{4}$ 8.844855

2. Le cosinus de la demi-somme des côtés donnés, complément arithmétique 0.151190

: Au cosinus de leur demi-différence 9.998287

: : La cotangente de $\frac{1}{2}$ a 9.747270

: A la tangente de la demi-somme des angles b & c, 38.° 15.′ 8.″ 9.896747

aigue, parce que B & C sont moindres que 180.°

Ajoutez à cette demi-somme la demi-différence 4. 0. 5. $\frac{1}{4}$

Vous aurez le plus grand angle c 42. 15. 13. $\frac{1}{4}$

Retranchez-la pour le moindre angle, vous aurez b 34. 15. 2. $\frac{3}{4}$

2. Pour trouver le troisieme côté, on fera les deux analogies suivantes.

1^e. le rayon est au cosinus de l'angle compris *a*,	121.° 36.′ 20.″		9.719388
: La tangente du côté B	40.° 0.′ 10″		9.923856
: A la tangente de M, *obtus* comme *a*	156. 15. 38,3		9.643244
Otés de M le côté C	50. 10. 30.		
Vous aurez la différence N	106. 5. 8,3		

2^e. Le cosinus de M	156.° 15.′ 38″,3	compl. arith.	0.038396
: Au cosinus du côté B	40. 0. 10.		9.884236
: : Le cosinus de N	106. 5. 8,3		9.442595
: Au cosinus du 3^e. côté C différent de N en espèce	76.° 35.′ 36.″		9.365227

On trouve fort aisément le complément d'un angle obtus, par la soustraction de 90.° par exemple, celui de 106.° 5.′ 8″,3 est 16.° 5.′ 8″,3.

IV. Cas.

Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reste?

1. Pour les deux côtés, 1. Le sinus de la demi-somme des deux angles est au sinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté compris, est à la tangente de la demi-différence des deux autres côtés, qui est toujours un arc *aigu*.

2. Le cosinus de la demi-somme des deux angles donnés est au cosinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté compris est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés. Cet arc sera *aigu*, si la somme des deux angles est moindre que 180°, & *obtus*, si elle est plus grande.

Ajoûtez la demi-différence à la demi-somme des côtés; vous aurez le plus grand côté opposé au plus grand angle. Retranchez de la demi-somme, la demi-différence; vous aurez le moindre côté.

2. Pour avoir le troisième angle opposé au côté connu, on fera,

1. Le rayon est au Cosinus du côté connu, comme la tangente de l'un des deux angles est à la cotangente d'un arc *m*, qui sera de même espèce que cet angle, si le

côté connu eſt *aigu*, & de différente eſpèce, s'il eſt *obtus*.

La différence entre le ſecond angle & l'arc trouvé *m*, ſera nommée *n*.

2. Le ſinus de *m* eſt au coſinus du premier angle, comme le ſinus de *n* eſt au coſinus du troiſième angle, qui ſera de même eſpèce que le premier, ſi *m* eſt plus petit que le ſecond angle, & de différente eſpèce, ſi *m* eſt plus grand que le ſecond angle.

Exemple. I.

Angles donnés { $a = 121.^{\circ}\ 36.'\ 20''$; $c = 42.\ 15.\ 13\frac{1}{4}$

Somme	163.	51.	33 ¼	Le côté B interjacent = 40.° 0.′ 10.″ on demande le reſte.
Différence	79.	21.	6 ¾	
Demi-ſomme	81.	55.	46 ⅝	
Demi-différence	39.	40.	33 ⅜	
½ B	20.	0.	5	

1. Pour trouver les autres côtés.

1. Le ſinus de la demi-ſomme des angles donnés, complément arithmétique	0.004323
: Au ſinus de leur demi-différence	9.805124
: : La tangente de la moitié du côté B	9.561098
: A la tangente de la demi-différence des autres côtés, 13.° 12.′ 33.″	9.370545
2. Le coſinus de la demi-ſomme des angles donnés, complément arithmétique	0.851666
: Au coſinus de leur demi-différence	9.886303
: : La tangente de la moitié du côté B	9.561098
: A la tangente de la demi-ſomme des autres côtés, 63.° 23.′ 3.″	0.300067

La demi-ſomme des côtés ſera *aigue*, parce que la ſomme des angles eſt moindre que 180.°

A cette ½ ſom. ajoûtant la ½ diff.	13.	12.	33
On aura le plus grand côté A	76.	35.	36
Retranchant la ½ différence on aura le moindre C	50.	10.	30

2, Pour avoir le 3^e. angle *b*, on fera

1. Le rayon eſt au coſinus du côté donné B	9.884236
: La tangente de l'un des deux angles *c*	9.958303
: A la cotangente d'un arc *m* = 55.° 9.′ 59.″ *aigu* parce-que *c* eſt *aigu*	9.842539

L'autre angle *a* = 121. 36. 20. *m* étant plus petit que *a*, *b* ſera *aigu*.

Différence *n* = 66. 26. 21.

2. Le ſinus de *m*, ſon complément Arithmétique	0.085755
: Au coſinus du premier angle *c*	9.869334
: : Le ſinus de *n*	9.962197
: Au coſinus du 3^e. angle *b* = 34.° 15.′ 2″ ¾	9.917286

Exemple 2.

Angles donnés { *b* = 34.° 15′. 2″ ¾; *c* = 42. 15. 13 ¼

Somme	76. 30. 16
Différence	8. 0. 10 ½
Demi-ſomme	38. 15. 8
Demi-differ.	4. 0. 5 ¼
Le côté donné A =	76. 35. 36
Demi A	38. 17. 48

On demande le reſte, & 1°. les deux autres côtés,

1. Le ſinus de la demi-ſomme des angles, complem. Arithm.	0.208223
: Au ſinus de leur demi-différence	8.843742
: : La tangente de la moitié du côté A	9.897439
: A la tangente de la ½ diff. des côtés 5.° 5.′ 10″	8.949403

La demi-ſomme des côtés eſt un arc *aigu*, parce que la ſomme des angles *b* & *c* eſt un arc moindre que 180°.

2. Le coſinus de la demi-ſomme des angles, complément Arithmétique.	0.104969
: Au coſinus de leur demi-différence	9.998940
: : La tangente de la moitié de A	9.897439
: à la tangente de la ½ ſomme des côtés, 45.° 5.′ 20″	0.001348

Demi-différence	5. 5. 10
Le plus grand côté C =	50. 10. 30
Le moindre côté B =	40. 0. 10

2. Pour trouver le 3ᵉ angle *a*, je dis

1. Le rayon eſt au coſinus du côté A	9.365228
: : La tangente de l'un des deux autres angles *b*	9.833080
	9.198308

:à la cotangente d'un arc *m* = 81.° 1.′ 41″½ } *aigu* parce que A eſt aigu;
L'autre angle *c* 42. 15. 13½ } *m* étant plus grand que
Différence *n* 38. 46. 29½ } *c*, l'angle *a* ſera *obtus*.

2. Le ſinus de l'arc *m*, ſon complém. arithm.	0.005346
: Au coſinus du premier angle *b*	9.917286
: : Le ſinus de l'arc *n*	9.796756
: Au ſinus de l'angle *a obtus*; 121.° 36.′ 20.″	9.719388

V. CAS.

Deux côtés étant donnés avec un angle oppoſé à l'un des deux, trouver le reſte?

1. Pour trouver l'autre angle oppoſé à l'autre côté, on dira : comme le ſinus du côté oppoſé à l'angle donné, eſt au ſinus de cet angle; ainſi le ſinus de l'autre côté eſt au ſinus de l'angle oppoſé, *ambigu*.

2. Pour trouver le troiſième angle compris entre les deux côtés, on dira 1. Le rayon eſt au coſinus du côté oppoſé à l'angle inconnu, comme la tangente de l'angle oppoſé à l'autre côté connu, eſt à la cotangente d'un arc *m*, qui ſera de même eſpèce que le premier côté donné, ſi l'angle connu oppoſé à l'autre côté eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*.

2. La tangente du ſecond côté, eſt à la tangente du premier, comme le coſinus de *m* eſt au coſinus d'un autre arc *n*, qui ſera de même eſpèce que le ſecond côté, ſi l'angle oppoſé à ce ſecond côté eſt *aigu*, & de différente eſpèce, ſi cet angle eſt *obtus*.

L'angle compris entre les deux côtés donnés eſt égal à la ſomme ou à la différence de *m* & *n*.

3. Pour trouver le troiſième côté, on fera : 1. Le rayon eſt au coſinus de l'angle oppoſé au côté donné, comme la tangente de l'autre côté eſt à la tangente d'un arc *m*, qui ſera ſemblable au ſecond côté, ſi l'angle donné eſt

aigu, & d'une eſpèce différente, ſi cet angle eſt *obtus*.

2. Le coſinus du ſecond côté eſt au coſinus du premier, comme le coſinus de l'arc *m* eſt au coſinus d'un autre arc *n*, qui ſera ſemblable an premier côté, ſi l'angle donné eſt *aigu*, & d'une eſpèce différente, ſi cet angle eſt *obtus*.

Le troiſième côté eſt égal à la ſomme ou à la différence de *m* & *n*. Ainſi les trois ſolutions ſont *ambigues*. Mais ſi les deux côtés ſont égaux, ou, ſi l'un eſt ſupplément de l'autre, l'angle oppoſé que l'on cherche, eſt toujours ſemblable au côté qui lui eſt oppoſé.

Exemple I.

Le côté B = 40.° 0.′ 10.″ C = 50.° 10.′ 30″ l'angle *c* oppoſé au côté C = 42.° 15.′ 13″½.

1. Pour avoir l'angle *b* oppoſé à l'autre côté B, on dira:

Le ſinus du côté C, 50.° 10.′ 30.″ Son compl. arithm.	0.114637
: Au ſinus de l'angle *c* oppoſé à ce côté, 42.° 15.′ 13″½	9.827637
: : Le ſinus de l'autre côté B, 40.° 0.′ 10.″	9.808093
: Au ſinus de l'angle oppoſé *b*, 34.° 15.′ 2″¾, ou, 145.° 44.′ 57″¼	9.750367

2. Pour trouver l'angle *a* compris entre les deux côtés donnés B & C, je dis:

1. Le rayon eſt au coſinus du côté B	9.884236
: : La tangente de l'angle *c* oppoſé au côté C	9.958303
: A la cotangente d'un arc *m*, 55.° 9.′ 59″, *aigu* parce que B & *c* ſont *aigus*	9.842539
2. La tangente de l'autre côté C, complém. arithm.	9.921118
: A la tangente du premier côté B	9.923856
: : Le coſ. de l'arc *m* 55.° 9. 59″	9.756785
: Au coſ. de *n*, *aigu* 66. 26. 21, parce que C & *c* ſont *aigus*	9.601759

Angle $a = \begin{cases} n+m & 121.\ 36.\ 20 \\ \text{ou} & \\ n-m & 11.\ 16.\ 22 \end{cases}$ *Ambigu*

3. Pour trouver le 3^e^. côté A,

1. Le rayon eſt au coſinus de *c* oppoſé à C	9.869334
: : La tangente de l'autre côté B	9.923856
: A la tangente d'un arc *m*, 31.° 50.′ 46.″ *aigu* parce que B & *c* ſont *aigus*	9.793190

2. Le cosinus de B. Complément arithmétique 0.115764
: Au cosinus de C 9.806482
: : Le cosinus de l'arc m 31.° 50.′ 46″ 9.929147
: Au cos. d'un autre arc n 44. 44. 50, *aigu* parce que c & C
le sont 9.851393

Le 3e. côté A = { $m+n$ 76. 35. 36 ou $m-n$ 12. 54. 4 } *Ambigu*

Exemple. 2.

Le côté C = 50.° 10.′ 30.″ le côté A = 76.° 35.′ 36.″ l'angle c opposé à C = 42.° 15.′ 13.″ $\frac{1}{4}$ on demande le reste?

Pour l'angle a, le sinus du côté C Compl. arithm. 0.114637
: Au sinus de l'angle opposé c 9.827637
: : Le sinus du côté A 9.988001
: Au sinus de l'angle opposé a, 58.° 23.′ 40″,
Ou de son suppl. 121. 36. 20. 9.930275

2. Pour avoir l'angle b compris entre A & C
1. Le rayon est au cosinus du côté A 9.365228
: : La tangente de l'angle donné c 9.958303
: à la cotang. de m, 78.° 6.′ 19″ $\frac{1}{4}$, *aigu*, parceque c & A
sont *aigus* 9.323531

2. La tangente de l'autre côté C Compl arithm. 9.921118
: A la tangente du premier côté A 0.622773
: : Le cosinus de m, 78.° 6.′ 19″ $\frac{1}{4}$ 9.314105
: Au cosinus de n. 43. 51. 16 $\frac{1}{2}$, *aigu*, parce que C & c
sont *aigus* 9.857996
L'angle b = à la somme 121. 57. 35 $\frac{3}{4}$,
Ou à la différence 34. 15. 2 $\frac{3}{4}$ de m & n.

3. Pour le troisième côté B,
1. Le rayon est au cosinus de l'angle donné c 9.869334
: : La tangente du côté A 0.622773
: A la tangente d'un arc m. 72.° 9.′ 0″ *aigu* parce que c & A
sont *aigus* 0.492107

2. Le cosinus du côté A Compl. arith. 0.634772
: Au cosinus de l'autre côté C 9.806482
: : Le cosinus de m 72.° 9.′ 0.″ 9.486467
: Au cosinus de n 32. 8. 50, *aigu*, parce que c & C
sont *aigus* 9.927721
Le côté B = $m+n$ = 104. 17. 50, ou $m-n$ = 40.° 0.′ 10.″

Remarque.

Si l'on a deux côtés & les deux angles opposés, on trouvera plus aisément le 3^e^ côté ou le 3^e^ angle, en disant :

1. Le sinus de la demi-différence des deux angles, est au sinus de leur demi-somme, comme la tangente de la demi-différence des côtés opposés est à la tangente de la moitié du 3.^e^ côté.

2. Le sinus de la demi-différence des deux côtés donnés, est au sinus de leur demi-somme, comme la tangente de la demi-différence des angles donnés, est à la cotangente de la moitié du 3^e^ angle.

Ainsi dans le second exemple, les côtés A & C étant donnés avec l'angle *c* & ayant trouvé l'angle *a* par la 1^e^ analogie = 121.° 36.′ 20″, on aura

A =	76.°	35.′	36″
C =	50.	10.	30
Somme	126.	46.	6
Différence	26	25.	6
Demi-somme	63.	23.	3
Demi-diff.	13.	12.	33

a =	121.°	36.′	20″
c =	42.	15.	13 ½
Somme	163.	51.	33 ½
Différence	79.	21	6 ½
Demi-somme	81.	55.	46 ¾
Demi-diff.	39.	40.	33 ¼

1. Le sinus de la demi-diff. des angles	Compl. arithm.	0.194877
: Au sinus de leur demi-somme		9.995677
: : La tangente de la demi-différence des côtés		9.370544
: A la tangente de la moitié du 3.^e^ côté B, 20.° 0.′ 5.″		9.561098
Donc B est = 40. 0. 10.		

2. Le sinus de la demi-diff. des côtés	Compl. arithm.	0.641101
: Au sinus de leur demi-somme		9.951352
: : La tangente de la demi-différence des angles		9.918820
: A la cotangente de la moitié du 3^e^ angle *b*, 17.° 7.′ 31″ ¼		0.511273
Dont le double donne l'angle *b* = 34. 15 2 ½		

VI. CAS.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste ?

1. On aura le côté opposé à l'autre angle, en disant : le sinus de l'angle opposé au côté donné, est au sinus de ce côté, comme le sinus de l'autre angle est au sinus du côté qui lui est opposé, *ambigu.*

2- Pour trouver le côté compris entre les deux angles, on a ces deux analogies :

1.[e] Le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté inconnu, comme la tangente du côté donné, est à la tangente d'un arc *m*, qui sera semblable à cet angle, si le côté donné est *aigu*, & différent, s'il est *obtus.*

2.[e] La tangente de l'angle opposé au côté donné, est à la tangente de l'autre angle donné, comme le sinus de l'arc *m*, est au sinus d'un autre arc *n*, *ambigu.*

Le côté compris entre les deux angles est égal à la somme des deux arcs *m* & *n*, si les angles donnés sont de même espèce, & à leur différence, s'ils sont de différente espèce.

3. Pour le 3[e] angle, on dira : 1. Le rayon est au cosinus du côté donné, comme la tangente de l'angle qui n'est pas opposé à ce côté, est à la cotangente d'un arc *m*, qui sera semblable à cet angle, si le côté donné est *aigu*, & différent, s'il est *obtus.*

2. Le cosinus de ce même angle, est au cosinus de l'autre, comme le sinus de *m* est au sinus de *n*, *ambigu.*

Le 3.[e] angle est égal à la somme de *m* & *n* si les deux angles donnés sont de même espèce, & à leur différence, s'ils sont de différente espèce.

Exemple. I.

L'angle *b* est = 34.° 15.′ 2″. $\frac{3}{4}$. l'angle *c* = 42.° 15.′ 13″ $\frac{1}{4}$. Le côté B opposé à l'angle *b* est = 40.° 0.′ 10.″ trouver le reste ?

1. Pour le côté C opposé à *c*,

Le sinus de *b*	Compl. arithm.	0.249634
: Au sinus du côté B		9.808093
: : Le sinus de l'autre angle *c*		9.827637
: Au sinus du côté C opposé à *c*, 50.° 10.′ 30″, ou son suppl. 129.° 49.′ 30.″		9.885364

2. Pour avoir le côté A on dira :

1. Le Rayon eſt au coſinus de l'angle *c* oppoſé à C	9.869334
: : La tangente du côté donné B	9.923856
: A la tangente d'un arc *m*, 31.° 50.′ 46″, *aigu* parce que C eſt *aigu*	9.793190
2. La tangente de *b* oppoſé au côté connu B. compl arithm.	0.166920
: A la tangente de l'autre angle *c*	9.958303
: : Le ſinus de l'arc *m*	9.722337
: Au ſinus de *n*, *ambigu* 44.° 44.′ 50″, ou 135.° 15.′ 10.″	9.847560

Le côté requis A eſt la ſomme 76.° 35.′ 36″, ou 167.° 5.′ 56.″ s'il doit être *obtus*.

3. Pour le 3^e^ angle

1. Le rayon eſt au coſinus du côté B	9.884236
: : La tangente de l'angle *c*	9.958303
: A la cotangente d'un arc *m*, 55.° 9.′ 59″, *aigu* parceque B & *c* ſont *aigus*.	9.842539
2. Le coſinus de l'angle *c* Compl arithm.	0.130666
: Au coſinus de l'autre angle *b*	9.917286
: : Le ſinus de *m* 55.° 9.′ 59.″	9.914245
: Au ſinus de *n ambigu*, 66°. 26.′ 21″, ou, 113.° 33.′ 39.″	9.962197

Le 3^e^ angle *a* eſt donc 121.° 36.′ 20″, ou 168.° 43.′ 38.″

Exemple 2.

L'angle *a* eſt = 121.° 36.′ 20.″ L'angle *c* = 42.° 15.′ 13″ ½. Le côté A = 76.° 35.′ 36.″

1. Pour trouver le côté C,

Le ſinus de l'angle *a* Compl. arithm.	0.069726
: Au ſinus du côté oppoſé A	9,988001
: : Le ſinus de l'autre angle *c*	9.827637
: au ſinus du côté oppoſé C, 50.° 10′ 30″ ou 129.° 49.′ 30″	9.885364

2. Pour le côté compris B.

1. Le rayon eſt au coſinus de l'angle *c*	9.869334
: : La tangente du côté donné A	0.622773
: A la tangente d'un arc *m*, 72.° 9.′ 0″, *aigu* parceque *c* & A ſont *aigus*.	0.492107
2. La tangente de l'autre angle *a* compl. arithm.	9.789114
: A la tangente de l'angle *c*	9.958303
: : Le ſinus de l'arc *m*	9.978574
: Au ſinus d'un arc *n* 32.° 8.′ 50″ ou 147.° 51.′ 10.″	9.725991

Le côté B eſt la différence $m - n$, 40.° 0.′ 10″, ou $n - m$ 75.° 42.′ 10.″

3. Pour le 3ᵉ. angle b,

1. Le rayon eſt au coſinus du côté donné A		9.365218
: : La tangente de l'angle c oppoſé à l'autre côté C		9.958303
: A la cot. d'un arc m, 78.° 6.′ 19.″ *aigu* parce que A & c ſont *aigus.*		9.323531
2. Le coſinus de l'angle c	Compl. arithm.	0.130666
: Au coſinus de l'autre angle a		9.719388
: : Le ſinus de m		9.990573
: Au ſinus de n, *ambigu*, 43.° 51.′ 16″ $\frac{1}{2}$, ou 136.° 8.′ 43″ $\frac{1}{2}$		9.840627

L'angle b eſt la différence $m - n$, 34.° 15.′ 2″ $\frac{1}{2}$, ou $n - m$ 58.° 2.′ 24″ $\frac{1}{2}$, parce que a & c ſont de différente eſpèce.

On voit que dans les Exemples nous nous ſommes fixés au même triangle, comme dans la Trigonométrie rectangle, afin que l'accord des différentes ſolutions ſervit en quelque ſorte de démonſtration de l'exactitude des méthodes propoſées.

ASTRONOMIE DES MARINS.

CHAPITRE I.

Définitions Astronomiques, ou abrégé de la Sphère céleste.

I. On peut regarder le Ciel comme le concave ou l'intérieur de la surface d'un globe immense, au centre duquel la terre est placée. Tous les Astres paroissent tourner autour de l'un des diamètres de ce globe, nommé pour cette raison l'*axe du Monde*. Les deux extrémités de l'axe se nomment *poles du Monde*. Celui que nous voyons en Europe, se nomme *pole Nord* ou *pole arctique* ; on le connoit par le moyen d'une étoile qui décrit chaque jour un très petit cercle autour de ce pole. C'est la seule qui, à la vue simple, paroit immobile du côté du nord ; on la nomme *Etoile polaire*, ou, *Etoile du Nord*.

L'Etoile polaire A (fig. 10) n'est éloignée du pole nord que de deux degrés. On la reconnoit aisément par le moyen de sept belles étoiles, qui forment la grande Ourse ou le grand Chariot, dont quatre E, D, F, G, disposées en quarré, sont au corps, & les trois autres à la queüe, Fig. 10.

Si l'on imagine une ligne droite par les deux qui ſont les plus éloignées, D, E, elle ira raſer l'étoile du nord A. Les Marins nomment ces deux étoiles, D, E, les *deux gardes de la grande Ourſe ;* & celle qui eſt à l'épaule de la petite Ourſe B, ou la cinquième depuis le pole, ſe nomme *claire des gardes.* Si la grande Ourſe eſt en deſſous du pole au commencement de la nuit, elle ſera en-deſſus douze heures après ; & la ligne menée de ſes deux gardes en montant ou en deſcendant rencontrera toujours l'étoile polaire, qui eſt à la queüe de la petite Ourſe.

Le pole oppoſé au pole nord n'eſt pas viſible en Europe. Il ſe nomme *Pole Sud* ou pole *antarctique ;* on n'y voit aucune étoile qui paroiſſe immobile, mais on le détermine par le moyen des étoiles voiſines qui décrivent autour de ce pole un cercle plus petit, que celui qui paroit être parcouru par les étoiles qui en ſont plus éloignées.

La partie de l'axe du Monde qui traverſe la terre, & que l'on ſuppoſe paſſer par ſon centre, ſe nomme l'*axe de la terre.* Les poles de la terre ſont les extrémités de ſon axe.

Le mouvement que les aſtres paroiſſent avoir autour de l'axe du monde, ſe nomme *mouvement diurne* ou *journalier.* Les cercles qu'ils paroiſſent décrire par ce mouvement, ſe nomment *parallèles ;* ils ſont tous en effet ſenſiblement parallèles entr'eux.

L'*Equateur* eſt au milieu de tous les parallèles. C'eſt un grand cercle, qui dans tous les points de ſa circonférence eſt égalemeut éloigné des deux poles du monde. On le nomme auſſi *cerclè équinoxial ;* parce que dans tous les païs du monde, excepté aux deux poles de la terre, le jour eſt égal à la nuit, lorſque le ſoleil paroît décrire ce grand cercle.

L'Equateur eſt un *grand cercle*, & tous les parallèles ſont de *petits cercles ;* parce que l'équateur paſſe par le centre du monde, & que les parallèles ne paſſent pas par le même centre. En effet ſi l'on coupe une boule par ſon centre, on forme un plus grand cercle, qu'on ne le fait, lorſqu'on

lorsqu'on la coupe hors de son centre. Par où l'on voit que tous les grands cercles qui partagent l'univers, sont égaux entr'eux. Car ils ne sont grands cercles, qu'autant que leurs plans passent par le centre du monde & qu'ils en coupent le globe en deux parties égales; ce que ne font pas les parallèles aux grands cercles, qui coupent toujours le monde en deux parties inégales.

L'*Equateur terrestre* est une partie de l'équateur céleste; sa circonférence se nomme ordinairement la *ligne équinoxiale*, ou simplement la *Ligne*. C'est un grand cercle du globe de la terre, qui dans tous les points de sa circonférence est également éloigné des deux poles de la terre.

II. On appelle *Zénith* le point du Ciel le plus élevé, on nomme *Nadir* le point qui est diamétralement opposé, & qui nous est invisible.

L'*Horison* est un grand cercle, qui dans tous les points de sa circonférence est également éloigné du Zénith & du Nadir.

Lorsqu'un astre commence à paroître à l'horison, on dit qu'il se *leve*; lorsqu'il se cache sous l'horison, il se *couche*.

Tous les cercles parallèles à l'horison, se nomment *Almicantaraths*. L'horison sensible est un *almicantarath*, dont le centre est à notre œil.

Tous les grands cercles perpendiculaires à l'horison se nomment *Azymuths*, ou *cercles verticaux*; ils se coupent tous au Zénith & au Nadir.

III. Le *Méridien* est un grand cercle, qui passe par les deux poles du monde, par le Zénith & par le Nadir de chaque païs. On le nomme *Méridien*, parce qu'il est midi lorsque le soleil arrive à la partie supérieure de ce cercle, c'est-à-dire, que c'est alors le milieu du jour. En effet le soleil, en vertu de son mouvement journalier, emploie autant de tems depuis son lever jusqu'au moment de son passage par le méridien, qu'il en emploie depuis le Méridien jusqu'à son coucher.

Tous les Méridiens se coupent aux deux poles du

monde. Ainsi ils sont tous perpendiculaires à l'Equateur & aux parallèles.

Le Méridien est aussi perpendiculaire à l'horison ; puisqu'il passe par le Zénith & par le Nadir, qui sont les poles de l'horison. Il coupe la circonférence de l'horison en deux points opposés, qu'on appelle *Nord* & *Sud*. Le Nord est du côté du pole arctique, & le Sud du côté du pole antarctique.

L'Equateur coupe aussi la circonfétence de l'horison en deux points opposés, qu'on appelle *Est* & *Ouest*. Ces deux points sont chacun également éloignés du Nord & du Sud. L'*Est* est du côté où les Astres se levent, & l'*Ouest* du côté où ils se couchent.

L'Est & l'Ouest sont les deux poles du Méridien. Le Nord & le Sud sont les deux poles du *premier vertical*, qui passe par le Zénith, & par les points d'Est & d'Ouest.

Fig. 11. Si le cercle HEZPOQN*p* (fig. 11.) représente le Méridien qui passe par le Zénith Z, par le Nadir N, & par les poles P & *p* du monde ; Z N sera l'axe de l'horison, H O perpendiculaire à Z N sera l'un des diamètres de l'horison ; H le Sud, si *p* est le pole Sud ; & O le Nord, si P est le pole Nord ; E Q perpendiculaire à l'axe du monde P*p*, sera l'un des diamètres de l'Equateur ; AB parallèle à EQ, sera le diamètre d'un parallèle à l'Equateur ; D F parallèle à l'horison, sera le diamètre d'un almicantarath. Z G N sera un azymuth. Si ce cercle est perpendiculaire au Méridien, on le nommera *premier vertical*. La terre est représentée par le petit cercle dont C est le centre commun à tous les grands cercles, & I le point le plus élevé de sa circonférence, par où passe l'axe Z N de l'horison.

IV. On appelle *Latitude* l'éloignement du zénith à l'Equateur, ou l'arc du Méridien compris entre le Zénith & l'Equateur. Ainsi l'arc E Z est la latitude du point I de la terre, dont Z est le Zénith.

La *hauteur du pole* est l'arc du Méridien compris entre le pole & l'horison. Ainsi H O étant l'horison du point I,

PO est la hauteur du pole par rapport à ce point ; & HP est la hauteur du pole par rapport au point K de la terre directement opposé au point I. Ces deux hauteurs du pole sont égales ; mais elles ont des noms différens : l'une est la hauteur du pole Nord, & l'autre est la hauteur du pole Sud. De même les Latitudes ZE, NQ, des points de la terre opposés I & K, sont égales ; mais l'une se nomme *Latitude Nord*, & l'autre *Latitude Sud*.

La Latitude Nord ou Sud est toujours égale à la hauteur du pole, parce qu'elles sont toutes deux complémens de la distance du pole au Zénith. Ainsi ZE est complément de ZP, & PO de PZ ; NQ & H*p* sont de même complémens de *p*N. De-là vient que l'on prend souvent la Latitude pour la hauteur du pole, quoique ce soient deux quantités fort différentes.

Les païs qui sont sous l'Equateur, ou dans le plan de l'Equateur, comme I & M, n'ont point de Latitude, puisque leur Zénith & leur Nadir E & Q sont dans l'Equateur. Ceux qui sont sous un parallèle éloigné de l'Equateur, c'est-à-dire, dont le Zénith est dans la circonférence de ce parallèle, ont une latitude égale & semblable à la distance de ce parallèle à l'Equateur.

La distance d'un parallèle ou d'un astre à l'Equateur se nomme *Déclinaison* d'un astre ou d'un parallèle. Ainsi l'arc du Méridien AE égal à l'arc BQ, est la Déclinaison du parallèle AB, ou de tous les astres qui sont dans ce parallèle. La Déclinaison est *Nord* pour tous les astres & pour tous les parallèles qui sont entre l'Equateur & le pole Nord ; elle est *Sud* pour tous les astres & pour tous les parallèles qui sont entre l'Equateur & le pole Sud. Ainsi supposé que P soit le pole Nord, la déclinaison AE ou BQ de tous les astres qui sont dans le parallèle AB, se nomme déclinaison *Nord*, ou déclinaison *Boréale*, ou *Septentrionale*. Si P étoit le pole Sud, cette déclinaison seroit *Sud*, ou déclinaison *Australe*, ou enfin déclinaison *Méridionale*. Ce sont les divers noms qu'on a donnés à ces deux espèces de déclinaisons.

Il en est de même de la latitude. Tous les païs dont le Zénith est entre l'équateur & le pole Nord, ont une *latitude Nord;* tous ceux dont le Zénith est entre l'équateur & le pole Sud, ont une *latitude Sud.*

Tous les païs qui sont sous le même parallèle, ont la même latitude; puisque leurs Zéniths étant tous dans ce parallèle, leur latitude est égale & semblable à la déclinaison de ce parallèle.

On appelle *différence en latitude*, ou *en déclinaison*, l'éloignement de deux parallèles, ou l'arc du Méridien compris entre ces deux parallèles. Si les deux parallèles sont du même côté par rapport à l'équateur, tous deux au Nord, ou tous deux au Sud, on aura la différence en latitude, ou en déclinaison, en retranchant la moindre latitude ou la moindre déclinaison de la plus grande; & si l'un des deux parallèles est au Nord & l'autre au Sud, on ajoutera les deux déclinaisons, ou les deux latitudes ensemble, pour avoir la différence en latitude, ou en déclinaison, ou la distance des deux parallèles.

Fig. 12. Ainsi P (fig. 12.) étant le pole Nord, *p* le pole Sud, E Q l'équateur, A B, C D, F G, trois parallèles à l'Equateur, la différence en déclinaison de deux parallèles A B, C D, placés au Nord, entre le pole Nord P & l'équateur E Q, sera la distance C A, ou D B de ces deux parallèles; & on la trouvera, en retranchant de la plus grande déclinaison A E ou B Q, la moindre déclinaison C E ou D Q. Mais si l'un des parallèles C D est au Nord entre le pole Nord P & l'Equateur E Q, & que l'autre F G soit au Sud, entre le pole Sud *p* & l'équateur E Q, la différence en déclinaison de ces deux parallèles CD, FG sera bien l'arc CF ou DG du Méridien qui mesure leur distance; mais pour la déterminer, il faudra ajouter à la déclinaison Nord E C, ou D Q, la déclinaison Sud E F, ou Q G.

V. La *Longitude* est l'éloignement du premier Méridien au Méridien du lieu où l'on est. C'est l'arc de l'équateur compris entre ces deux méridiens. Cet arc mesure l'angle

que les deux Méridiens forment ensemble aux poles du monde. Les arcs des parallèles à l'Equateur, compris entre les deux Méridiens, peuvent aussi mesurer la Longitude, quoiqu'ils soient inégaux entr'eux; parcequ'ils comprennent tous le même nombre de degrés. C'est ainsi qu'on peut mesurer un angle rectiligne par un arc de cercle quelconque, pourvû qu'il soit compris entre les deux lignes qui forment cet angle, & que son centre soit à la pointe de l'angle.

On appelle *premier Méridien*, celui par où l'on commence à mesurer l'éloignement des autres; ce qui est fort arbitraire. Les François prenoient autrefois pour premier Méridien, celui qui passe par le Zénith de l'*Isle de Fer*, la plus occidentale des Canaries. Ils prennent aujourd'hui pour premier Méridien, celui qui passe par le Zénith de l'observatoire de Paris. Le premier Méridien des Anglois, est celui de Londres; celui des Hollandois est le Méridien du pic de Teneriffe.

Tous les païs qui sont sous le même demi-méridien d'un pole à l'autre, ont la même Longitude. La différence en Longitude, est l'éloignement de deux demi-méridiens, ou l'arc de l'équateur compris entre ces deux demi-méridiens.

On comptoit autrefois la Longitude de l'Ouest à l'Est, & on l'augmentoit jusqu'à 360.° On distingue aujourd'hui deux sortes de Longitudes, l'une qui va de l'Ouest à l'Est, & l'autre de l'Est à l'Ouest; l'une & l'autre se compte jusques à 180.° où elles se rencontrent.

Les *cercles horaires* sont les méridiens que les Astres traversent dans leur mouvement diurne. Ils ne sont qu'un instant dans chaque Méridien.

VI. Le mouvement diurne est commun à tous les Astres. Ce mouvement les porte directement de l'Est à l'Ouest, & leur fait décrire à chacun un parallèle à l'équateur dans l'espace de 23 heures 56.′ 4.″ Le soleil est entraîné par ce mouvement autour de l'axe du monde; mais il a encore un mouvement propre, qui est presque opposé au mouvement commun, & qui le porte de l'Ouest à l'Est un peu

obliquement. Ce mouvement lui fait décrire dans un an un grand cercle, qu'on nomme *Ecliptique*.

Ces deux mouvemens ne ſont pas incompatibles. Un Vaiſſeau peut fort bien courir de l'Eſt à l'Oueſt, tandis qu'un homme ſe meut librement de la prouë à la poupe, ou de l'Oueſt à l'Eſt. Cet homme aura deux mouvemens, le mouvement commun à toutes les parties du Vaiſſeau, qui le porte de l'Eſt à l'Oueſt, & le mouvement libre qui lui eſt propre. C'eſt ainſi que le ſoleil eſt entraîné de l'Eſt à l'Oueſt par le mouvement diurne du Ciel, & que ce mouvement ne l'empêche pas de s'avancer du côté de l'Eſt ſur la circonférence de l'Ecliptique, qui eſt oblique à l'Equateur.

On a trouvé par différentes obſervations, que l'obliquité de l'Ecliptique eſt aujourd'hui de 23.° 28.′ 20.″, un peu moindre qu'elle n'étoit dans le ſiécle paſſé, c'eſt-à-dire, que l'Ecliptique fait avec l'Equateur un angle de 23.° 28.′ 20.″

L'Ecliptique coupe l'équateur en deux points oppoſés, que l'on nomme *points des Equinoxes*. Il faut regarder l'Ecliptique comme un cercle mobile, qui eſt entraîné par le mouvement diurne autour de l'axe du Monde. Chaque point de l'Ecliptique décrit tous les jours ou l'Equateur, ou un parallèle à l'Equateur. Les deux points des équinoxes décrivent tous les jours l'Equateur.

On appelle *Tropiques* les deux parallèles décrits par les points de l'Ecliptique les plus éloignés de l'Equateur. Ils en ſont éloignés de 23°. 28.′ 20.″ Ils touchent l'écliptique en deux points oppoſés, qu'on nomme *points des Solſtices*. Le Tropique qui eſt entre l'équateur & le pole Nord, ſe nomme *Tropique* du *Cancer*, ou *de l'Ecreviſſe*; celui qui eſt entre l'équateur & le pole Sud, ſe nomme *Tropique du Capricorne*.

On diviſe l'écliptique en douze parties égales, qu'on appelle *Signes*; on leur donne les noms & les caractères ſuivans.

0 Le Belier	♈	0°	4 Le Lion	♌	120°	8. Le Sagittaire	♐	240°
1 Le Taureau	♉	30°	5 La Vierge	♍	150°	9 Le Capricorne	♑	270°
2 Les Gemeaux	♊	60°	6 La Balance	♎	180°	10 Le Verſeau	♒	300°
3 L'Ecreviſſe	♋	90°	7 Le Scorpion	♏	210°	11 Les Poiſſons	♓	330°

On voit que chacun de ces ſignes renferme 30.° de l'écliptique. L'Ecreviſſe, ou troiſiéme ſigne commence au point de l'écliptique le plus éloigné de l'équateur du côté du Nord; c'eſt pour cela que le Tropique qui paſſe par ce point de l'écliptique, ſe nomme *Tropique du Cancer*, ou *de l'Ecreviſſe*. Le Capricorne, ou 9^e^. ſigne commence au point de l'écliptique le plus éloigné de l'équateur du côté du Sud; c'eſt par ce point que paſſe le *Tropique du Capricorne*.

Le Soleil ſe trouve au commencement du Capricorne environ le 22. du mois de Décembre ; c'eſt ce qu'on appelle en Europe le *Solſtice d'hyver*. Enſuite s'avançant du côté de l'Eſt, il ſe trouve trois mois après, c'eſt-à-dire, le 21 du mois de Mars, au commencement du Belier. C'eſt un des points où l'écliptique coupe l'équateur. Nou le nommons *Equinoxe du Printems*. Le 22. Juin il ſe trouve au commencement de l'Ecreviſſe, ou au *Solſtice d'Eté*; & le 22 Septembre au commencement de la Balance, où l'écliptique coupe l'équateur ; nous le nommons *Equinoxe d'Automne*. Par où l'on voit que le Soleil parcourt tous les mois un ſigne, & tous les jours preſque un degré de l'Ecliptique.

On a trouvé par un grand nombre d'obſervations, que le ſoleil parcouroit toute l'écliptique en 365 jours, 5 heures, 49 minutes. Ces 5 heures, 49', au bout de 4 ans font preſque un jour. De-là vient que les années communes ſont de 365 jours, & que les années biſſextiles de 4 en 4 ans, ſont de 366 jours. Ce que l'on a ainſi reglé, pour faire enſorte que le ſoleil ſe trouvât toutes les années dans le même jour, autant qu'il ſe pourroit, au même degré de l'écliptique.

On appelle *Lieu du Soleil*, le point de l'écliptique où ſe trouve le ſoleil dans un tems donné.

La *Longitude du Soleil* eſt l'arc de l'écliptique que le Soleil a parcouru depuis le moment où il étoit au premier point du Bélier. On la compte toujours de l'Oueſt à l'Eſt ; ce qui n'a rien de commun avec la longitude d'un point de la terre.

L'Ecliptique faiſant tous les jours ſa révolution autour

de l'axe du Monde, ſes deux poles ſuivent la même impreſſion. Ils décrivent autour des deux poles du monde, la circonférence de deux petits cercles parallèles à l'équateur, qu'on nomme *cercles polaires.* Ils ſont éloignés des poles du monde de 23.° 28.′ 20.″

L'Axe de l'écliptique décrit auſſi, par ſon mouvement diurne, deux petits cercles ſur la ſurface de la terre, qu'on nomme *cercles polaires terreſtres.* Les deux tropiques & les deux cercles polaires diviſent la terre en cinq parties, qu'on appelle *Zones.* Les deux zones *froides* ſont compriſes chacune entre le pole & le cercle polaire voiſin. Les deux zones *tempérées* ſont entre les cercles polaires & les tropiques. La zone *torride* eſt entre les deux tropiques.

VII. Les *Etoiles fixes* ſont celles qui gardent toûjours la même ſituation les unes à l'égard des autres. Elles ſont entraînées par le mouvement commun autour de l'axe du monde. Mais ce mouvement eſt retardé par un autre mouvement qui leur eſt auſſi commun, & qui les porte de l'Oueſt à l'Eſt autour de l'axe de l'écliptique. Ce mouvement eſt preſque imperceptible; car elles n'avancent vers l'Eſt que de 50 ſecondes dans un an.

On appelle *Conſtellation* un amas de pluſieurs étoiles fixes. Les douze Conſtellations qui ſont autour de l'écliptique, ſont compriſes dans un eſpace qu'on nomme *Zodiaque.* C'eſt un anneau diviſé en deux parties égales dans ſa largeur par la circonférence de l'écliptique. Il eſt large de 16 degrés.

Chacune de ces douze conſtellations s'appelle auſſi *Signe du Zodiaque*; parce que autrefois chacune d'elles repondoit à l'une des douze diviſions de l'écliptique. Par exemple, la conſtellation du Bélier étoit renfermée dans les 30 premiers degrés de l'écliptique; celle du Taureau dans les 30 degrés qui ſuivent à l'Eſt, & ainſi de ſuite. Mais depuis deux mille ans les étoiles s'étant peu-à-peu avancées vers l'Eſt, la conſtellation du Bélier ſe trouve aujourd'hui ſous la ſeconde diviſion de l'écliptique, dans le taureau; celle du Taureau eſt dans les Gemeaux, & ainſi des autres.

Les *Planètes* sont des Astres qui ne gardent pas toûjours la même situation les uns à l'égard des autres. Elles sont entraînées par le mouvement commun autour de l'axe du monde ; & elles ont un mouvement propre qui les fait tourner chacune autour d'un axe différent de celui de l'écliptique. Leur plus grand éloignement de l'écliptique n'excéde pas 8 degrés au Nord ou au Sud. C'est pour cela que le Zodiaque n'a que 16 degrés de largeur ; car les Planètes ne s'écartent pas du Zodiaque. Les sept principales Planètes sont, *Saturne*, *Jupiter*, *Mars*, le *Soleil*, *Mercure*, *Venus* & la *Lune*.

On appelle *Latitude* d'une étoile, ou d'une planète, son éloignement de l'écliptique. Le *lieu* de l'étoile *réduit à l'écliptique*, est le point de l'écliptique le plus proche de cette étoile. On le détermine par un arc de grand cercle, qui passe par le centre de l'étoile & par les deux poles de l'écliptique, & qui par conséquent est perpendiculaire à l'écliptique. L'arc de l'écliptique compris entre le premier point du bélier & le *lieu* de l'étoile réduit à l'écliptique, en comptant de l'Ouest à l'Est, se nomme la *Longitude* de cette étoile. Il en est de même de la longitude des planètes, & du lieu des planètes réduit à l'écliptique. Ces grands cercles perpendiculaires à l'écliptique, se nomment *cercles de longitude* ou *de latitude*; parce qu'ils déterminent la longitude & la latitude des planètes & des étoiles.

VIII. Les méridiens qui suivent le mouvement diurne des astres, se nomment *cercles de déclinaison*; parce qu'ils mesurent la déclinaison des astres, ou leur distance à l'équateur. Ils différent des autres méridiens, en ce qu'ils sont mobiles & qu'ils passent par le centre des astres dont ils déterminent la déclinaison ; au lieu que les méridiens, dont nous avons parlé ci-devant, sont fixes & passent par les divers Zéniths de chaque païs. Les uns & les autres se coupent mutuellement aux deux poles du monde. Parmi les cercles de déclinaison ; celui qui passe par les deux points des équinoxes, se nomme *Colure des équinoxes*.. C'est par mégarde qu'un sçavant Astronome a dit que le *Colure des*

équinoxes passe par les *poles de l'écliptique* & par l'intersection de l'écliptique avec l'équateur. Il a voulu dire par les *poles du monde.* Les méprises des sçavans peuvent tirer à conséquence pour les commençans. Le cercle de déclinaison qui passe par les deux points des solstices se nomme *colure des solstices.* Celui-ci passe en même tems par les deux poles du monde, & par les deux poles de l'écliptique.

Fig. 13. Le grand cercle de la (fig. 13) représente le colure des solstices, qui passe par les poles P & *p* de l'équateur E Q, par les deux poles ♊ & ♐ de l'écliptique ♋. ♑. Nous avons représenté les autres cercles perpendiculaires au plan du colure des solstices par des lignes droites, qui sont en même tems les diamètres de ces cercles. Le diamètre P *p* représente le colure des équinoxes, qui passe par les deux poles P & *p* du monde, & par les points des équinoxes ♈, ♎ qui ne paroissent ici qu'un seul point confondu avec le centre. Le diamètre ♊ ♐ représente le cercle de latitude qui passe par les deux poles ♊, ♐ de l'écliptique, & par les deux points ♈, ♎ des équinoxes; il représente en même tems l'axe ♊ ♐ de l'écliptique. Tous les astres qui sont dans la demi-circonférence de ce cercle du côté du bélier, n'ont point de longitude; & tous ceux qui sont dans la demi-circonférence du côté de la balance, ont 180.° ou 6 signes de longitude. Ce qui n'empêche pas qu'ils n'aient beaucoup de latitude & de déclinaison, s'ils sont fort éloignés de l'écliptique & de l'équateur. C'est ainsi que le pole Nord ♊ de l'écliptique, qui est dans ce cercle, a 90.° de latitude, & 66.° 31.′ 40″ de déclinaison, mesurée par l'arc ♊ Q du colure des solstices; cet arc étant complément de la distance P ♊ des poles P & ♊, qui est de 23.° 28.′ 20″ égale à l'obliquité Q ♑, E ♋ de l'écliptique.

Les lignes A ♊, & *a* ♐ parallèles à l'équateur EQ, représentent les deux cercles polaires, qui passent par les poles ♊, ♐ de l'écliptique, & qui sont perpendiculaires aux colures. La ligne C ♋ parallèle à l'équateur représente

le tropique du cancer qui passe par le solstice d'été ♋, & qui est perpendiculaire aux deux colures ; par la même raison la ligne D ♑ représente le tropique du capricorne.

L'Anneau Z O X V large de 16° représente le Zodiaque. Les parallèles à l'écliptique, comme AR, OX, ZV, sont aussi représentés par des lignes droites. Les autres grands cercles, comme Π S ϖ, PT *p* sont représentés par des ellipses ou ovales.

On comprendra mieux tout ce que nous venons de dire, si l'on a devant les yeux une sphère armillaire, ou un globe céleste. Ces instrumens sont assez connus, sans qu'il soit nécessaire d'en donner ici une description.

IX. *L'Ascension droite* d'un astre est l'arc de l'équateur compris entre la moitié du colure des équinoxes P *p* qui passe par le premier point ♈ du bélier, & le cercle de déclinaison où se trouve l'astre. On la compte de l'Ouest à l'Est jusques à 360°. Ainsi tous les astres qui sont sur cette moitié du colure des équinoxes qui passe d'un pole à l'autre par le premier point du bélier, n'ont point d'ascension droite. Mais ceux qui sont sur l'autre moitié du colure, ont 180° d'ascension droite.

Par où l'on voit que la longitude d'un point de la terre ne différe de l'ascension droite d'un astre, qu'en ce que sur la terre on prend pour premier Méridien celui de l'Isle de Fer, ou de l'Observatoire de Paris, ou tout autre à volonté, & que dans le Ciel on prend pour premier méridien le demi-colure des équinoxes qui passe par le premier point du bélier. On pourroit prendre le colure des solstices, & on n'a à choisir qu'entre ces deux cercles.

L'Ascension droite se mesure aussi par la valeur des angles sphériques, qui se forment aux poles du monde entre le colure des équinoxes & le cercle de déclinaison où l'astre se trouve. On ne doit pas confondre ces angles avec les angles horaires, qui sont des angles immobiles formés par le Méridien du lieu où l'on est, & par divers autres Méridiens fixes.

L'Ascension droite a néanmoins beaucoup de rapport

à ces angles horaires ; elle ſert à faire connoître l'heure du paſſage des étoiles ou des planètes par le méridien. Il faut pour cela prendre la différence d'aſcenſion droite entre le ſoleil & l'étoile, cette différence ſera l'éloignement horaire de l'étoile au ſoleil, en changeant les degrés, minutes & ſecondes de cet angle, en heures, minutes & ſecondes, à raiſon de 15 degrés pour une heure, de 15 minutes de degré pour une minute de tems, & de 15 ſecondes de degré pour une ſeconde de tems. On aura par ce moyen l'eſpace de tems compris entre le paſſage du ſoleil & celui de l'étoile par le Méridien. Si l'aſcenſion droite du ſoleil eſt plus grande que celle de l'étoile, c'eſt-à-dire, ſi le ſoleil eſt plus à l'Eſt, l'étoile paſſera par le Méridien avant le ſoleil ; ſi l'aſcenſion droite du ſoleil eſt plus petite que celle de l'étoile, le ſoleil ſera plus occidental, & l'étoile paſſera par le Méridien après le ſoleil. Ainſi l'angle horaire qu'on aura trouvé, déterminera le tems du paſſage de l'étoile par le Méridien. Les étoiles qui ne ſe couchent jamais, ou qui ſont auprès du pole viſible paroiſſent deux fois chaque jour au Méridien, ſçavoir une fois dans la partie du Méridien qui eſt au deſſus du pole, & 12 heures après dans la partie du Méridien qui eſt au deſſous du pole. Elles ont auſſi deux hauteurs méridiennes, l'une ſupérieure & l'autre inférieure.

X. On appelle *Azimuth*, ou *angle Azimuthal*, l'angle formé au Zénith par le Méridien & par le cercle vertical dans lequel un aſtre ſe trouve, ou ce qui revient au même, c'eſt l'arc de l'horiſon ou d'un Almicantarath, compris entre le Méridien & l'Azimuth qui paſſe par le centre d'un aſtre.

On appelle *Amplitude Ortive* ou *Occaſe*, l'éloignement d'un aſtre au point d'Eſt lorſqu'il ſe leve, ou au point d'Oueſt lorſqu'il ſe couche. C'eſt l'arc de l'horiſon compris entre le centre de l'aſtre, & le point d'Eſt ou d'Oueſt. Par où l'on voit que l'amplitude eſt le complément de l'angle azimuthal.

Le ſoleil change tous les jours d'amplitude ; parcequ'en

s'éloignant, ou en s'approchant tous les jours de l'équateur, il s'éloigne par conséquent, ou il s'approche des points d'Est ou d'Oueſt qui ſont les points où l'équateur coupe l'horiſon.

L'Amplitude eſt *Nord* pour les aſtres qui ſont entre l'équateur & le pole Nord; elle eſt *Sud* pour ceux qui ſont entre l'équateur & le pole Sud.

Si l'on conſidére pendant la nuit le mouvement des étoiles, on les verra toutes tourner autour des poles du monde. On en verra quelques-unes faire un très-grand tour, pendant que d'autres font un très petit tour. Celles qui font un grand tour, décrivent ou l'équateur, ou un parallèle fort proche de l'équateur. Celles qui paſſent par notre Zénith, décrivent le parallèle ſous lequel nous ſommes placés. Celles qui font un très petit tour, décrivent un parallèle fort éloigné de l'équateur, ou fort proche du pole. On s'appercevra auſſi que les étoiles s'élevent au deſſus de l'horiſon depuis leur lever juſqu'à un certain point, & qu'enſuite elles deſcendent. Tous les points où elles ſe trouvent dans leur plus grande hauteur, appartiennent à notre Méridien. On reconnoîtra plus aiſément le Méridien pendant le jour, puiſque le Soleil s'y trouve tous les jours à midi.

CHAPITRE II.

Élémens de Chronologie.

LA connoiſſance des tems ſe nomme *Chronologie.* Le tems abſolu eſt toûjours égal à lui-même & uniforme. Le tems rélatif, apparent & vulgaire, varie ſelon les termes de comparaiſon.

Le tems abſolu ſe meſure par le mouvement uniforme de quelque corps, par exemple, de la terre, dont le mouvement autour de ſon axe eſt cenſé uniforme.

Le tems rélatif ou apparent eſt composé d'années, de mois, de ſemaines, de jours, d'heures & de minutes, ſecondes, tierces, &c.

Il y a des heures égales & des heures inégales. Les heures égales sont chacune la 24^e partie du jour naturel, c'est-à-dire, du tems que le Soleil emploie à revenir au même Méridien.

Les heures inégales sont la 24^e partie du jour artificiel, ou du tems que le Soleil emploie depuis son lever jusqu'à son coucher ou depuis son coucher jusqu'à son lever.

Ces heures ont été autrefois en usage chez les Juifs & les Romains. Elles le sont encore aujourd'hui chez les Turcs. On les appelle aussi, *heures Planétaires*; parce que les Anciens s'imaginoient que les sept Planètes présidoient successivement à chaque heure du jour & de la nuit. Le Soleil, selon eux, présidoit à la première heure du Dimanche, qu'ils appelloient le *jour du Soleil*, *Venus* à la seconde, *Mercure* à la troisième, & ensuite la *Lune*, *Saturne*, *Jupiter* & *Mars*; de sorte qu'au bout de 24 heures, les sept Planètes ayant présidé chacune trois fois, le Soleil, Venus & Mercure avoient présidé une 4^e fois, il arrivoit que la Lune devoit présider à la première heure du Lundi, qu'on appelloit, pour cette raison, jour de la Lune. Mars devoit ensuite présider à la première heure du Mardi; Mercure à celle du Mercredi; Jupiter à celle du Jeudi, Venus à celle du Vendredi & Saturne à celle du Samedi. Delà viennent les noms de tous les jours de la semaine.

Les *Hébreux* & plusieurs peuples orientaux, & ensuite les *Romains*, environ trois cens ans après la fondation de Rome, diviserent leur jour artificiel en quatre parties égales, à commencer toujours par le lever du soleil. Cette première partie étoit de trois heures & se nommoit la première heure. Dès qu'elle étoit finie on donnoit un signal au peuple, pour lui apprendre que la première heure étoit achevée & que la seconde commençoit. Ce signal étoit répété de trois en trois heures. Le milieu du jour se nommoit *Sexte* ou la sixième heure.

Trois heures après on comptoit la 9^e heure & le coucher du soleil se nommoit *Vesper*.

L'Eglise Romaine à emploié jusqu'ici cette manière de

compter dans la distribution de l'Office divin depuis l'an 543.

On divisoit aussi la nuit en quatre parties égales, qu'on appelloit *Veilles* ; chaque veille contenoit trois heures inégales ; la première veille commençoit au coucher du soleil, la troisième à minuit, où finissoit la seconde, & la quatrième finissoit au lever du soleil.

Le Soleil dans sa révolution diurne passe par quatre points remarquables, le lever & le coucher dans l'horison, midi & minuit dans le Méridien. Delà vient que différens peuples ont commencé leur jour à ces différens points. Les *Babiloniens*, les *Assyriens* & plusieurs autres nations orientales, aussi bien que les habitans de *Majorque*, de *Minorque* & de *Nuremberg*, comptent leur jour depuis le lever du Soleil. Les *Juifs*, les *Athéniens*, les anciens *Grecs*, les *Italiens*, les *Siciliens*, les *Bohémiens*, les *Autrichiens*, les *Polonois* comptent leur jour depuis le coucher du soleil ; ils nomment l'heure suivante la première heure, en continuant de compter jusqu'à vingt quatre heures.

Les *Egyptiens* & les anciens *Romains* commençoient à compter à minuit, & ils ont été suivis par *Hypparque* dans ses *observations Astronomiques*. On en use de même en *Angleterre*, en *France*, en *Espagne* & en plusieurs endroits de l'*Europe*. L'Eglise Romaine emploie aussi cette manière de compter pour la célébration des Fêtes. Cependant les *Arabes* & les *Astronomes* modernes commencent le jour à midi.

La semaine est composée de sept jours naturels qui portoient chez les Payens les noms des sept planètes. Les *Hébreux* appelloient *Sabbath* le Samedi & le Dimanche étoit nommé *premier jour du Sabbath*, le Lundi second jour du Sabbath & ainsi de suite jusqu'au Vendredi qui se nommoit *préparation pour le Sabbath.*

Dès le commencement du Christianisme, on donna d'autres noms aux jours de la semaine. On les nomma *Féries*, c'est-à-dire, jours de fêtes, parce que tous les

jours de la femaine étoient des fêtes pour les Chrétiens. La première fe nomme *férie du Dimanche* ou du jour du Seigneur, en commémoraifon de la Refurrection ; la feconde férie eft le Lundi ; la 3ᵉ le Mardi, jufqu'à la 7ᵉ que l'Eglife appelle *Sabbath* ou jour du repos. Mais le peuple continue à emploier les noms des Payens excepté pour le Dimanche, qu'on n'appelle plus en France jour du Soleil.

Le mois eft compofé de plus ou moins, trente jours. Le mois aftronomique eft reglé par le cours du Soleil ou de la Lune. Le mois *Solaire* eft proprement l'efpace de tems que le Soleil emploie à parcourir un figne du Zodiaque. Le mois Solaire moyen eft de 30 jours, 10 heures, 29 minutes, 6 fecondes, 18 tierces, 50 quartes ; & le vrai mois folaire eft le tems que le Soleil emploie à parcourir un figne par fon vrai mouvement. Ce tems n'étant pas toujours le même, les vrais mois folaires font inégaux. Le plus grand eft celui de l'apogée qui eft environ au 8ᵉ degré du Cancer, & le plus court eft celui du périgée au 8ᵉ degré du Capricorne.

Les mois *lunaires* font mefurés par le mouvement de la Lune. Le mois lunaire périodique eft l'efpace de tems que la Lune emploie à parcourir toute l'écliptique ou à revenir au point d'où elle étoit partie. Le mois périodique moyen eft de 27 jours, 7 heures, 43 minutes, 7 fecondes. Mais le vrai mois périodique, eft tantôt plus grand & tantôt plus petit.

Le mois *Synodique*, eft le tems qui s'écoule entre deux conjonctions confécutives du Soleil & de la Lune. Le mois *fynodique moyen*, eft de 29 jours, 12 heures, 44 minutes, 3 fecondes, 11 tierces, & le vrai mois fynodique furpaffe quelquefois le moyen ou en eft furpaffé de 14 heures.

Le mois *d'illumination* ou *d'apparition* eft l'intervalle du tems entre le jour où la Lune commence à paroître après fa conjonction & celui où elle difparoît. Ce mois eft ordinairement de 28 jours, mais non pas exactement ; car elle paroît plutôt ou plus tard felon qu'elle eft dans les fignes Nord ou Sud, ou felon qu'elle fe meut plus vîte,

vîte, ou plus lentement, ou enfin ſelon qu'elle eſt dans les ſignes aſcendans ou deſcendans.

Les mois civils & politiques ſont inégaux, ils ſont compoſés d'un nombre de jours plus ou moins grand ſuivant les loix & les coutumes des païs.

Les mois *Egyptiens* ſont de 30 jours, & à la fin de chaque année on ajoutoit 6 jours qu'on appelloit *Epagomenas Dies*. Les mois *Perſans* ſont auſſi de 30 jours, mais on ajoutoit 5 jours à la fin de l'année commune, & 6 jours à la fin de l'année *intercalaire*. Ces jours ajoutés ſe nommoient *Muſteraka*.

L'année *ſidérale*, eſt l'eſpace de tems écoulé depuis le moment où le Soleil ſe trouve en conjonction avec une étoile fixe ou avec une planète, juſques à ce qu'il revienne à la même étoile ou à la même planète. Il y a donc deux années *ſidérales*; la première eſt fixe, & la ſeconde variable. La première eſt de 365 jours 6^h 9.′ 14″.

La ſeconde varie ſelon les différentes planètes. Celle qui a rapport à Saturne eſt de 378 jours $2.^h$ 12.′ 13″, celle avec Jupiter eſt de 398 jours $21.^h$ 12.′ 9″; avec Mars 779 jours $22.^h$ 22.′ 40″ en tems moyen.

L'année *tropique*, eſt le tems qui s'écoule depuis que le Soleil a paſſé par un point des ſolſtices ou des équinoxes, ou par tout autre point fixe de l'écliptique juſques à ce qu'il revienne au même point. On appelle auſſi cette année, l'année *naturelle*. Elle eſt de 365 jours $5.^h$ 48.′ 57″.

Mais comme dans cet intervalle les points équinoxiaux reculent de 50 ſecondes, il s'enſuit qu'il faut au Soleil 365 jours $6.^h$ 9.′ 14.″ pour revenir au même point de l'écliptique. C'eſt ce qu'on appelle l'*année ſolaire périodique*.

L'*année lunaire commune* eſt compoſée de 12 mois ſynodiques, & l'*année lunaire Emboliſmique* de 13 mois. L'année lunaire *commune* en tems moyen eſt de 354 jours $8.^h$ 48.′ 38.″, & l'année moyenne *Emboliſmique* eſt de 383 jours $21.^h$ 32.′ 41″.

La *vraie* année lunaire eſt quelquefois plus grande & quelquefois plus petite que l'année lunaire moyenne.

Comme l'année lunaire commune eſt de 354 jours 8.^{h} 48.′ 38.″, & que l'année ſolaire eſt plus grande de 10 jours 21.^{h} 10.′ 19.″, ce qui dans l'eſpace de 33 ans fait paſſer le commencement de l'année lunaire par toute la variété des Saiſons, on la nomme année *lunaire mobile.* Les Turcs & les Arabes s'en tiennent encore aujourd'hui à cette forme.

Comme dans l'eſpace de trois ans, la différence entre l'année *ſolaire* & l'année *lunaire* monte à 32 jours 15.^{h} 0.′ 57″; pour conſerver les *mois lunaires* autant qu'il eſt poſſible dans les mêmes Saiſons on ajoute un mois entier de trois en trois ans; ce qui fait commencer l'année lunaire à fort peu près dans la même ſaiſon, & ce mois ſe nomme *embolimiſque* ou *intercalaire.* C'eſt ce qui a été obſervé par les *Grecs* & par les *Romains* juſques au tems de *Jules Céſar.*

Les *Egyptiens* compoſent l'*année ſolaire* de 365 jours, ce qui étant moindre d'environ 6 heures que la vraie année ſolaire, leur fait perdre un jour dans quatre ans & dans quatre fois 365 ans, ou dans 1460 (ce qu'on appelle la *grande année caniculaire*) le commencement de l'année ſe ſera trouvé dans toutes les ſaiſons. C'eſt ce qui a fait appeller cette année, l'*année ſolaire mobile*: c'eſt la même que celle de *Nabonaſſar.* Les anciens *Aſtronomes* en faiſoient grand cas. *Ptolemée* & les *anciens Perſes* l'ont employée pendant 477 ans, juſques à ce que par ordre de leur Empereur Abb Arſalhm vers l'an 1079, ils commencérent à ajouter un jour à l'année de quatre en quatre ans ou de 5 en 5 ans, enſorte que 648 ans contenoient 236677 jours, & que leur année moyenne étoit compoſée de 365 jours 5 heures 48′. 53″. Jules Céſar long-tems avant ce tems-là s'étoit apperçu des inconvénients de cette méthode & il voulut que chaque *année civile* commençât par le même jour, ce qui n'étoit pas poſſible en ajoutant 6 heures à chaque année; & comme il étoit Grand-Prêtre parmi les Romains, il reforma le Calendrier par le ſecours du Mathématicien *Soſigenes*, & il ordonna que de quatre en quatre ans, il y auroit un jour *intercalaire* & qu'ainſi

cette année seroit de *366* jours. Ce jour *intercalaire* fut placé le 24 de Février que l'on nommoit chez les Romains le sixième des *Calendes* de *Mars*, de sorte qu'il y avoit dans cette 4e année deux sixièmes des *Calendes* de *Mars*. C'est pour cela que cette année fut nommée *Bissextile*. Ce qui s'est observé jusqu'ici parmi nous.

Mais comme la vraie longueur de l'année n'est que de *365* jours, *5* heures, *49'* presque ; il est arrivé que par cette manière de compter, l'*année civile* au bout de quatre ans, commençoit 44 minutes plutôt qu'elle n'avoit fait 4 ans auparavant & que par conséquent au bout de 131 ans, elle anticipoit d'un jour ; de sorte que le jour des équinoxes ayant été fixé au 21 de Mars par le Concile de Nicée l'an *325*, il arriva qu'en 1582 sous le Pontificat de Grégoire XIII, il avoit anticipé de 10 jours ; c'est ce qui détermina ce Pape à la reforme du Calendrier pour se conformer exactement au reglement du Concile de Nicée dans la célébration de la Pâques. Il supprima donc ces dix jours & ordonna que le *5* d'Octobre de 1582 on compteroit le 15 ; & pour prévenir dans la suite le même inconvénient, il ordonna que de cent en cent ans, l'année ne seroit pas bissextile & qu'elle n'auroit que *365* jours. Mais comme cette soustraction est un peu trop grande, il regla que de 400 en 400 ans elle resteroit encore Bissextile. C'est ce qu'on nomme le *Calendrier Grégorien*, auquel le P. Clavius Jésuite eût beaucoup de part. Ce Calendrier fut d'abord adopté dans tous les Païs Catholiques ; en 1700 il fut encore reçu par plusieurs Païs protestants & enfin en 1761 par les Anglois.

Les Romains divisoient le mois d'une manière particulière, selon l'institution de *Romulus* fondateur de Rome. Ils nommoient *Calendes* le premier jour de chaque mois, le jour précédent se nommoit *pridiè Kalendas*, jour avant les Calendes, le jour avant celui-là étoit le troisième jour avant les Calendes & ainsi de suite jusques aux *Ides* de ce mois. Le jour immédiatement après les Calendes se nommoit le 4e ou le 6e des *Nones* suivant le mois ; car

en Mars, Mai, Juillet & Octobre, les *Nones* étoient le 7 du mois & dans les autres mois le 5. Les *Ides* étoient le 15^{e} dans les mois de Mars, Mai, Juillet & Octobre & le 13. dans les autres. Tous les autres jours étoient comptés comme pour les Calendes dans un ordre renversé, *pridiè Nonas*, *pridiè Idus*, &c.

Cette manière de compter a été toujours en usage dans l'Eglise latine; quoique dans le civil on compte les jours du mois depuis 1 jusqu'à 30 ou 31. Dela est venu le nom de *Calendrier* qu'on a donné à la table des Mois & des Fêtes de chaque année. Chaque jour est distingué par l'une des sept premières lettres de l'Alphabeth A, B, C, D, E, F, G. La première A est à côté du premier jour de Janvier, la seconde B à côté du 2^{d} & ainsi des autres jusques à la 7^{e} G qui est au 7 de Janvier, ensuite A au 8, B au 9, &c. jusques à la fin de l'année. Par ce moyen dès qu'on sçait qu'une lettre est à côté d'un jour de la semaine, elle sera toute l'année au même jour. Si le premier jour de Janvier marqué par la lettre A est un Dimanche, tous les autres jours de l'année qui auront à côté la même lettre A seront des Dimanches. Si le 3 de Janvier où est la lettre C est un Dimanche, tous les jours de l'année marqués par cette lettre seront des Dimanches & cette lettre par cette raison, quelle qu'elle soit, se nomme *Lettre Dominicale*; la suivante indique le Lundi & ainsi des autres.

Comme l'année commune est composée de 365 jours, c'est-à-dire, de 7 fois 52 & un de plus, il s'ensuit que la lettre A que l'on place au premier jour de l'année, doit se retrouver au dernier jour & que si elle a commencé, par exemple, par un Dimanche, elle finira par un Dimanche, & par conséquent, le premier jour de l'année suivante sera un Lundi & le Dimanche se trouvera le 7 de Janvier marqué par la lettre G. Cette lettre sera donc la lettre Dominicale, & cette seconde année ayant commencé par un Lundi, finira aussi par un Lundi, & la troisième année commencera par le Mardi; donc le 6 de Janvier marqué par F sera la lettre Dominicale. De mê-

me E ſera la lettre Dominicale de la quatrième année, D de la cinquième & ainſi de ſuite en retrogradant.

Si toutes les années étoient exactement de 365 jours, au bout de 7 ans, le même jour du mois tomberoit au même jour de la ſemaine ; mais à cauſe du *jour intercalaire*, l'année de 4 en 4 ans eſt de 366 jours, qui valent 7 fois 52, & deux de plus, & ainſi lorſque l'année commence par un Dimanche, celle-ci doit finir par un Lundi, & l'année ſuivante doit commencer par un Mardi. Par conſéquent le premier Dimanche de cette année doit ſe trouver le 6 de Janvier à côté de la lettre F qui devient la lettre Dominicale de l'année après la Biſſextile, ſuppoſé que la lettre A ait été la Dominicale de la Biſſextile. Par conſéquent la ſuite des lettres Dominicales eſt interrompue de 4 en 4 ans, & elle ne revient qu'après quatre fois ſept ou 28 ans. C'eſt ce qu'on nomme le *Cycle ſolaire*, après lequel les jours du mois reprennent le même ordre qu'auparavant.

Comme tous les quatre ans le jour intercalaire eſt placé entre le 23 & le 24 Février, ce qui donne deux fois le 24 Février, comme ſi le 24 & le 25 n'étoient qu'un même jour avec la même lettre ; on interrompt ce jour-là la ſuite des lettres Dominicales, & ainſi ſuppoſé que la lettre Dominicale ſoit A, le 24 Février ſera un Vendredi, & le 25 un Samedi, & la lettre F du 24 ſervira encore au 25. Par conſéquent la nouvelle lettre Dominicale ſera G pour le reſte de l'année ; d'où il ſuit que l'année Biſſextile doit avoir deux lettres Dominicales, la première qui ſert depuis le commencement de l'année juſques au 24 ou au 25 Février, & la ſeconde pour le reſte de l'année.

On ſuppoſe que le Cycle ſolaire a commencé 9 ans avant J. C. & que cette année étoit Biſſextile ; ainſi pour trouver le Cycle ſolaire d'une année propoſée, il faut ajouter 9 à cette année & diviſer par 28. Le reſte de la diviſion ſera le Cycle ſolaire. Par exemple pour avoir le Cycle ſolaire de 1764 j'ajoute 9 à cette année, & je diviſe par 28, le quotient eſt 63 & le reſte 9 eſt le Cycle ſolaire.

La première année du Cycle Solaire étoit biſſextile, & par conſéquent elle avoit deux lettres dominicales D & C; & les lettres dominicales pour toutes les années du cycle ſolaire ſuivent l'ordre que l'on voit dans la petite Table ci-jointe.

Cycle Solaire	Lettres Domin.	Cycle Solaire	Lettres Domin.	Cycle Solaire	Lettres Domin.	Cycle Solaire	Lettres Domin.
1	D. C	9	A. G	17	E. D	25	B. A
2	B	10	F	18	C	26	G
3	A	11	E	19	B	27	F
4	G	12	D	20	A	28	E
5	F. E	13	C. B	21	G. F	1	D. C
6	D	14	A	22	E	2	B
7	C	15	G	23	D	3	A
8	B	16	F	24	C	4	G

L'année 1764 étant biſſextile & le Cycle Solaire de cette année étant 9, on voit dans cette Table qu'elle a deux Lettres Dominicales, la première A pour le commencement de l'année; & la ſeconde G pour le reſte depuis le 25 Février.

Lorſqu'on a la lettre Dominicale d'une année, on trouve aiſément par quel jour de la ſemaine l'année doit commencer. Si la lettre Dominicale eſt A, elle commencera par un Dimanche; ſi c'eſt B, elle commencera par un Samedi, ſi c'eſt C par un Vendredi, & ainſi de ſuite en reculant.

Comme on a trouvé que les retours périodiques du Soleil & de la Lune ſont conſtamment les mêmes & que la vîteſſe de la Lune eſt à fort peu près treize fois auſſi grande que celle du Soleil, il ſuit delà qu'après un certain nombre de révolutions ces deux Aſtres doivent ſe rencontrer dans le ciel. Un Athénien nommé *Meton* avoit trouvé que cette rencontre arrivoit de 19 en 19 ans, &

c'eſt ce qu'on appelle le *Cycle de Meton* dont les anciens ont fait un grand uſage pour déterminer les nouvelles Lunes & les pleines Lunes.

Car ſelon cette période, la nouvelle Lune, & la pleine Lune doivent arriver le même jour & à la même heure du jour au bout de 19 ans. Donc ſi l'on a le jour & l'heure d'une nouvelle Lune ou d'une pleine Lune dans l'intervalle de 19 ans, on l'aura pour toutes les années précédentes ou ſuivantes.

Dans le tems du Concile de Nicée, où il étoit queſtion de fixer la fête de Paques, ce Cycle dont on faiſoit beaucoup de cas, ſervit de fondement au Comput Eccléſiaſtique. On avoit trouvé par obſervation que la première année du Cycle, les nouvelles Lunes arrivoient le 23 Janvier, le 21 Février, le 23 Mars, &c. Ainſi on écrivit 1 dans le Calendrier à côté de tous ces jours. On avoit de même trouvé que dans la deuxième année du Cycle, les nouvelles Lunes arrivoient le 12 Jancier, le 10 Février, le 12 Mars, &c. on écrivit donc 2 a côté de ces jours & ainſi des autres années du Cycle ; par ce moyen l'année du Cycle étant donnée, on trouvoit par la ſeule inſpection toutes les nouvelles Lunes de cette année dans la première colonne du Calendrier ; & à cauſe de l'excellent uſage de ces nombres, on les écrivoit en lettres d'or. De-là vient que l'année du Cycle a été nommée *nombre d'Or*.

Pour trouver le nombre d'Or d'une année, il faut ajouter 1 à l'année propoſée & diviſer la ſomme par 19. Le quotient donnera le nombre des Cycles écoulés depuis le commencement de l'Ere chrétienne & le reſte de la diviſion ſera le nombre d'Or du dernier Cycle. Par exemple, ſi l'on veut ſçavoir le nombre d'Or de 1764, on ajoute 1 à cette année & l'on diviſe la ſomme 1765 par 19, le quotient 92 détermine le nombre des Cycles, & le reſte 17 de la diviſion donne le nombre d'Or de 1764.

Comme l'année Solaire ſurpaſſe l'année Lunaire de 10 jours 21.^{h} 0.′ 19.″ ou preſque de 11 jours ; ces jours intercalaires ſe nomment *Epactes*.

L'Epacte est zero, lorsque le nombre d'Or est 1. Elle est 11 lorsque le nombre d'Or est 2. Elle est 22 ou 2 fois 11, lorsque le nombre d'Or est 3 ; & lorsque le nombre d'Or est 4, l'Epacte est 3 fois 11 ou 33, c'est-à-dire 3, parce qu'on ne la compte jamais au-delà de 30. Ainsi pour trouver l'Epacte d'un année proposée il faut retrancher 1 du nombre d'Or de cette année & multiplier le reste par 11. Divisez par 30 ce produit, s'il surpasse 30; le reste de la division sera l'Epacte. Par exemple le nombre d'Or de l'année 1764 étant 17, on retranche 1 de ce nombre, & on multiplie le reste 16 par 11. Ce qui donne 176. Divisez 176 par 30, le reste 26 sera l'Epacte requise. Après 1799 il faudra faire un petit changement à cette régle parce que 1800 ne sera pas Bissextile.

Si l'on retranche de 29 jours & demi l'Epacte d'une année, on aura la nouvelle Lune de Janvier & comme ce mois est de 31 jours, c'est-à-dire, d'un jour & demi plus que le mois Synodique de la Lune, on ajoute à l'Epacte un jour & demi & l'on soustrait la somme de 29½ pour avoir le jour de la nouvelle Lune de Février; & parce que dans les années communes les mois de Janvier & de Février sont exactement deux mois Synodiques, c'est-à-dire, 59 jours, l'Epacte de l'année étant soustraite de 29 jours & demi donne la nouvelle Lune de Mars, & ainsi en augmentant continuellement l'Epacte de l'excès du mois par dessus le mois synodique & retranchant cette somme de 29 jours & demi, on aura la nouvelle Lune de chaque mois. Ensuite en ajoutant 14 au jour de la nouvelle Lune, on aura le jour de la pleine Lune. Mais pour éviter les fractions on donne ordinairement 30 jours au mois synodique, & on n'ajoute rien à l'Epacte pour Janvier & Février. Ensuite on ajoute 2 pour Mars, 1 pour Avril, 2 pour Mai, 3 pour Juin, 4 pour Juillet, 5 pour Août, 6 pour Septembre, 8 pour Octobre, 9 pour Novembre, & 10 pour Décembre. Ce qui ne differe gueres plus d'un demi-jour de la vraie conjonction & s'accorde souvent très-parfaitement, & ainsi ce calcul suf-

fit pour les usages ordinaires. On ajoute ensuite 15 jours pour avoir la pleine Lune suivante. Par exemple. L'Epacte de 1764 étant 26, je la soustrais de 30 pour avoir la nouvelle Lune le 3 de Janvier & le 3 de Février, j'ajoute 2 à l'Epacte pour Mars & je soustrais 28 de 30 pour avoir la nouvelle Lune de Mars le 2. J'ajoute 1 pour Avril & la nouvelle Lune se trouve le 3. J'ajoute 2 pour Mai & j'ai la nouvelle Lune le 2, & ainsi de suite.

Comme l'Epacte d'une année détermine les jours qui se sont écoulés depuis la nouvelle Lune au premier jour de l'an, si l'on veut avoir l'âge de la Lune pour un jour quelconque du mois de Janvier, il faut ajouter le jour du mois à l'Epacte & retrancher 30 de la somme. Ainsi pour avoir l'âge de la Lune le 12 Janvier 1764, j'ajoute 12 à l'Epacte 26 & de la somme 38 je retranche 30, pour avoir le reste 8 qui est l'âge de la Lune. Si l'on ajoute 2 à la même Epacte pour Février, 1 pour Mars, 2 pour Avril, &c. on aura l'âge de la Lune pour le commencement de chaque mois, & si à cette somme on ajoute le quantième du mois, on aura l'âge de la Lune pour le jour donné.

La fête de Pâques ne se célébre jamais avant le 22 Mars, ni après le 25 Avril. Ainsi pour la déterminer il faut trouver le jour de la pleine Lune qui vient après le 21 Mars. Le Dimanche suivant sera le jour de Pâques. Par exemple en 1764. La nouvelle Lune d'Avril étant le 3 & la pleine Lune le 18, Pâques sera le Dimanche suivant 22 Avril.

Si l'on multiplie ensemble les Cycles du Soleil & de la Lune 28 par 19, on aura une troisième Période 532 qu'on appelle Période *Victorienne* ou de *Denis le petit*. A la fin de cette Période, non-seulement les nouvelles & pleines Lunes reviennent au même jour du mois, mais encore au même jour de la semaine, & ainsi les lettres Dominicales & toutes les Fêtes mobiles reprennent le même ordre. C'est pour cela qu'on appelle ce Cycle, le grand *Cycle Pascal*.

Pour trouver l'année de la Période de Denis le petit,

qui convient à une année courante, il faut ajouter 457 à cette année, parce que cette Période a commencé 457 ans avant l'Ere chrétienne; ensuite on divisera la somme par 532, le reste de la division sera l'année de la Période. Ainsi ajoutant 457 à 1764, on a 2221, qui étant divisés par 532, le reste de la division est 93.

Outre les Cycles du Soleil & de la Lune, les Romains employoient un autre Cycle qu'on appelle *Cycle de l'indiction*; il n'étoit que de 15 ans, & il n'avoit aucun rapport aux mouvemens célestes. On croit qu'il avoit été établi pour exiger certains tributs.

L'Empereur Justinien ordonna qu'on s'en servit dans les actes publics, & les Papes s'en servent encore dans leurs Bulles, & ils en fixent le commencement aux Calendes de Janvier, mais les Romains lui donnoient une autre époque.

La première année de l'ére chrétienne s'étant trouvée la 4e de ce Cycle, on trouvera quelle année du Cycle correspond à une année de J. C., en ajoutant 3 à l'année donnée & divisant par 15, le reste sera l'année de l'Indiction. Ainsi ajoutant 3 à 1764 & divisant par 15 la somme 1767, le reste de la division 12 sera l'Indiction.

La multiplication du Cycle lunaire 19, du Cycle solaire 28, & de l'Indiction 15 donne la grande *Période Julienne* de 7980 ans. On suppose qu'elle a commencé 764 ans avant la *Création*, & qu'alors les trois Cycles commencerent en même tems. Elle n'est pas encore achevée, & elle comprend toutes les autres Périodes, Cycles & époques. Il n'y a qu'une seule année dans toute la Période qui ait les mêmes nombres pour les trois Cycles, & par conséquent si les Historiens avoient marqué les trois Cycles dans leurs annales pour chaque année, on n'auroit aucune contestation pour le tems de chaque événement.

L'année avant J. C. se trouva la 4713e de *la Période Julienne*. Ainsi pour trouver à quelle année de cette Période répond l'année courante, il faut ajouter 4713; par con-

séquent on trouvera que l'année 1764 est la 6477^e de la Période Julienne.

Telles sont les principales Périodes. Il y en a d'autres moins usitées. Comme l'année du Jubilé parmi les *Juifs* qui étoit composée de sept années Sabbatiques, & revenoit au bout de 49 ou 50 ans. Les *Olympiades* parmi les *Grecs* qui étoient de quatre ans, & la grande année *Platonique* si célébre parmi les Historiens ; elle contenoit la révolution entière de tous les Astres jusques au point d'où ils étoient partis.

Comme il y a dans le Ciel certains points fixes par où les *Astronomes* commencent leurs calculs ; les *Historiens* ont aussi d'autres points fixes, qu'ils appellent *Eres* ou *Epoques*, d'où ils partent pour fixer le tems des événemens. La plus ancienne est celle de la création du Monde, la suivante est celle du Déluge 2956 ans avant J. C. La 3^e est celle des Olympiades, qui commença en Grece 776 ans avant J. C. dans la 3938 année de la Période Julienne, le Cycle solaire étant alors 18, le Cycle lunaire 5 & l'Indiction Romaine 8.

La plus remarquable des autres époques est celle de la fondation de Rome vers la fin de la 3^e année de la 6^e Olympiade, 753 ans avant J. C., la 3961^e année de la Période Julienne, le cycle du Soleil étant alors 13, le cycle de la Lune 9 & l'Indiction 1.

La suivante est celle de *Nabonassar* Roi de Babilone, si fameux chez les Astronomes. Elle a été emploiée par *Ptolemée*, *Albategnius*, *Alphonse*, *Copernic* & plusieurs autres, comme l'Ère la plus propre pour calculer les mouvemens des Astres. Elle commença selon Ptolemée le 4^e des Calendes de Mars un *Vendredi*, 747 ans avant J. C. dans la 3967^e année de la Période Julienne, la première année de la huitième Olympiade, le Cycle solaire étant 19, le Cycle lunaire 15 & l'Indiction 6.

Après cette époque, nous avons celle d'*Alexandre* le grand, 424 ans Egyptiens après le commencement de l'Ere de *Nabonassar*, car Alexandre mourut à *Babilone* la

33e année de son âge, la première année de la 114e Olympiade, le 3 du mois *Desii* (selon quelques Historiens) & selon d'autres, le 23 ou le 27 par rapport au Calendrier Julien, c'étoit le 20 Mai selon les uns, le 9 ou le 23 Juin selon les autres, & selon quelques uns le 25 Juillet. Mais les Astronomes qui ont emploié ces époques, comme *Albategnius* & autres la fixent au 12 Novembre un Dimanche à midi, le premier jour du mois *Egyptien Thoth*, 324 ans avant J. C. la 4390e année de la *Période Julienne*, 279 ans avant le commencement de l'*époque Julienne* & 424 ans Egyptiens complets après le commencement de l'Ere de *Nabonassar*.

L'Epoque des *Syriens* & *Caldéens* commença au regne de *Seleucus Nicator*, qui succéda à Alexandre le Grand & regna dans la Syrie & dans une partie de l'Afrique après la mort d'*Alexandre le Grand*.

L'*Epoque Julienne* adoptée par *Jules César* commença au premier Janvier, de l'année de la confusion, qui se trouva être un Mardi. Ce Prince voyant que les années établies par *Numa Pompilius*, second Roi de Rome, n'étoient que de 12 mois lunaires, & que cette division ne s'accordoit pas avec le Soleil, ordonna la 4e année de son Consulat, 708 ans après la fondation de *Rome*, la 731e année des Olympiades, 45 ans avant la Naissance de J. C., que désormais l'année seroit de 365 jours 6 heures, c'est ce qu'on appelle l'année Julienne.

L'*Ere Espagnole* commença durant le regne d'*Augustè*, la 7e année de l'*Ere Julienne*, 38 ans avant J. C., 715 après la fondation de Rome, & la 738e année des Olympiades. On dit que c'est à l'occasion de la division de l'Empire ; l'*Espagne* fut donnée à *Auguste*, qui en prit d'abord possession & pour rendre ce jour mémorable, on le prit pour époque & l'on compta dans la suite, *Ab Exordio Regni Augusti;* ces quatre mots furent ensuite abrégés & réduits aux lettres initiales, ce qui fut, selon quelques Auteurs, l'origine du mot A E R A dont on se sert pour marquer les Epoques par où l'on commence à compter les années.

L'Epoque ſuivante ſelon l'ordre des tems & en même tems la plus fameuſe & la plus connue eſt celle qui commence à l'Incarnation de Notre Sauveur Jeſus-Chriſt ; & c'eſt pour cela qu'on la nomme l'*Ere Chrétienne.* Elle commence à minuit du 31 Décembre immédiatement après ſa Naiſſance qui fut un Samedi, la 4714ᵉ année de la Période Julienne, 753 ans après la fondation de Rome, la 747ᵉ année de Nabonaſſar, & 324 après la mort d'*Alexandre le Grand*, le Cycle ſolaire étant 10, le Cycle lunaire 2 & l'Indiction romaine 4.

Il y a d'autres époques moins uſitées, comme celle de l'Empereur *Diocletien* le 21 d'Avril, l'an 284 de J. C. la 4997ᵉ année de la *Période Julienne.* On la nomme auſſi Epoque des *Ethiopiens*, *des Abiſſins* & des *Martyrs*, à cauſe de la grande perſécution que les Chrétiens eſſuyerent dans ce regne.

Il y a auſſi l'époque des *Turcs* qu'ils appellent *Hégire*, & qui commence par la fuite de *Mahomet* lorſqu'il ſortit de la *Mecque* pour aller à *Jebril* le Mardi 16 Juillet, la 622ᵉ année de J. C., tems auquel *Mahomet* prêcha & répandit ſa fauſſe doctrine. Celle des *Perſans* qu'on nomme *Yezdegend* du nom de leur Roi qui mourut le Mercredi 16 Juin de l'année 632 de Notre Sauveur.

CHAPITRE III.

Des Inſtrumens les plus propres à obſerver la hauteur & l'Azimuth des Aſtres.

I. J'Abandonne aux Pilotes ignorans l'Arbaleſtrille ou la fléche, qui eſt le plus mauvais de tous les Inſtrumens à prendre hauteur. Comme les degrés en ſont inégaux, il eſt très-difficile de la diviſer, & encore plus de reconnoître ſi elle a été bien diviſée. De plus les marteaux ne ſont pas toujours exactement perpendiculaires à la fléche, ce qui peut produire une grande erreur. Les diviſions

de la plupart des degrés ſont très-petites, & on n'y diſtingue pas les minutes, comme dans les autres Inſtrumens, les marteaux s'uſent par les deux extrêmités ; la fléche ſe courbe, & la forme de cet inſtrument ne permet pas de le tenir avec aſſez de force, lorſque le vent eſt frais.

J'avois dit dans les Elémens de Pilotage que l'ombre des pinnules & marteaux ne donne que la hauteur du bord ſupérieur du Soleil. Cela eſt vrai en ne ſuppoſant point de pénombre ; mais l'expérience fait voir que la pénombre briſe les rayons du ſoleil, & qu'on n'a pas même la hauteur du bord ſupérieur de cet Aſtre, ce qui augmente l'erreur de pluſieurs minutes. Ainſi rien n'eſt plus défectueux que l'obſervation faite avec des pinnules qui ne ſont pas percées.

Le meilleur de tous les Inſtrumens à prendre hauteur, eſt l'Octant de Mr. Hadley, ou celui de Mr. Caleb Smith. Mr. Hadley, propoſa ſon premier Octant en 1731, & il démontra qu'on pouvoit, avec cet Inſtrument, obſerver à une minute près la hauteur du Soleil, même dans les tems obſcurs qui rendent inutiles le quartier anglois & la fléche. Il fit voir qu'on pouvoit obſerver la hauteur du Soleil, lorſqu'il eſt aux environs du Zénith, avec autant de facilité & d'exactitude, que s'il étoit à peu de diſtance de l'Horiſon. C'eſt ce que nous avons démontré d'après ce ſçavant homme dans nos Mémoires de 1755.

Cet Inſtrument eſt compoſé d'un demi-quart de cercle, dont l'arc ou le limbe de 45 degrés eſt diviſé en 90 parties égales ou demi-degrés. Chacune de ces parties répond à un degré entier dans l'obſervation. Il porte une Alidade ou regle mobile ſur le centre pour marquer les diviſions. Proche du centre on place ſur cette Alidade un miroir plan fixé perpendiculairement au plan de l'Inſtrument. On a auſſi arreté ſur l'Octant un autre miroir plan plus petit. Lorſque l'Alidade eſt au commencement de la diviſion, ou à 0.° la ſurface du ſecond miroir doit être parallèle à celle du premier. La glace du petit miroir doit être tour-

née vers l'obſervateur, & celle du grand dans un ſens contraire. Lorſqu'on place une Lunette ſur l'Octant, il faut que ſon axe ſoit parallèle au plan de l'inſtrument, & qu'il paſſe par le milieu de l'un des bords du petit miroir, enſorte que la moitié du champ de la lunette reçoive les raïons refléchis par ce miroir, & que l'autre moitié ſoit expoſée à ceux qui lui viennent directement de quelque objet fort éloigné, par exemple, de l'horiſon de la mer. On place auſſi entre le grand & le petit miroir, un ou deux verres obſcurs encadrés dans un chaſſis qui tourne ſur une charnière ; on place ce chaſſis devant le grand miroir, lorſque la lumière du Soleil eſt trop vive.

Cet Inſtrument ſert à prendre tout angle qui ne va pas au-delà de 90.°, c'eſt-à dire, en obſervant par devant. Mais ſi l'on veut obſerver par derrière, ou prendre des angles depuis 90° juſques à 180°, il faut placer un troiſième miroir & une pinnule un peu plus bas. Enfin le petit miroir doit être fixé perpendiculairement à une plaque de cuivre ronde, dont le bord ſoit garni de dents, qui engrainent dans une vis ſans fin, pour lui donner une poſition convenable. La ſituation des deux petits miroirs par rapport au grand eſt différente ; le premier doit être parallèle au grand, & le ſecond doit lui être perpendiculaire, lorſque l'Alidade eſt ſur le point marqué o°. la ſeule inſpection de la (figure 14) fera comprendre ce qu'on vient de dire. Fig. 14.

Avant que de faire aucune obſervation, il faut rectifier l'Inſtrument, c'eſt-à-dire, faire enſorte, lorſqu'on veut obſerver par devant, que le petit miroir ſoit exactement parallèle au grand & en même tems perpendiculaire au plan de l'Inſtrument ; car on ſuppoſe que le grand miroir eſt perpendiculaire à ce plan. Pour arriver à ce but, il faut placer l'Alidade ſur le point du limbe marqué o.°, & l'ayant arrêtée à ce point par une vis, on viſera à l'horiſon de la mer à travers la partie tranſparente du petit miroir. Si cet horiſon vu directement ne fait qu'une ſeule & même ligne droite avec l'horiſon vû par réfléxion, le

petit miroir ſera parallèle au grand. S'il ne l'eſt pas, on donnera un petit mouvement à la queue de cuivre qui eſt derrière le petit miroir ; on le fera tourner peu à peu, juſques à ce que les deux images de l'horiſon n'en faſſent qu'une. Cette verification ſe fait en tenant l'Octant perpendiculaire à l'horiſon. Si enſuite en l'inclinant tant ſoit peu ſur la droite ou ſur la gauche, l'objet vu par réfléxion paroît plus haut ou plus bas que l'objet vû directement, on ſera aſſuré que le petit miroir n'eſt pas perpendiculaire au plan de l'Octant, ſuppoſé que le grand lui ſoit perpendiculaire. Il faut donc le redreſſer : c'eſt à quoi ſervent les deux vis qu'on voit derrière les petits miroirs. Il faut les ſerrer ou les deſſerrer juſques à ce que les deux images de l'horiſon reſtent coïncidentes, en inclinant l'Octant à droite ou à gauche.

L'Alidade étant placée à o.°, il faudroit l'y fixer de manière qu'elle ne pût s'en écarter que quand on voudroit l'en tirer. Une petite vis introduite dans l'étrier qui eſt par deſſous, ſuffiroit pour cela. C'eſt ce qu'on ne trouve point dans les Octans conſtruits à Paris. On n'y trouve point non plus un petit bouton mis exprès pour arrêter l'Alidade au commencement de la diviſion. Il ſeroit cependant fort utile, & il épargneroit à l'Obſervateur le ſoin de mettre ſcrupuleuſement ſon Alidade au point o.°, lorſqu'il veut vérifier ſon Octant.

C'eſt à peu près la même préparation, quand on veut obſerver par derrière, & rectifier la poſition du troiſième miroir. On viſe à l'horiſon antérieur à travers la partie tranſparente du troiſième miroir, & on amene ſur la partie étamée l'horiſon poſtérieur vû par une double réfléxion, en ſorte que les deux horiſons ne faſſent qu'une ſeule ligne droite. Sur quoi voyez la remarque ci-après pag. 86.

II. Pour obſerver la hauteur d'un Aſtre ; après avoir vérifié l'Octant, 1.° ſi l'Aſtre eſt aſſez lumineux pour faire de l'ombre, on tâchera de tenir l'inſtrument de manière que l'ombre de ſon demi-diamètre extérieur, c'eſt-à-dire, de celui qui eſt le plus éloigné de l'Obſervateur, tombe exactement

exactement sur celui qui en est le plus proche, en observant par devant, & en dirigeant l'instrument vers l'horison de la mer. Par ce moyen le plan de l'Octant se trouvera tout d'un coup dans celui de l'Azimuth de l'Astre. L'expérience fera voir que cela n'a rien de difficile dans la pratique. Quand on observe par derrière, c'est l'ombre du demi-diamètre le plus proche de l'Observateur, qui doit tomber sur l'autre.

2°. Toutes choses étant dans l'état que nous venons de dire, l'observateur regardera l'horison à travers la glace transparente, & il fera avancer l'Alidade jusques à ce que la lumière de l'Astre venant à tomber sur le grand miroir, il voie son image par réflexion sur le petit miroir. Dès que l'image de l'Astre, ou de son bord inférieur paroîtra toucher l'horison de la mer, on arrêtera l'Alidade, qui marquera la hauteur du bord inférieur de l'Astre, ou sa distance au Zénith, complément de sa hauteur.

Cette pratique est entièrement la même, soit qu'on observe par devant, ou par derrière; avec cette seule différence, que quand on observe par devant, les objets conservent dans le petit miroir leur situation naturelle, & qu'ainsi en faisant toucher à l'horison, le bord inférieur d'un Astre, on trouve réellement la hauteur du bord inférieur; au lieu qu'en observant par derrière, les objets paroissent renversés; le bord de l'Astre qui paroît être le bord inférieur dans le miroir, en est réellement le bord supérieur; & ainsi on n'a que la hauteur du bord supérieur. Ce seroit tout le contraire, si au lieu d'une simple pinnule, on employoit une lunette à deux verres convexes; parce que ces sortes de lunettes renversent les objets.

3°. Quand l'Observateur aura arrêté l'image de l'Astre dans le miroir, ensorte que la ligne de l'horison soit tangente de l'un de ses bords, il ne faut pas qu'il se flatte aussi-tôt d'avoir trouvé la hauteur juste de ce bord. C'est à quoi les commençans doivent sur tout prendre garde. Il n'y a qu'une seule situation de l'Octant, où la hauteur que l'on cherche, soit donnée exactement; c'est lorsque

il eſt tenu bien verticalement, & que ſon plan ſe confond avec celui de l'Azimuth où eſt l'Aſtre. Toute autre ſituation donnera une hauteur trop grande ; parce que la vraie hauteur eſt toujours la plus petite. Ainſi quand l'Obſervateur aura fait toucher le bord de l'Aſtre à l'horiſon, s'il veut s'aſſurer de la bonté de ſon obſervation, il inclinera un peu ſon Octant, tantôt ſur la droite, tantôt ſur la gauche. Si dans ce double mouvement l'image de l'Aſtre paroît s'élever toujours au deſſus de la ligne horiſontale, il peut s'aſſurer que ſon obſervation eſt juſte. Mais ſi l'image de l'Aſtre paroît s'élever d'un côté au deſſus de l'horiſon, & de l'autre s'y enfoncer, il faudra reculer un peu l'Alidade vers 0°, de manière que l'Aſtre ne faſſe que raſer l'horiſon, de quelque côté qu'on incline l'inſtrument.

4.° Pour connoître ſi un Aſtre monte ou deſcend ; ſi l'on doit s'attendre à le voir paſſer par le méridien, ou s'il y a déja paſſé ; il faut prendre ſa hauteur exacte, & voir enſuite ſi l'Aſtre qui paroiſſoit raſer l'horiſon, paroit s'abaiſſer au deſſous, ou s'élever au deſſus. Dans le premier cas, ſa hauteur diminue, & il a déjà paſſé par le méridien ; dans le ſecond cas c'eſt tout le contraire.

5.° Après avoir ainſi obſervé la hauteur du bord d'un Aſtre, on reconnoitra ſur le limbe de l'Octant, les degrés & minutes marqués par l'Alidade. On reconnoit aiſément les degrés ; mais les minutes dépendent de la manière dont chaque degré eſt ſubdiviſé. Dans quelques Octans on a ſuivi l'ancienne méthode des tranſverſales, qui eſt fort connue, & qui eſt preſque indiſpenſable dans la diviſion du Quartier anglois. Chaque degré eſt diviſé en trois parties égales, qui, par conſéquent valent chacune 20 minutes. Chacune de ces parties égales eſt ſubdiviſée de 2 en 2 minutes par dix cercles concentriques, qui ſont traverſés par une ligne oblique, qu'on nomme *tranſverſale*.

Lorſque l'Alidade rencontre le point où la tranſverſale coupe le premier cercle en haut, on compte 2 minutes de plus qu'on n'auroit compté ſi elle avoit rencontré le point le

plus élevé. Dans l'interſection du ſecond cercle, on compte 4 minutes de plus, & ainſi de ſuite juſques au cercle le plus bas.

Pluſieurs défauts qu'on a découverts dans les tranſverſales, ont déterminé les Géométres à employer dans leurs inſtrumens une autre diviſion qu'on appelle le *Nonius*. On trouvera dans la ſeconde partie de nos Memoires pour l'année 1755. l'hiſtoire & la critique des tranſverſales depuis la page 5 juſques à la fin de la page 28. Nous y avons dit d'après les Auteurs Anglois, pag. 18. qu'un illuſtre Fran-comtois nommé *Pierre Vernier* avoit inventé la méthode qu'on avoit attribuée juſqu'à préſent à *Pierre Nonius*. Il falloit dire que *Pierre Vernier* s'étoit attribué cette invention en 1631. Mais ſurement il n'en eſt pas le premier auteur. Car le Pere *Clavius* Jeſuite explique clairement les principes de cette méthode dans le premier Lemme de ſon traité des Aſtrolabes imprimé à Mayence en 1611, en cette manière.

Soit, dit-il, une ligne droite, ou un arc de cercle AB (fig. 15) qu'il faut diviſer en un nombre quelconque de parties égales. Prenez dans cette ligne prolongée, ou dans l'arc prolongé, autant de lignes égales à AB, que vous voulez avoir de diviſions, comme BC, CD, DE, EF, FG. Diviſez enſuite la ligne totale AG en autant de parties égales, AL, LK, KI, IH, HG, chacune de ces cinq parties égales contiendra la partie AB & encore $\frac{1}{5}$ de AB : car AG eſt à AL, comme AF eſt à AB ; c'eſt-à-dire que AL eſt ici contenu cinq fois dans AG, comme AB dans AF. Donc puiſque AG contient AF & $\frac{1}{5}$ de AF, AL contiendra AB & $\frac{1}{5}$ de AB. Donc BL eſt $\frac{1}{5}$ de AB. Donc, comme GH plus grand que AB, contient AB plus FH qui eſt $\frac{1}{5}$ de AB ; EI ſera $\frac{2}{5}$ de AB ; DK $\frac{3}{5}$; CL $\frac{4}{5}$. Donc ſi l'on fait couler AG ſur AB, lorſque F tombera ſur H, B tombera ſur $\frac{1}{5}$ de AB ; lorſque E tombera ſur I, B tombera ſur $\frac{2}{5}$ de AB ; lorſque D tombera ſur K, B tombera ſur $\frac{3}{5}$ de AB ; & lorſque C tombera ſur L, B tombera ſur $\frac{4}{5}$ de AB. Fig. 15

C'eſt ce qui a donné à Pierre Vernier ou à quelqu'autre l'idée du *Nonius*, qui n'eſt autre choſe qu'une petite régle que l'on fait mouvoir le long de la ligne que l'on veut diviſer, ou un arc de cercle qui ſe meut avec l'Alidade autour du centre ſur l'arc qu'on veut diviſer. Cet arc mobile contient autant de parties moins une, qu'il y a de diviſions dans l'arc égal & correſpondant. Ainſi l'arc AG étant diviſé aux points B, C, D, E, F, de 10 en 10 minutes, & en 6 parties égales; le Nonius, ou l'arc inférieur doit être diviſé en 5 ou en 7. S'il eſt diviſé en 5, lorſque H marquée 1, ſera directement ſous F, on aura $\frac{1}{5}$ de AB, c'eſt-à-dire, 2 minutes; lorſque 2 ſera directement ſous E, on aura $\frac{2}{5}$ de AB, ou 4 minutes. Il n'y a que la première & la dernière diviſions marquées o, qui indiquent en tombant exactement ſur A & G, qu'il n'y a rien à ajouter aux 10 minutes de l'arc AB. Il en eſt de même de tous les autres arcs égaux BC, CD, DE, &c. qui ſe trouvent diviſés de la même manière.

On voit aſſez que ſi le Nonius étoit diviſé en 7 parties égales, chaque diviſion coïncidente avec une des 6 ſupérieures donneroit $\frac{1}{7}$ de AB, & que ſi AG étoit diviſé en 10 parties, & le Nonius par conſéquent en 9 ou en 11, il diviſeroit l'arc AB en neuvièmes ou en onzièmes, & ainſi des autres diviſions. La ſeule inſpection du Nonius & de ſon mouvement fera comprendre tout ce que je viens de dire beaucoup mieux qu'une explication plus étendue. Ceux qui voudront approfondir cette matière, peuvent lire ce que nous en avons dit dans la ſeconde partie de nos Mémoires de 1755.

III. Lorſqu'on aura bien examiné avec une loupe la concurrence du Nonius, c'eſt-à-dire, le degré & la minute de la hauteur du bord du ſoleil, on ajoutera à cette quantité le demi-diamètre de cet Aſtre, ſi l'on a obſervé par devant; on en retranchera le même demi-diamètre, ſi l'on a obſervé par derrière; & l'on

aura par ce moyen la *hauteur apparente* du centre. Le demi-diamètre du Soleil eſt plus petit au commencement de Juillet, qu'il ne l'eſt au commencement de l'année. Il eſt en Juillet de 15′ 45″, & en Janvier de 16′ 18″; parce que le Soleil eſt plus éloigné du centre de la Terre en Juillet qu'en Janvier. Ce demi-diamètre varie tous les jours, pour paſſer de 15′ 45″ à 16′ 18″. On peut cependant pour les uſages maritimes le ſuppoſer conſtamment de 16′.

Ce n'eſt là encore qu'une hauteur *apparente*; & pour avoir la hauteur *vraie* du centre, il faut retrancher de cette hauteur apparente l'inclinaiſon du rayon viſuel, lorſqu'on a obſervé par devant, & la réfraction occaſionnée par l'obliquité des rayons de lumière, qui nous font paroître l'Aſtre plus élevé qu'il n'eſt en effet. Si l'on a obſervé par derrière, il faut ajouter à la hauteur apparente l'inclinaiſon du rayon viſuel, & en retrancher la réfraction. Enfin ſi l'on a obſervé la hauteur de la Lune, il faut encore ajouter à la hauteur apparente de ſon centre ſa parallaxe.

Pour comprendre l'importance & la néceſſité de ces corrections, ſoit (fig. 16) HOR l'horiſon, Z le Zénith, O l'œil de l'obſervateur, M & *m* deux points de la mer au deſſous de l'horiſon, S le Soleil. Lorſqu'on obſerve par devant, on prend OM pour l'horiſon, & SM pour la hauteur du Soleil, quoique ſa hauteur ſur le vrai horiſon ſoit SR. Donc pour avoir cette hauteur, il faut ſouſtraire de la hauteur apparente SM, l'arc RM qui meſure l'inclinaiſon du rayon viſuel. Lorſqu'on obſerve par derrière, en tournant le dos au Soleil, on viſe au point oppoſé *m* de la mer, & l'on prend la ligne *m* O *n* pour l'horiſon. Par conſéquent la hauteur apparente ſur le faux horiſon eſt S*n*, plus petite que la hauteur SR ſur le vrai horiſon, de la quantité R*n*, qui eſt égale à RM ou à H*m*. Il faut donc alors ajouter à la hauteur S*n*, l'inclinaiſon du rayon viſuel, pour avoir la hauteur SR ſur le vrai horiſon.

Fig. 1

Remarque. Cela suppose que dans la vérification pour observer par derrière, on a fait coïncider sur le troisième miroir les deux points opposés de l'horison vrai H & R, ou deux points éloignés l'un de l'autre de 180°. C'est à quoi on ne sçauroit parvenir à cause de l'élévation de l'œil au dessus du niveau de la mer. Au lieu des points H & R, c'est réellement les points *m* & M que l'on fait coïncider, éloignés l'un de l'autre de 180° plus le double de l'inclinaison du rayon visuel. On peut corriger d'abord cette erreur dans la vérification même, en reculant l'Alidade au-delà de 0° de la quantité qui répond au double de cette inclinaison; & alors c'est le cas de faire ensuite à l'observation la correction que nous venons de prescrire. Cette méthode est même indispensable, lorsque l'œil de l'Observateur ne doit pas être à la même élévation dans l'observation que dans la vérification de l'Instrument. Mais si l'élévation de l'œil doit rester la même, on peut se contenter de cette fausse vérification, & retrancher de la hauteur trouvée, l'inclinaison du rayon visuel. L'un & l'autre revient au même.

De plus, le Soleil paroît en S, lorsqu'il est réellement un peu plus bas en S', par l'effet de la réfraction qui fait paroître tous les objets un peu plus hauts qu'ils ne sont effectivement. C'est une propriété de la lumière, qui étoit inconnue aux anciens Astronomes. Il faut donc retrancher encore de la hauteur apparente SR, la réfraction SS', pour avoir la vraie hauteur S'R.

Les Anciens connoissoient la *parallaxe*, qui est la différence entre la hauteur d'un Astre qui seroit vu du centre de la terre, & celle du même Astre vu de la surface de la terre. La parallaxe fait paroître les Astres plus bas qu'ils ne paroitroient du centre de la terre. Elle est contraire à la réfraction; mais il s'en faut bien qu'elle lui soit égale. Celle du Soleil est insensible. Celle de la Lune est presque d'un degré, lorsqu'elle se leve, ou qu'elle se couche. Elle varie tous les jours & à tous les momens du jour. On la trouve dans la *connoissance des mouvemens celestes*, qui s'imprime toutes les années. On ne peut pas s'en passer, lorsqu'on observe

la hauteur de la Lune. Ce livre ne donne que la parallaxe horisontale de la Lune. Il faut la calculer pour chaque degré de hauteur, en disant : comme le rayon est au cosinus de la hauteur, ainsi le sinus de la parallaxe horisontale est au sinus de celle qu'il faut ajouter à la hauteur apparente.

Exemple.

La parallaxe horisontale de la Lune est à Paris le 1er Janvier 1764, de 58.' 33." selon le livre de la *connoissance des mouvemens célestes*. On veut sçavoir quelle sera la parallaxe qu'il faut ajouter à 30° de hauteur. Faites cette régle de proportion.

Comme le rayon est au cosinus de la hauteur 30°	9.937531
Ainsi le sinus de la parallaxe horisontale 58′ 33″	8.231221
Est au sinus de la parallaxe requise 50′ 42″	8.168752

On voit qu'en négligeant une quantité aussi considérable, on tomberoit dans une erreur monstrueuse. On trouve dans le même Livre une Table du Diamètre horisontal de la Lune, qui répond à sa parallaxe horisontale.

On repéte aussi dans ce Livre toutes les années la Table des réfractions. Mais on n'y trouve point celle de l'inclinaison du rayon visuel, qui dépend de l'élévation de l'œil au-dessus de la Mer. Nous l'avons placée à la fin de cette Astronomie avec quelques autres Tables.

Octant de Mr. Caleb Smith.

IV. CEt Octant est, comme celui de Mr, Hadley, composé d'un demi-quart de cercle, ou d'un secteur de 45° divisé en 90 parties égales, d'une Alidade mobile sur le plan & autour du centre de l'Instrument, d'une lunette fixée sur l'un des demi-diamètres, ou parallèlement à l'un des deux, & d'un verre obscur pour affoiblir les rayons du Soleil. On voit sur le centre de cette Alidade, un miroir ou un prisme, qui y est attaché perpendiculairement,

& qui ne se meut qu'avec l'Alidade. Au-dessus ou à côté de celui-ci, un autre miroir, ou un autre prisme immobile est fixé dans le même sens sur le plan de l'Instrument, avec une petite vis à côté, pour l'amener à la situation qu'il doit avoir par rapport au premier miroir.

Les surfaces réfléchissantes des miroirs ou des prismes doivent être exactement perpendiculaires au plan de l'Octant. On les place dans le même rayon & obliquement à l'axe de la Lunette ou de la Pinnule qui est placée sur l'autre demi-diamètre. Le second miroir doit toujours rester immobile dans le tems de l'observation. Le seul miroir qui fait corps avec l'Alidade, se meut avec cette piéce, lorsqu'on fait usage de l'Octant. La moitié du champ de la Lunette doit être exposée aux rayons réfléchis de l'un des miroirs, & l'autre moitié à ceux qui viennent de l'autre miroir. Il arrivera delà que le rayon qui vient de l'horison sur le miroir fixe, sera réfléchi vers l'objectif de la lunette, & de là parviendra à l'œil de l'Observateur; tandisque le rayon qui tombe du Soleil sur le miroir mobile, se réfléchit pareillement du côté de l'objectif, & arrive à l'œil de l'Observateur, lequel voit en même tems l'Astre & l'horison, l'un & l'autre par une simple réfléxion.

Telle est la différence essentielle qui se trouve entre cet Octant & celui de M^r. Hadley. Avec l'Instrument de M^r. Hadley on voit l'horison directement, & l'image de l'Astre par une double réfléxion. Avec celui de M^r. Smith, tout ce qu'on voit, on le voit par réfléxion, & ce n'est jamais qu'une réfléxion simple.

Nous avons donné fort au long la théorie de cet Octant dans nos Mémoires de 1755. On le rectifie de la même manière que celui de M^r. Hadley, en rendant la surface du second miroir exactement parallèle à celle du premier.

La plus forte, ou peut être la seule objection qu'on ait faite jusques ici contre l'Octant de M^r. Smith, c'est que dans l'usage de cet Instrument l'Observateur est obligé de pointer sa lunette vers un endroit où l'objet n'est pas, afin de le voir là où il est. C'est ce qui a engagé les nouveaux

conſtructeurs à ſupprimer la lunette de cet Inſtrument & à placer les deux miroirs dans le même plan, l'un au-deſſus de l'autre.

J'en ai vu un conſtruit par le S^r^. Jean Brid à Londres, où à la place de la Lunette, on a mis un petit tuyau, dont l'ouverture du côté de l'œil eſt percée d'un petit trou pour ſervir de pinnule, & dont l'autre ouverture du côté du centre peut ſe fermer à moitié avec une virole qui porte un demi verre obſcur. Ce verre obſcur reçoit tous les rayons du Soleil qui tombent ſur le miroir mobile, tandis qu'on voit l'horiſon par la moitié vuide du tuyau. Cet Inſtrument n'a été conſtruit de cette manière, que pour prendre hauteur en tournant le dos au Soleil & à l'horiſon. On place le petit tuyau horiſontalement, autant qu'il eſt poſſible; on apperçoit d'abord l'horiſon de la Mer dans le miroir fixe, & l'on amene tout l'Inſtrument dans le plan de l'ombre qui tombe d'un rayon de l'Octant ſur l'autre rayon. On voit alors, en amenant l'Alidade, l'image du Soleil, dont le bord inférieur paroit toucher l'horiſon. Ce n'eſt pas là ce qu'on appelle *prendre hauteur par derrière*; car quoiqu'on tourne le dos au Soleil, on ne voit pas dans le miroir l'horiſon qui eſt du côté oppoſé au Soleil, mais celui qui eſt ſous le Soleil derrière l'Obſervateur.

La Figure 17 repréſente cet Inſtrument. Le rayon SC Fig. 17. du bord inférieur du Soleil tombant ſur le miroir inférieur AB, ſe réfléchit vers l'œil O ſelon la direction CO. Le rayon de lumière qui vient de l'horiſon H, tombant ſur l'autre miroir FE au-deſſus, ſe réfléchit parallélement à CO. L'Alidade marque ſur le limbe de l'Octant l'angle ACE que les deux miroirs forment enſemble, & qui eſt la moitié de la hauteur du bord inférieur du Soleil SCH.

Quartier Anglois.

V. IL arrive quelquefois aux Octans des accidens qui les rendent inutiles lorſqu'on eſt en Mer; les miroirs peuvent ſe ternir, ſe briſer & ſe déranger. L'horiſon eſt

33e année de son âge, la première année de la 114e Olympiade, le 3 du mois *Desii* (selon quelques Historiens) & selon d'autres, le 23 ou le 27 par rapport au Calendrier Julien, c'étoit le 20 Mai selon les uns, le 9 ou le 23 Juin selon les autres, & selon quelques uns le 25 Juillet. Mais les Astronomes qui ont emploié ces époques, comme *Albategnius* & autres la fixent au 12 Novembre un Dimanche à midi, le premier jour du mois *Egyptien Thoth*, 324 ans avant J. C. la 4390e année de la *Période Julienne*, 279 ans avant le commencement de l'*époque Julienne* & 424 ans Egyptiens complets après le commencement de l'Ere de *Nabonassar*.

L'Epoque des *Syriens* & *Caldéens* commença au regne de *Seleucus Nicator*, qui succéda à Alexandre le Grand & regna dans la Syrie & dans une partie de l'Afrique après la mort d'*Alexandre le Grand*.

L'*Epoque Julienne* adoptée par *Jules César* commença au premier Janvier, de l'année de la confusion, qui se trouva être un Mardi. Ce Prince voyant que les années établies par *Numa Pompilius*, second Roi de Rome, n'étoient que de 12 mois lunaires, & que cette division ne s'accordoit pas avec le Soleil, ordonna la 4e année de son Consulat, 708 ans après la fondation de *Rome*, la 731e année des Olympiades, 45 ans avant la Naissance de J. C., que désormais l'année seroit de 365 jours 6 heures, c'est ce qu'on appelle l'année Julienne.

L'*Ere Espagnole* commença durant le regne d'*Auguste*, la 7e année de l'*Ere Julienne*, 38 ans avant J. C., 715 après la fondation de Rome, & la 738e année des Olympiades. On dit que c'est à l'occasion de la division de l'Empire; l'*Espagne* fut donnée à *Auguste*, qui en prit d'abord possession & pour rendre ce jour mémorable, on le prit pour époque & l'on compta dans la suite, *Ab Exordio Regni Augusti*; ces quatre mots furent ensuite abrégés & réduits aux lettres initiales, ce qui fut, selon quelques Auteurs, l'origine du mot A E R A dont on se sert pour marquer les Epoques par où l'on commence à compter les années.

L'Epoque ſuivante ſelon l'ordre des tems & en même tems la plus fameuſe & la plus connue eſt celle qui commence à l'Incarnation de Notre Sauveur Jeſus-Chriſt ; & c'eſt pour cela qu'on la nomme l'*Ere Chrétienne.* Elle commence à minuit du 31 Décembre immédiatement après ſa Naiſſance qui fut un Samedi, la 4714^e année de la Période Julienne, 753 ans après la fondation de Rome, la 747^e année de Nabonaſſar, & 324 après la mort d'*Alexandre le Grand*, le Cycle ſolaire étant 10, le Cycle lunaire 2 & l'Indiction romaine 4.

Il y a d'autres époques moins uſitées, comme celle de l'Empereur *Diocletien* le 21 d'Avril, l'an 284 de J. C. la 4997^e année de la *Période Julienne.* On la nomme auſſi Epoque des *Ethiopiens*, *des Abiſſins* & des *Martyrs*, à cauſe de la grande perſécution que les Chrétiens eſſuyerent dans ce regne.

Il y a auſſi l'époque des *Turcs* qu'ils appellent *Hégire*, & qui commence par la fuite de *Mahomet* lorſqu'il ſortit de la *Mecque* pour aller à *Jebril* le Mardi 16 Juillet, la 622^e année de J. C., tems auquel *Mahomet* prêcha & répandit ſa fauſſe doctrine. Celle des *Perſans* qu'on nomme *Yezdegend* du nom de leur Roi qui mourut le Mercredi 16 Juin de l'année 632 de Notre Sauveur.

CHAPITRE III.

Des Inſtrumens les plus propres à obſerver la hauteur & l'Azimuth des Aſtres.

I. J'Abandonne aux Pilotes ignorans l'Arbaleſtrille ou la fléche, qui eſt le plus mauvais de tous les Inſtrumens à prendre hauteur. Comme les degrés en ſont inégaux, il eſt très-difficile de la diviſer, & encore plus de reconnoître ſi elle a été bien diviſée. De plus les marteaux ne ſont pas toujours exactement perpendiculaires à la fléche, ce qui peut produire une grande erreur. Les diviſions

de la plupart des degrés ſont très-petites, & on n'y diſtingue pas les minutes, comme dans les autres Inſtrumens, les marteaux s'uſent par les deux extrêmités ; la fléche ſe courbe, & la forme de cet inſtrument ne permet pas de le tenir avec aſſez de force, lorſque le vent eſt frais.

J'avois dit dans les Elémens de Pilotage que l'ombre des pinnules & marteaux ne donne que la hauteur du bord ſupérieur du Soleil. Cela eſt vrai en ne ſuppoſant point de pénombre ; mais l'expérience fait voir que la pénombre briſe les rayons du ſoleil, & qu'on n'a pas même la hauteur du bord ſupérieur de cet Aſtre, ce qui augmente l'erreur de pluſieurs minutes. Ainſi rien n'eſt plus défectueux que l'obſervation faite avec des pinnules qui ne ſont pas percées.

Le meilleur de tous les Inſtrumens à prendre hauteur, eſt l'Octant de M^r^. Hadley, ou celui de M^r^. Caleb Smith. M^r^. Hadley, propoſa ſon premier Octant en 1731, & il démontra qu'on pouvoit, avec cet Inſtrument, obſerver à une minute près la hauteur du Soleil, même dans les tems obſcurs qui rendent inutiles le quartier anglois & la fléche. Il fit voir qu'on pouvoit obſerver la hauteur du Soleil, lorſqu'il eſt aux environs du Zénith, avec autant de facilité & d'exactitude, que s'il étoit à peu de diſtance de l'Horiſon. C'eſt ce que nous avons démontré d'après ce ſçavant homme dans nos Mémoires de 1755.

Cet Inſtrument eſt compoſé d'un demi-quart de cercle, dont l'arc ou le limbe de 45 degrés eſt diviſé en 90 parties égales ou demi-degrés. Chacune de ces parties répond à un degré entier dans l'obſervation. Il porte une Alidade ou regle mobile ſur le centre pour marquer les diviſions. Proche du centre on place ſur cette Alidade un miroir plan fixé perpendiculairement au plan de l'Inſtrument. On a auſſi arreté ſur l'Octant un autre miroir plan plus petit. Lorſque l'Alidade eſt au commencement de la diviſion, ou à 0.° la ſurface du ſecond miroir doit être parallèle à celle du premier. La glace du petit miroir doit être tour-

née vers l'obſervateur, & celle du grand dans un ſens contraire. Lorſqu'on place une Lunette ſur l'Octant, il faut que ſon axe ſoit parallèle au plan de l'inſtrument, & qu'il paſſe par le milieu de l'un des bords du petit miroir, enſorte que la moitié du champ de la lunette reçoive les raïons refléchis par ce miroir, & que l'autre moitié ſoit expoſée à ceux qui lui viennent directement de quelque objet fort éloigné, par exemple, de l'horiſon de la mer. On place auſſi entre le grand & le petit miroir, un ou deux verres obſcurs encadrés dans un chaſſis qui tourne ſur une charnière ; on place ce chaſſis devant le grand miroir, lorſque la lumière du Soleil eſt trop vive.

Cet Inſtrument ſert à prendre tout angle qui ne va pas au-delà de 90.°, c'eſt-à dire, en obſervant par devant. Mais ſi l'on veut obſerver par derrière, ou prendre des angles depuis 90° juſques à 180°, il faut placer un troiſième miroir & une pinnule un peu plus bas. Enfin le petit miroir doit être fixé perpendiculairement à une plaque de cuivre ronde, dont le bord ſoit garni de dents, qui engrainent dans une vis ſans fin, pour lui donner une poſition convenable. La ſituation des deux petits miroirs par rapport au grand eſt différente ; le premier doit être parallèle au grand, & le ſecond doit lui être perpendiculaire, lorſque l'Alidade eſt ſur le point marqué 0°. la ſeule inſpection de la (figure 14) fera comprendre ce qu'on vient de dire. Fig. 14.

Avant que de faire aucune obſervation, il faut rectifier l'Inſtrument, c'eſt-à-dire, faire enſorte, lorſqu'on veut obſerver par devant, que le petit miroir ſoit exactement parallèle au grand & en même tems perpendiculaire au plan de l'Inſtrument ; car on ſuppoſe que le grand miroir eſt perpendiculaire à ce plan. Pour arriver à ce but, il faut placer l'Alidade ſur le point du limbe marqué 0.°, & l'ayant arrêtée à ce point par une vis, on viſera à l'horiſon de la mer à travers la partie tranſparente du petit miroir. Si cet horiſon vu directement ne fait qu'une ſeule & même ligne droite avec l'horiſon vû par réfléxion, le

petit miroir fera parallèle au grand. S'il ne l'eſt pas, on donnera un petit mouvement à la queue de cuivre qui eſt derrière le petit miroir ; on le fera tourner peu à peu, juſques à ce que les deux images de l'horiſon n'en faſſent qu'une. Cette verification ſe fait en tenant l'Octant perpendiculaire à l'horiſon. Si enſuite en l'inclinant tant ſoit peu ſur la droite ou ſur la gauche, l'objet vu par réfléxion paroît plus haut ou plus bas que l'objet vû directement, on ſera aſſuré que le petit miroir n'eſt pas perpendiculaire au plan de l'Octant, ſuppoſé que le grand lui ſoit perpendiculaire. Il faut donc le redreſſer : c'eſt à quoi ſervent les deux vis qu'on voit derrière les petits miroirs. Il faut les ſerrer ou les deſſerrer juſques à ce que les deux images de l'horiſon reſtent coïncidentes, en inclinant l'Octant à droite ou à gauche.

L'Alidade étant placée à o.°, il faudroit l'y fixer de manière qu'elle ne pût s'en écarter que quand on voudroit l'en tirer. Une petite vis introduite dans l'étrier qui eſt par deſſous, ſuffiroit pour cela. C'eſt ce qu'on ne trouve point dans les Octans conſtruits à Paris. On n'y trouve point non plus un petit bouton mis exprès pour arrêter l'Alidade au commencement de la diviſion. Il ſeroit cependant fort utile, & il épargneroit à l'Obſervateur le ſoin de mettre ſcrupuleuſement ſon Alidade au point o.°, lorſqu'il veut vérifier ſon Octant.

C'eſt à peu près la même préparation, quand on veut obſerver par derrière, & rectifier la poſition du troiſième miroir. On viſe à l'horiſon antérieur à travers la partie tranſparente du troiſième miroir, & on amene ſur la partie étamée l'horiſon poſtérieur vû par une double réfléxion, en ſorte que les deux horiſons ne faſſent qu'une ſeule ligne droite. Sur quoi voyez la remarque ci-après pag. 86.

II. Pour obſerver la hauteur d'un Aſtre ; après avoir vérifié l'Octant, 1.° ſi l'Aſtre eſt aſſez lumineux pour faire de l'ombre, on tâchera de tenir l'inſtrument de manière que l'ombre de ſon demi-diamètre extérieur, c'eſt-à-dire, de celui qui eſt le plus éloigné de l'Obſervateur, tombe

exáctement

exactement sur celui qui en est le plus proche, en observant par devant, & en dirigeant l'instrument vers l'horison de la mer. Par ce moyen le plan de l'Octant se trouvera tout d'un coup dans celui de l'Azimuth de l'Astre. L'expérience fera voir que cela n'a rien de difficile dans la pratique. Quand on observe par derrière, c'est l'ombre du demi-diamètre le plus proche de l'Observateur, qui doit tomber sur l'autre.

2°. Toutes choses étant dans l'état que nous venons de dire, l'observateur regardera l'horison à travers la glace transparente, & il fera avancer l'Alidade jusques à ce que la lumière de l'Astre venant à tomber sur le grand miroir, il voie son image par réflexion sur le petit miroir. Dès que l'image de l'Astre, ou de son bord inférieur paroîtra toucher l'horison de la mer, on arrêtera l'Alidade, qui marquera la hauteur du bord inférieur de l'Astre, ou sa distance au Zénith, complément de sa hauteur.

Cette pratique est entièrement la même, soit qu'on observe par devant, ou par derrière; avec cette seule différence, que quand on observe par devant, les objets conservent dans le petit miroir leur situation naturelle, & qu'ainsi en faisant toucher à l'horison, le bord inférieur d'un Astre, on trouve réellement la hauteur du bord inférieur; au lieu qu'en observant par derrière, les objets paroissent renversés; le bord de l'Astre qui paroît être le bord inférieur dans le miroir, en est réellement le bord supérieur; & ainsi on n'a que la hauteur du bord supérieur. Ce seroit tout le contraire, si au lieu d'une simple pinnule, on employoit une lunette à deux verres convexes; parce que ces sortes de lunettes renversent les objets.

3°. Quand l'Observateur aura arrêté l'image de l'Astre dans le miroir, ensorte que la ligne de l'horison soit tangente de l'un de ses bords, il ne faut pas qu'il se flatte aussi-tôt d'avoir trouvé la hauteur juste de ce bord. C'est à quoi les commençans doivent sur tout prendre garde. Il n'y a qu'une seule situation de l'Octant, où la hauteur que l'on cherche, soit donnée exactement; c'est lorsque

C'eſt ce qui a donné à Pierre Vernier ou à quelqu'autre l'idée du *Nonius*, qui n'eſt autre choſe qu'une petite régle que l'on fait mouvoir le long de la ligne que l'on veut diviſer, ou un arc de cercle qui ſe meut avec l'Alidade autour du centre ſur l'arc qu'on veut diviſer. Cet arc mobile contient autant de parties moins une, qu'il y a de diviſions dans l'arc égal & correſpondant. Ainſi l'arc AG étant diviſé aux points B, C, D, E, F, de 10 en 10 minutes, & en 6 parties égales; le Nonius, ou l'arc inférieur doit être diviſé en 5 ou en 7. S'il eſt diviſé en 5, lorſque H marquée 1, ſera directement ſous F, on aura $\frac{1}{5}$ de AB, c'eſt-à-dire, 2 minutes; lorſque 2 ſera directement ſous E, on aura $\frac{2}{5}$ de AB, ou 4 minutes. Il n'y a que la première & la dernière diviſions marquées 0, qui indiquent en tombant exactement ſur A & G, qu'il n'y a rien à ajouter aux 10 minutes de l'arc AB. Il en eſt de même de tous les autres arcs égaux BC, CD, DE, &c. qui ſe trouvent diviſés de la même manière.

On voit aſſez que ſi le Nonius étoit diviſé en 7 parties égales, chaque diviſion coïncidente avec une des 6 ſupérieures donneroit $\frac{1}{7}$ de AB, & que ſi AG étoit diviſé en 10 parties, & le Nonius par conſéquent en 9 ou en 11, il diviſeroit l'arc AB en neuvièmes ou en onzièmes, & ainſi des autres diviſions. La ſeule inſpection du Nonius & de ſon mouvement fera comprendre tout ce que je viens de dire beaucoup mieux qu'une explication plus étendue. Ceux qui voudront approfondir cette matière, peuvent lire ce que nous en avons dit dans la ſeconde partie de nos Mémoires de 1755.

III. Lorſqu'on aura bien examiné avec une loupe la concurrence du Nonius, c'eſt-à-dire, le degré & la minute de la hauteur du bord du ſoleil, on ajoutera à cette quantité le demi-diamètre de cet Aſtre, ſi l'on a obſervé par devant; on en retranchera le même demi-diamètre, ſi l'on a obſervé par derrière; & l'on

aura par ce moyen la *hauteur apparente* du centre. Le demi-diamètre du Soleil est plus petit au commencement de Juillet, qu'il ne l'est au commencement de l'année. Il est en Juillet de 15′ 45″, & en Janvier de 16′ 18″; parce que le Soleil est plus éloigné du centre de la Terre en Juillet qu'en Janvier. Ce demi-diamètre varie tous les jours, pour passer de 15′ 45″ à 16′ 18″. On peut cependant pour les usages maritimes le supposer constamment de 16′.

Ce n'est là encore qu'une hauteur *apparente*; & pour avoir la hauteur *vraie* du centre, il faut retrancher de cette hauteur apparente l'inclinaison du rayon visuel, lorsqu'on a observé par devant, & la réfraction occasionnée par l'obliquité des rayons de lumière, qui nous font paroître l'Astre plus élevé qu'il n'est en effet. Si l'on a observé par derrière, il faut ajouter à la hauteur apparente l'inclinaison du rayon visuel, & en retrancher la réfraction. Enfin si l'on a observé la hauteur de la Lune, il faut encore ajouter à la hauteur apparente de son centre sa parallaxe.

Pour comprendre l'importance & la nécessité de ces corrections, soit (fig. 16) HOR l'horison, Z le Zénith, O l'œil de l'observateur, M & *m* deux points de la mer au dessous de l'horison, S le Soleil. Lorsqu'on observe par devant, on prend OM pour l'horison, & SM pour la hauteur du Soleil, quoique sa hauteur sur le vrai horison soit SR. Donc pour avoir cette hauteur, il faut soustraire de la hauteur apparente SM, l'arc RM qui mesure l'inclinaison du rayon visuel. Lorsqu'on observe par derrière, en tournant le dos au Soleil, on vise au point opposé *m* de la mer, & l'on prend la ligne *m* O *n* pour l'horison. Par conséquent la hauteur apparente sur le faux horison est S*n*, plus petite que la hauteur SR sur le vrai horison, de la quantité R*n*, qui est égale à RM ou à H*m*. Il faut donc alors ajouter à la hauteur S*n*, l'inclinaison du rayon visuel, pour avoir la hauteur SR sur le vrai horison. Fig. 1

il eſt tenu bien verticalement, & que ſon plan ſe confond avec celui de l'Azimuth où eſt l'Aſtre. Toute autre ſituation donnera une hauteur trop grande ; parce que la vraie hauteur eſt toujours la plus petite. Ainſi quand l'Obſervateur aura fait toucher le bord de l'Aſtre à l'horiſon, s'il veut s'aſſurer de la bonté de ſon obſervation, il inclinera un peu ſon Octant, tantôt ſur la droite, tantôt ſur la gauche. Si dans ce double mouvement l'image de l'Aſtre paroît s'élever toujours au deſſus de la ligne horiſontale, il peut s'aſſurer que ſon obſervation eſt juſte. Mais ſi l'image de l'Aſtre paroît s'élever d'un côté au deſſus de l'horiſon, & de l'autre s'y enfoncer, il faudra reculer un peu l'Alidade vers 0°, de manière que l'Aſtre ne faſſe que raſer l'horiſon, de quelque côté qu'on incline l'inſtrument.

4.° Pour connoître ſi un Aſtre monte ou deſcend ; ſi l'on doit s'attendre à le voir paſſer par le méridien, ou s'il y a déja paſſé ; il faut prendre ſa hauteur exacte, & voir enſuite ſi l'Aſtre qui paroiſſoit raſer l'horiſon, paroît s'abaiſſer au deſſous, ou s'élever au deſſus. Dans le premier cas, ſa hauteur diminue, & il a déjà paſſé par le méridien ; dans le ſecond cas c'eſt tout le contraire.

5.° Après avoir ainſi obſervé la hauteur du bord d'un Aſtre, on reconnoitra ſur le limbe de l'Octant, les degrés & minutes marqués par l'Alidade. On reconnoit aiſément les degrés ; mais les minutes dépendent de la manière dont chaque degré eſt ſubdiviſé. Dans quelques Octans on a ſuivi l'ancienne méthode des tranſverſales, qui eſt fort connue, & qui eſt preſque indiſpenſable dans la diviſion du Quartier anglois. Chaque degré eſt diviſé en trois parties égales, qui par conſéquent valent chacune 20 minutes. Chacune de ces parties égales eſt ſubdiviſée de 2 en 2 minutes par dix cercles concentriques, qui ſont traverſés par une ligne oblique, qu'on nomme *tranſverſale*.

Lorſque l'Alidade rencontre le point où la tranſverſale coupe le premier cercle en haut, on compte 2 minutes de plus qu'on n'auroit compté ſi elle avoit rencontré le point le

plus élevé. Dans l'interſection du ſecond cercle, on compte 4 minutes de plus, & ainſi de ſuite juſques au cercle le plus bas.

Pluſieurs défauts qu'on a découverts dans les tranſverſales, ont déterminé les Géométres à employer dans leurs inſtrumens une autre diviſion qu'on appelle le *Nonius.* On trouvera dans la ſeconde partie de nos Memoires pour l'année 1755. l'hiſtoire & la critique des tranſverſales depuis la page 5 juſques à la fin de la page 28. Nous y avons dit d'après les Auteurs Anglois, pag. 18. qu'un illuſtre Fran-comtois nommé *Pierre Vernier* avoit inventé la méthode qu'on avoit attribuée juſqu'à préſent à *Pierre Nonius.* Il falloit dire que *Pierre Vernier* s'étoit attribué cette invention en 1631. Mais ſurement il n'en eſt pas le premier auteur. Car le Pere *Clavius* Jeſuite explique clairement les principes de cette méthode dans le premier Lemme de ſon traité des Aſtrolabes imprimé à Mayence en 1611, en cette manière.

Soit, dit-il, une ligne droite, ou un arc de cercle AB (fig. 15) qu'il faut diviſer en un nombre quelconque de parties égales. Prenez dans cette ligne prolongée, ou dans l'arc prolongé, autant de lignes égales à AB, que vous voulez avoir de diviſions, comme BC, CD, DE, EF, FG. Diviſez enſuite la ligne totale AG en autant de parties égales, AL, LK, KI, IH, HG, chacune de ces cinq parties égales contiendra la partie AB & encore $\frac{1}{5}$ de AB : car AG eſt à AL, comme AF eſt à AB ; c'eſt-à-dire que AL eſt ici contenu cinq fois dans AG, comme AB dans AF. Donc puiſque AG contient AF & $\frac{1}{5}$ de AF, AL contiendra AB & $\frac{1}{5}$ de AB. Donc BL eſt $\frac{1}{5}$ de AB. Donc, comme GH plus grand que AB, contient AB plus FH qui eſt $\frac{1}{5}$ de AB ; EI ſera $\frac{2}{5}$ de AB ; DK $\frac{3}{5}$; CL $\frac{4}{5}$. Donc ſi l'on fait couler AG ſur AB, lorſque F tombera ſur H, B tombera ſur $\frac{1}{5}$ de AB ; lorſque E tombera ſur I, B tombera ſur $\frac{2}{5}$ de AB ; lorſque D tombera ſur K, B tombera ſur $\frac{3}{5}$ de AB ; & lorſque C tombera ſur L, B tombera ſur $\frac{4}{5}$ de AB. Fig. 15

C'eſt ce qui a donné à Pierre Vernier ou à quelqu'autre l'idée du *Nonius*, qui n'eſt autre choſe qu'une petite régle que l'on fait mouvoir le long de la ligne que l'on veut diviſer, ou un arc de cercle qui ſe meut avec l'Alidade autour du centre ſur l'arc qu'on veut diviſer. Cet arc mobile contient autant de parties moins une, qu'il y a de diviſions dans l'arc égal & correſpondant. Ainſi l'arc AG étant diviſé aux points B, C, D, E, F, de 10 en 10 minutes, & en 6 parties égales; le Nonius, ou l'arc inférieur doit être diviſé en 5 ou en 7. S'il eſt diviſé en 5, lorſque H marquée 1, ſera directement ſous F, on aura $\frac{1}{5}$ de AB, c'eſt-à-dire, 2 minutes; lorſque 2 ſera directement ſous E, on aura $\frac{2}{5}$ de AB, ou 4 minutes. Il n'y a que la première & la dernière diviſions marquées 0, qui indiquent en tombant exactement ſur A & G, qu'il n'y a rien à ajouter aux 10 minutes de l'arc AB. Il en eſt de même de tous les autres arcs égaux BC, CD, DE, &c. qui ſe trouvent diviſés de la même manière.

On voit aſſez que ſi le Nonius étoit diviſé en 7 parties égales, chaque diviſion coïncidente avec une des 6 ſupérieures donneroit $\frac{1}{7}$ de AB, & que ſi AG étoit diviſé en 10 parties, & le Nonius par conſéquent en 9 ou en 11, il diviſeroit l'arc AB en neuvièmes ou en onzièmes, & ainſi des autres diviſions. La ſeule inſpection du Nonius & de ſon mouvement fera comprendre tout ce que je viens de dire beaucoup mieux qu'une explication plus étendue. Ceux qui voudront approfondir cette matière, peuvent lire ce que nous en avons dit dans la ſeconde partie de nos Mémoires de 1755.

III. Lorſqu'on aura bien examiné avec une loupe la concurrence du Nonius, c'eſt-à-dire, le degré & la minute de la hauteur du bord du ſoleil, on ajoutera à cette quantité le demi-diamètre de cet Aſtre, ſi l'on a obſervé par devant; on en retranchera le même demi-diamètre, ſi l'on a obſervé par derrière; & l'on

aura par ce moyen la *hauteur apparente* du centre. Le demi-diamètre du Soleil eſt plus petit au commencement de Juillet, qu'il ne l'eſt au commencement de l'année. Il eſt en Juillet de 15′ 45″, & en Janvier de 16′ 18″; parce que le Soleil eſt plus éloigné du centre de la Terre en Juillet qu'en Janvier. Ce demi-diamètre varie tous les jours, pour paſſer de 15′ 45″ à 16′ 18″. On peut cependant pour les uſages maritimes le ſuppoſer conſtamment de 16′.

Ce n'eſt là encore qu'une hauteur *apparente*; & pour avoir la hauteur *vraie* du centre, il faut retrancher de cette hauteur apparente l'inclinaiſon du rayon viſuel, lorſqu'on a obſervé par devant, & la réfraction occaſionnée par l'obliquité des rayons de lumière, qui nous font paroître l'Aſtre plus élevé qu'il n'eſt en effet. Si l'on a obſervé par derrière, il faut ajouter à la hauteur apparente l'inclinaiſon du rayon viſuel, & en retrancher la réfraction. Enfin ſi l'on a obſervé la hauteur de la Lune, il faut encore ajouter à la hauteur apparente de ſon centre ſa parallaxe.

Pour comprendre l'importance & la néceſſité de ces corrections, ſoit (fig. 16) HOR l'horiſon, Z le Zénith, O l'œil de l'obſervateur, M & *m* deux points de la mer au deſſous de l'horiſon, S le Soleil. Lorſqu'on obſerve par devant, on prend OM pour l'horiſon, & SM pour la hauteur du Soleil, quoique ſa hauteur ſur le vrai horiſon ſoit SR. Donc pour avoir cette hauteur, il faut ſouſtraire de la hauteur apparente SM, l'arc RM qui meſure l'inclinaiſon du rayon viſuel. Lorſqu'on obſerve par derrière, en tournant le dos au Soleil, on viſe au point oppoſé *m* de la mer, & l'on prend la ligne *m* O *n* pour l'horiſon. Par conſéquent la hauteur apparente ſur le faux horiſon eſt S*n*, plus petite que la hauteur SR ſur le vrai horiſon, de la quantité R*n*, qui eſt égale à RM ou à H*m*. Il faut donc alors ajouter à la hauteur S*n*, l'inclinaiſon du rayon viſuel, pour avoir la hauteur SR ſur le vrai horiſon. Fig. 1

Remarque. Cela ſuppoſe que dans la vérification pour obſerver par derrière, on a fait coïncider ſur le troiſième miroir les deux points oppoſés de l'horiſon vrai H & R, ou deux points éloignés l'un de l'autre de 180°. C'eſt à quoi on ne ſçauroit parvenir à cauſe de l'élévation de l'œil au deſſus du niveau de la mer. Au lieu des points H & R, c'eſt réellement les points *m* & M que l'on fait coïncider, éloignés l'un de l'autre de 180° plus le double de l'inclinaiſon du rayon viſuel. On peut corriger d'abord cette erreur dans la vérification même, en reculant l'Alidade au-delà de 0° de la quantité qui répond au double de cette inclinaiſon; & alors c'eſt le cas de faire enſuite à l'obſervation la correction que nous venons de preſcrire. Cette méthode eſt même indiſpenſable, lorſque l'œil de l'Obſervateur ne doit pas être à la même élévation dans l'obſervation que dans la vérification de l'Inſtrument. Mais ſi l'élévation de l'œil doit reſter la même, on peut ſe contenter de cette fauſſe vérification, & retrancher de la hauteur trouvée, l'inclinaiſon du rayon viſuel. L'un & l'autre revient au même.

De plus, le Soleil paroît en S, lorſqu'il eſt réellement un peu plus bas en S', par l'effet de la réfraction qui fait paroître tous les objets un peu plus hauts qu'ils ne ſont effectivement. C'eſt une propriété de la lumière, qui étoit inconnue aux anciens Aſtronomes. Il faut donc retrancher encore de la hauteur apparente SR, la réfraction SS', pour avoir la vraie hauteur S'R.

Les Anciens connoiſſoient la *parallaxe*, qui eſt la différence entre la hauteur d'un Aſtre qui ſeroit vu du centre de la terre, & celle du même Aſtre vu de la ſurface de la terre. La parallaxe fait paroître les Aſtres plus bas qu'ils ne paroîtroient du centre de la terre. Elle eſt contraire à la réfraction; mais il s'en faut bien qu'elle lui ſoit égale. Celle du Soleil eſt inſenſible. Celle de la Lune eſt preſque d'un degré, lorſqu'elle ſe leve, ou qu'elle ſe couche. Elle varie tous les jours & à tous les momens du jour. On la trouve dans la *connoiſſance des mouvemens celeſtes*, qui s'imprime toutes les années. On ne peut pas s'en paſſer, lorſqu'on obſerve

la hauteur de la Lune. Ce livre ne donne que la parallaxe horiſontale de la Lune. Il faut la calculer pour chaque degré de hauteur, en diſant : comme le rayon eſt au coſinus de la hauteur, ainſi le ſinus de la parallaxe horiſontale eſt au ſinus de celle qu'il faut ajouter à la hauteur apparente.

Exemple.

La parallaxe horiſontale de la Lune eſt à Paris le 1[er] Janvier 1764, de 58.′ 33.″ ſelon le livre de la *connoiſſance des mouvemens céleſtes.* On veut ſçavoir quelle ſera la parallaxe qu'il faut ajouter à 30° de hauteur. Faites cette régle de proportion.

Comme le rayon eſt au coſinus de la hauteur 30°	9.937531
Ainſi le ſinus de la parallaxe horiſontale 58′ 33″	8.231221
Eſt au ſinus de la parallaxe requiſe 50′ 42″	8.168752

On voit qu'en négligeant une quantité auſſi conſidérable, on tomberoit dans une erreur monſtrueuſe. On trouve dans le même Livre une Table du Diamètre horiſontal de la Lune, qui répond à ſa parallaxe horiſontale.

On répéte auſſi dans ce Livre toutes les années la Table des réfractions. Mais on n'y trouve point celle de l'inclinaiſon du rayon viſuel, qui dépend de l'élévation de l'œil au-deſſus de la Mer. Nous l'avons placée à la fin de cette Aſtronomie avec quelques autres Tables.

Octant de Mr. Caleb Smith.

IV. CEt Octant eſt, comme celui de Mr, Hadley, compoſé d'un demi-quart de cercle, ou d'un ſecteur de 45° diviſé en 90 parties égales, d'une Alidade mobile ſur le plan & autour du centre de l'Inſtrument, d'une lunette fixée ſur l'un des demi-diamètres, ou parallèlement à l'un des deux, & d'un verre obſcur pour affoiblir les rayons du Soleil. On voit ſur le centre de cette Alidade, un miroir ou un priſme, qui y eſt attaché perpendiculairement,

& qui ne se meut qu'avec l'Alidade. Au-dessus ou à côté de celui-ci, un autre miroir, ou un autre prisme immobile est fixé dans le même sens sur le plan de l'Instrument, avec une petite vis à côté, pour l'amener à la situation qu'il doit avoir par rapport au premier miroir.

Les surfaces réfléchissantes des miroirs ou des prismes doivent être exactement perpendiculaires au plan de l'Octant. On les place dans le même rayon & obliquement à l'axe de la Lunette ou de la Pinnule qui est placée sur l'autre demi-diamètre. Le second miroir doit toujours rester immobile dans le tems de l'observation. Le seul miroir qui fait corps avec l'Alidade, se meut avec cette piéce, lorsqu'on fait usage de l'Octant. La moitié du champ de la Lunette doit être exposée aux rayons réfléchis de l'un des miroirs, & l'autre moitié à ceux qui viennent de l'autre miroir. Il arrivera delà que le rayon qui vient de l'horison sur le miroir fixe, sera réfléchi vers l'objectif de la lunette, & de là parviendra à l'œil de l'Observateur; tandisque le rayon qui tombe du Soleil sur le miroir mobile, se réfléchit pareillement du côté de l'objectif, & arrive à l'œil de l'Observateur, lequel voit en même tems l'Astre & l'horison, l'un & l'autre par une simple réfléxion.

Telle est la différence essentielle qui se trouve entre cet Octant & celui de Mr. Hadley. Avec l'Instrument de Mr. Hadley on voit l'horison directement, & l'image de l'Astre par une double réfléxion. Avec celui de Mr. Smith, tout ce qu'on voit, on le voit par réfléxion, & ce n'est jamais qu'une réfléxion simple.

Nous avons donné fort au long la théorie de cet Octant dans nos Mémoires de 1755. On le rectifie de la même manière que celui de Mr. Hadley, en rendant la surface du second miroir exactement parallèle à celle du premier.

La plus forte, ou peut être la seule objection qu'on ait faite jusques ici contre l'Octant de Mr. Smith, c'est que dans l'usage de cet Instrument l'Observateur est obligé de pointer sa lunette vers un endroit où l'objet n'est pas, afin de le voir là où il est. C'est ce qui a engagé les nouveaux

conſtructeurs à ſupprimer la lunette de cet Inſtrument & à placer les deux miroirs dans le même plan, l'un au-deſſus de l'autre.

J'en ai vu un conſtruit par le S^r^. Jean Brid à Londres, où à la place de la Lunette, on a mis un petit tuyau, dont l'ouverture du côté de l'œil eſt percée d'un petit trou pour ſervir de pinnule, & dont l'autre ouverture du côté du centre peut ſe fermer à moitié avec une virole qui porte un demi verre obſcur. Ce verre obſcur reçoit tous les rayons du Soleil qui tombent ſur le miroir mobile, tandis qu'on voit l'horiſon par la moitié vuide du tuyau. Cet Inſtrument n'a été conſtruit de cette manière, que pour prendre hauteur en tournant le dos au Soleil & à l'horiſon. On place le petit tuyau horiſontalement, autant qu'il eſt poſſible; on apperçoit d'abord l'horiſon de la Mer dans le miroir fixe, & l'on amene tout l'Inſtrument dans le plan de l'ombre qui tombe d'un rayon de l'Octant ſur l'autre rayon. On voit alors, en amenant l'Alidade, l'image du Soleil, dont le bord inférieur paroit toucher l'horiſon. Ce n'eſt pas là ce qu'on appelle *prendre hauteur par derrière*; car quoiqu'on tourne le dos au Soleil, on ne voit pas dans le miroir l'horiſon qui eſt du côté oppoſé au Soleil, mais celui qui eſt ſous le Soleil derrière l'Obſervateur.

La Figure 17 repréſente cet Inſtrument. Le rayon SC Fig. 17. du bord inférieur du Soleil tombant ſur le miroir inférieur AB, ſe réfléchit vers l'œil O ſelon la direction CO. Le rayon de lumière qui vient de l'horiſon H, tombant ſur l'autre miroir FE au-deſſus, ſe réfléchit parallélement à CO. L'Alidade marque ſur le limbe de l'Octant l'angle ACE que les deux miroirs forment enſemble, & qui eſt la moitié de la hauteur du bord inférieur du Soleil SCH.

Quartier Anglois.

V. IL arrive quelquefois aux Octans des accidens qui les rendent inutiles lorſqu'on eſt en Mer; les miroirs peuvent ſe ternir, ſe briſer & ſe déranger. L'horiſon eſt

souvent embrumé au-dessous de l'Astre ; & les Octans ne sont guère propres à observer la hauteur du Soleil par derrière, en visant à l'horison opposé au Soleil. Il vaut mieux
Fig. 18. alors recourir au quartier Anglois (Fig. 18).

Il est composé de deux arcs AB, DE, de différens cercles, qui ont le même centre C, & qui pris ensemble font un quart de cercle. Le petit arc AB est ordinairement divisé en 60 degrés. L'arc DE de 30 degrés, se divise de deux en deux minutes par le moyen des transversales. On applique au centre C, une pinnule dont la fente est perpendiculaire au plan de l'Instrument. Cette fente doit être parallèle à l'horison, lorsqu'on observe. On arrête une seconde pinnule sur un degré fixe de l'arc AB, & l'on en fait couler une autre le long de l'arc DE. Celle-ci est percée d'un trou pour viser à l'horison, & on l'arrête lorsque le rayon du Soleil tombe exactement sur la pinnule du centre. La somme des deux arcs AF & OE mesure la distance apparente du Soleil au Zénith, parce que ces deux arcs forment le complément de la hauteur FCO du Soleil. C'est pour cela que les nombres qui marquent les degrés, commencent par zero aux points A & E, & qu'ils vont en croissant de chaque côté vers B & D.

Des autres Instrumens propres à observer la hauteur des Astres.

VI. LEs Instrumens à plomb sont inutiles à la Mer, à cause de l'agitation du Navire, qui ne permet pas au plomb de s'arrêter. On doit cependant s'en servir pour prendre la latitude de tous les Ports où l'on arrive. Car souvent l'Octant & le Quartier Anglois sont inutiles à terre, parce que l'horison n'est pas libre. D'ailleurs les Instrumens à plomb sont beaucoup plus exacts que les autres. Le plus simple de tous est le Quart de cercle, comme
Fig. 19. ABE (fig. 19). On le divise en degrés, & en minutes par le moyen des transversales. Il porte deux pinnules, ou

une lunette avec des fils croisés au foïer des verres, sur l'un de ses demi-diamètres A B. Le fil où est attaché le plomb D, est arrêté au centre C.

Pour s'en servir, il faut le tourner vers l'Astre S, de manière que le rayon S A B passe par les deux pinnules A & B. Alors le fil à plomb qui doit raser librement les degrés du Quart de cercle, marque au point G la distance FG de l'Astre au Zénith. Car l'angle F C G est égal à l'angle Z A S qui mesure la distance de l'Astre S au Zénith Z.

Il est facheux qu'on n'ait pas encore mis en usage le Quart de cercle de MM. Elton & de Radouais. Nous en avons donné la description dans nos Mémoires de 1755. Ces deux MM. ont substitué au fil à plomb & à l'horison de la Mer, le niveau à bulle d'air, qui ne se ressent pas autant à beaucoup près de l'agitation du Navire, que le fil à plomb.

Du Compas de Variation.

VII. L'Instrument le plus commun pour observer l'amplitude & l'azimuth du Soleil, est une espèce de Boussole, qu'on appelle *Compas de variation* parce qu'elle sert à déterminer la variation ou la déclinaison de l'aiguille aimantée. Le Compas de variation ne différe des boussoles ordinaires que par deux petites fenetres diamétralement opposées, par lesquelles on peut observer le lever & le coucher du Soleil ou d'une autre Planète. Chaque fenetre est divisée par un fil vertical, & les extrémités de ces deux fils sont jointes par un fil horisontal qui passe au-dessus du centre de la rose des vents.

Lorsqu'on veut observer l'amplitude d'un Astre, on place le Compas de variation, de manière que les deux fils qui sont aux fenetres, répondent au centre de l'Astre, lorsqu'il se leve, ou qu'il se couche ; on remarque en même-tems le point de la Rose des vents qui est coupé par le fil de la petite fenetre, & l'on voit quelle est l'amplitude

de ce fil, ou sa distance à l'Est ou à l'Ouest de la boussole. Si l'aiguille aimantée n'a point de variation, cette amplitude est celle de l'Astre qu'on observe. Si l'on connoit par le calcul l'amplitude de cet Astre, & si elle se trouve différente de celle qu'on observe, on aura par ce moyen la variation de l'aiguille aimantée. Si la vraie amplitude & l'amplitude observée sont de même espèce, toutes deux Nord, ou toutes deux Sud; il faut en prendre la différence, qui sera la variation. Si elles sont de différente espèce, l'une Nord & l'autre Sud, la somme des deux sera la variation de l'aiguille aimantée.

Du Compas Azimuthal.

VIII. POur observer l'Azimuth du Soleil, on place le Compas de variation en telle sorte que l'ombre du fil horisontal coupe la Rose des vents par le centre, & l'on remarque de combien de degrés cette ombre est éloignée du Nord ou du Sud de la boussole. Ce sera l'Azimuth du Soleil, s'il n'y a point de variation. Mais rien n'est plus défectueux que le Compas de variation pour une telle observation. On peut s'y tromper, sans s'en appercevoir, de 4 ou 5 degrés, lorsque le Soleil est fort élevé. C'est pour cela qu'on a imaginé le Compas azimuthal re-
Fig. 20. présenté par la figure 20. Il différe du Compas ordinaire de variation, en ce que sur la boëte ronde où est la Rose des vents, qui porte l'aiguille aimantée, on place un grand cercle de cuivre ou de bois, dont la moitié est divisée en 90°. Ces degrés sont marqués depuis le milieu de la division de part & d'autre de 10 en 10 jusqu'à 45°. Chaque degré est subdivisé en minutes par le moyen des transversales & de quelques cercles qui ont différens centres, & qui coupent ces lignes transversales. Le centre de ces 90.° se prend au point de la circonférence opposé à celui où commence la division. L'Alidade qui coupe ces degrés, tourne autour de ce centre. On éleve sur cette Alidade une grande pin-

nule, qui lui eſt perpendiculaire, & qui par le moyen d'une charnière peut ſe coucher & ſe lever ſelon le beſoin. On tend un fil depuis le haut de cette pinnule juſques au milieu de l'Alidade, pour marquer l'ombre que fait le Soleil ſur la ligne du milieu. En plaçant ainſi le centre de l'Alidade ſur la circonférence, les degrés deviennent auſſi ſenſibles, que ſi le diamètre du cercle étoit double.

Ce cercle de cuivre eſt diviſé par deux fils qui ſe coupent à angles droits, comme on le voit dans la figure ; & ces fils ſont ordinairement terminés par quatre lignes droites, que l'on a tracées en dedans de la boëte, pour ſervir à rectifier l'Inſtrument pendant le tems de l'obſervation en les comparant à quatre autres lignes droites, qui ſont auſſi perpendiculaires à la ſurface de la roſe des vents. Cette boëte eſt ſuſpendue par un double anneau de cuivre, comme toutes les Bouſſoles, dans une autre boëte quarrée.

Pour trouver l'Azimuth du Soleil, il faut commencer par rectifier le cercle de cuivre ou de bois, ſelon le tems de l'obſervation. Si c'eſt avant midi, on placera le centre de l'Alidade ſur le point d'Oueſt de la roſe, en ſorte que les quatre petites lignes qui ſont au bord de la roſe, concourent avec les quatre petites lignes qui ſont tracées au dedans de la boëte. Enſuite on tournera l'alidade vers le Soleil, de manière que l'ombre du fil tombe directement ſur la fente de la pinnule, & ſur la ligne qui eſt au milieu de l'Alidade. Alors le bord intérieur de l'Alidade marquera les degrés & minutes de l'Azimuth du Soleil. Par exemple, ſi l'Alidade marque 10 degrés du côté du Nord, le Soleil ſera éloigné de l'Eſt de la Bouſſole de 10 degrés, & du Nord de 80.°

Si le compas étant dans cette ſituation, l'Azimuth du Soleil n'étoit pas éloigné du Méridien, ou de la ligne Nord & Sud, au moins de 45 degrés, l'Alidade ne tomberoit ſur aucune des diviſions du compas. Il faudroit dans ce cas placer le centre de l'Alidade ſur le Nord, ou ſur le Sud, de la roſe, ſelon la poſition du Soleil.

Ce que l'on vient de dire de l'ufage de ce compas avant midi, doit s'entendre de même lorfque le Soleil eft du côté de l'Oueft, avec cette feule différence, qu'alors le centre de l'Alidade doit être placé fur le point d'Eft.

Les obfervations font plus exactes, lorfque le Soleil eft près de l'horifon, parce qu'on obferve alors plus aifément fon mouvement, qui eft beaucoup plus fenfible.

L'amplitude ne différe pas du complément de l'Azimuth du Soleil, lorfqu'il fe leve ou qu'il fe couche. Ainfi tout ce qu'on a dit de l'Azimuth, doit s'entendre de l'amplitude, avec cette feule différence que le Soleil ne faifant pas une ombre affez fenfible à fon lever & à fon coucher, il faut vifer par la fente de la pinnule, de manière que le fil paroiffe couper le Soleil par le milieu, lorfque fon bord inférieur eft au deffus de l'horifon d'une quantité égale à fon demi-diamètre. Alors l'Alidade marque fur le demi-cercle gradué, l'amplitude ortive ou occafe par rapport à la Bouffole.

C'eft par cette fente qu'on obferve l'Azimuth des Etoiles.

CHAPITRE IV.

Réfolution des problêmes Aftronomiques les plus utiles dans la Navigation.

PROBLEME. I.

Trouver le lieu du Soleil pour un tems vrai donné au Méridien de Paris?

I.° IL faut changer le tems vrai en tems moyen, par l'équation du tems, que l'on trouve dans la première table. C'eft la différence entre le tems vrai & le tems moyen. Il faut l'ajouter au tems vrai, ou la fouftraire, felon que la table l'indique, pour changer le tems vrai en

tems moyen. Il faut faire tout le contraire, pour changer le tems moyen en tems vrai.

2.° On trouvera dans la seconde table le lieu du Soleil pour le commencement de l'année donnée ; on y trouvera aussi le lieu de son apogée. Dans la troisième on prendra le mouvement du Soleil & de son apogée pour tous les jours de l'année à midi, & dans la quatrième pour toutes les heures, minutes & secondes.

3.° On fera deux colonnes de ces mouvemens, l'une pour la longitude du Soleil, & l'autre pour son apogée. On ajoutera tous les nombres de chaque colonne ; la première donnera la longitude moyenne du Soleil : & la seconde celle de son apogée.

4.° On soustraira le lieu de l'Apogée de la longitude moyenne du Soleil ; en augmentant celle-ci, s'il le faut, de 12 signes ; & le reste sera l'anomalie moyenne du Soleil, c'est-à-dire, sa distance à son apogée pour le tems moyen donné.

5°. Cette anomalie moyenne sert à trouver dans la table V. l'équation du centre, c'est-à-dire, la différence entre le lieu moyen du Soleil & le lieu vrai, qu'il faut ajouter à la longitude moyenne, ou qu'il en faut soustraire ; selon que la table l'indique, pour avoir la longitude vraie du Soleil.

La différence commune de toutes les longitudes moyennes du Soleil, est le mouvement diurne du Soleil, 59.′ 8.″ 3.‴

Application de la méthode à un Exemple.

ON demande le lieu du Soleil pour le 5. Mars 1764 à midi tems vrai, dans le Méridien de Paris.

Dans la Table 1^e^. on trouve que pour avoir le tems moyen au 5 Mars, il faut ajouter au tems vrai 11′. 47″. Il faut donc chercher la longitude moyenne du Soleil & de son apogée pour 1764, pour le 5 Mars, & pour 11′. 47.″ ajouter ces nombres, comme on voit ici.

	Longitude moyenne du Soleil	Apogée.
Epoque 1764.	9ſ. 10° 36.′ 42″	3ſ. 8.° 51.′ 37″
5. Mars.	2 3 4 53	11
Pour 11 minutes	27	3 8 51 48
Pour 47 ſecondes	2	11 13 42 4
	11 13 42 4	8 4 50 16 Anom. moy.
Equat. du centre	+ 1 44 50	
Longit. vraie	11 15 26 54	

Correction du tems moyen par la longitude vraie & par l'anomalie moyenne.

LA Table 6.^e^ donne l'équation du tems qui convient à l'Anomalie moyenne, & la Table 7.^e^ donne celle qui convient à la Longitude vraie. Ainſi dans l'exemple

8 ſ. 4° 50′ 16″ d'Anom. moy. donnent 7′ 1″ additive, en prenant la partie proportionelle,

Et la Longitude vraie donne 4 36 auſſi aditive

La ſom. des deux ſera l'équat. du tems 11 37 au lieu de 11′ 47″

Il faut donc retrancher de la long. vraie, 11 ſ. 15° 26′ 54″

Le mouvement de 10″, qui eſt 0 4‴.

Et la longitude vraie ſera 11 15 26 53 56.

L'équation du centre doit être retranchée de la longitude moyenne dans les premiers ſignes de l'Anomalie moyenne, depuis o juſques à V. ſ. incluſivement ; & il faut l'ajouter à la longitude moyenne dans tous les autres ſignes, depuis VI Juſques à XI. Les degrés de ces derniers ſignes vont en montant à main droite, & ceux des premiers ſignes vont en deſcendant à main gauche.

Il

Il faut souftraire ces équations du tems vrai dans les premiers signes depuis o jusques à V inclusivement, & les ajouter dans les autres signes, pour avoir le tems moyen. Il faut faire tout le contraire, pour changer le tems moyen en tems vrai.

Cette Table n'est autre chose que l'équation du centre changée en tems moyen du Soleil.

Il faut souftraire l'équation dans les signes marqués en haut, & l'ajouter dans les signes marqués en bas, pour changer le tems vrai en tems moyen, & le contraire pour changer le tems moyen en tems vrai.

Explication des Tables VIII & IX.

Elles sont fondées sur ce principe, que la révolution de l'Equateur de 360° en 24 heures, est par conséquent de 15° par heure, de 15 minutes de degré par minute d'heure, &c. L'usage en est facile. Par exemple, si l'on veut réduire en degrés & minutes de l'Equateur 2.^{h} 31.′ 15.″ On trouvera dans la Table VIII. à côté de 2^h 30.°

A côté de 31.′	7. 45.′
Et de 15.″	3. 45.″
La sommme est la réduction	37. 48. 45.

De même pour réduire en tems 37.° 48.′ 45.″

On trouve dans la Table IX. à côté de 37.°		2.^{h} 28.′
	De 48.′	3. 12.″
	Et de 45.″	3.
	La somme est	2. 31. 15.

PROBLEME. II.

Trouver la longitude du Soleil pour un Méridien plus Oriental ou plus Occidental que celui de Paris ?

PRenez la différence en longitude entre le Méridien propoſé & le Méridien de Paris ; réduiſez la en heures, minutes & ſecondes par le moyen de la Table IX, & cherchez dans la Table IV les mouvemens moyens du Soleil qui conviennent à cette différence en longitude. Vous les ajouterez à la longitude du Soleil pour Paris, ſi ce Méridien eſt à l'Occident de Paris ; & vous les retrancherez de la même longitude, ſi le Méridien propoſé eſt plus Oriental que celui de Paris.

Exemple.

Etant dans un Méridien plus Oriental que celui de Paris de 48°, on demande la longitude du Soleil pour le 5. Mars 1764 à midi.

Les 48.° de différence en longitude valent 3.^{h} 12.′ ſelon la Table IX. Le tems vrai donné eſt donc par rapport au Méridien de Paris & aux Tables Aſtronomiques, le 5 Mars à 3.^{h} 12′ avant midi, qu'il faut ſouſtraire de 24 heures, pour avoir le 4 Mars 20.^{h} 48.′ Or l'équation du tems ſelon la première Table eſt 11.′ 49″ qu'il faut ajouter au tems vrai. Il faut donc chercher la longitude du Soleil pour le 4 Mars 1764 à 20 heures 59.′ 49.″

Longitude moyenne.	
Epoque 1764	9.^{s} 10.° 36.′ 42″
4 Mars	2. 2 5. 45
20 heures	49. 17
59 minutes	2. 25. 23‴
49 ſecondes	2 0
Long. moy.	11. 13. 34. 11. 23
Equat. du centre	+ 1. 45. 21
Long. vraie	11. 15. 19. 32. 23

Apogée	
3^s. 8.° 51.′ 37″	
11	
3. 8. 51. 48	
11. 13. 34. 11. 23‴	
8.^{s} 4. 42. 23. 23	Anomalie moyenne.

Equation du tems pour l'Anomalie moyenne	7.' 0." 2
Pour la longitude vraie	4. 39. 9
Equation corrigée plus petite de 9" que celle de la 1e. Table	11'. 40." 1

& qui ne retranche que 0." 4.''' de la longitude vraie.

PROBLEME III.

La longitude du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison, son ascension droite, & l'angle de l'Ecliptique avec le Méridien ?

SOit (fig. 21) S le Soleil, ♈ l'un des équinoxes, S♈ l'écliptique, E♈ l'équateur, SE le cercle de déclinaison perpendiculaire à l'équateur. La longitude du Soleil étant connue, on aura sa distance S♈ au plus prochain équinoxe. On a aussi l'angle S♈E de l'obliquité de l'Ecliptique 23.° 28.' 20". Donc par le 2d Cas des triangles rectangles, on dira : Fig. 21

1.° Comme le rayon est au sinus du côté S♈, ainsi le sinus de l'angle ♈ de l'obliquité de l'écliptique est au sinus de la déclinaison SE.

2.° Comme le rayon est au cosinus de l'angle ♈, ainsi la tangente de S♈, est à la tangente de E♈, qui donnera l'ascension droite.

3.° Comme le rayon est au cosinus de S♈, ainsi la tangente de l'angle ♈ de l'obliquité de l'écliptique est à la cotangente de l'angle S de l'écliptique S♈ avec le Méridien SE.

Exemple.

La longitude du Soleil est 1.s 27.° 33.' 40." On demande sa déclinaison, son ascension droite & l'angle de l'écliptique avec le Méridien SE.

La distance S♈ du Soleil au plus prochain équinoxe, qui est ici le Bélier, est 57.° 33.' 40." Donc

1.° Le rayon est au sinus de S♈, 57.° 33.′ 40.″	9.926324
Comme le sinus de l'obliquité de l'écliptique 23.° 28.′ 20.″	9.600215
Est au sinus de la déclinaison SE, 19.° 38.′ 34.″	9.526539
2.° Le rayon est au cosin. de l'obliq de l'Eclipt. 23.° 28.′ 20.″	9.962489
Comme la tangente de S♈, 57.° 33.′ 40.″	0.196835
Est à la tangente de E♈, 55.° 16.′ 53.″	0.159324
3.° Le rayon est au cosinus de S♈, 57.° 33.′ 40.″	9.729489
Comme la tang. de l'obliquité de l'Ecliptique 23.° 28.′ 20.″	9.637726
A la cotangente de l'angle S, 76.° 53.′ 7.″	9.367215

La déclinaison trouvée est Nord, parce que le Soleil est dans les signes Septentrionaux. L'ascension droite du Soleil est dans le premier quart de l'Equateur, comme sa longitude est dans le premier quart de l'Ecliptique. Ainsi l'ascension droite est dans cet exemple 1.s 25.° 16.′ 33.″

On peut varier ce Probléme & cet exemple selon tous les différens cas des triangles sphériques rectangles ; ce qui peut aider les commençans à s'exercer dans le calcul des triangles, & à leur faire comprendre l'utilité & la facilité de cette méthode. En voici plusieurs Cas.

1. La déclinaison 19.° 38.′ 34.″ étant donnée, avec l'obliquité de l'écliptique, trouver la longitude & l'ascension droite du Soleil ?

C'est le 3e Cas des triangles rectangles. Le rayon est à la tangente de la déclinaison 19.° 38.′ 34.″ comme la cotangente de l'obliquité de l'écliptique est au sinus de l'ascension droite 55.° 16.′ 53.″

Le sinus de l'obliquité de l'écliptique est au sinus de la déclinaison, comme le rayon est au sinus de la longitude du Soleil, 57.° 33.′ 40.″

2. L'ascension droite du Soleil étant donnée, 55.° 16.′ 53.″ avec l'obliquité de l'écliptique, trouver la déclinaison du Soleil & sa longitude ?

Le rayon est au sinus de l'ascension droite 55.° 16.′ 53″, comme la tangente de l'obliquité de l'écliptique est à la tangente de la déclinaison du Soleil 19.° 38.′ 34.″

Le rayon est au cosinus de l'obliquité de l'écliptique, comme la cotangente de l'ascension droite 55.° 16.' 53." est à la cotangente de la longitude du Soleil, 57.° 33.' 40."

3. L'ascension droite du Soleil étant donnée avec sa déclinaison, trouver sa longitude, l'obliquité de l'écliptique & l'angle de l'écliptique avec le Méridien?

C'est le 5^e Cas des triangles rectangles.

4. La longitude du Soleil étant donnée avec sa déclinaison, trouver son ascension droite, l'obliquité de l'écliptique & l'angle S?

C'est le 1^er Cas des triangles rectangles.

5. La longitude du Soleil étant donnée, avec son ascension droite, trouver sa déclinaison, l'obliquité de l'écliptique & l'angle du Méridien avec l'écliptique?

C'est encore le 1^er Cas.

PROBLEME IV.

Trouver l'heure du passage d'une Etoile par le Méridien?

CHerchez dans le Catalogue des Etoiles, l'ascension droite de l'Etoile proposée, ayant égard à la variation annuelle. Ce Catalogue se réimprime tous les ans dans le Livre de *la connoissance des tems*, ou, *des mouvemens célestes.*

Cherchez aussi dans les Tables du Soleil, sa longitude vraie par la méthode du Probléme I., & son ascension droite par le Probléme III. La différence des deux ascensions droites sera l'angle du Méridien avec le cercle de déclinaison ou d'ascension droite de l'Etoile à midi. Cet angle réduit en tems, donnera l'espace compris entre midi & le passage de l'Etoile par le Méridien. Si l'ascension droite du Soleil est plus grande que celle de l'Etoile, elle sera à l'Occident du Soleil, & par conséquent elle passera par le Méridien avant le Soleil. Si elle est plus petite, l'Etoile sera à l'Orient du Soleil, & elle passera par le Méridien après le Soleil.

Si l'aſcenſion droite du Soleil ne varioit pas plus que celle de l'Etoile, cette méthode donneroit fort exactement le tems du paſſage de l'Etoile par le Méridien. Mais comme l'aſcenſion droite du Soleil varie tous les jours, & à toutes les heures du jour, il faut avoir égard à cette variation; c'eſt-à-dire qu'il faut calculer l'aſcenſion droite du Soleil pour l'inſtant trouvé du paſſage de l'Etoile par le Méridien, & prendre de nouveau la différence des aſcenſions droites, pour avoir exactement le tems du paſſage de l'Etoile par le Méridien.

Exemple.

On demande le tems du paſſage de l'Etoile polaire par le Méridien le 5 Avril 1764 à Paris.

L'aſcenſion droite de l'Etoile polaire étoit au commencement de 1760, ſelon la Catalogue des Etoiles, de 11.° 6.′ 4.″ Sa variation annuelle eſt de 51″, qui valent dans 4 ans & 3 mois, 3.′ 37.″ qu'il faut ajouter à l'aſcenſion droite qu'elle avoit au commencement de 1760; & ainſi cette aſcenſion droite ſera 11.° 9.′ 41.″ au mois d'Avril 1764.

On trouve par les tables du Soleil, ou par le Livre de *la connoiſſance des mouvemens Céleſtes*, que la longitude du Soleil étoit ce jour-là au Méridien de Paris 0.ſ 16.° 9.′ 35.″ donc pour avoir ſon aſcenſion droite, on dira par le Probléme III.

Le rayon eſt au coſ. de l'obliquité de l'écliptique	23.° 28.′ 20.″	9.962489
Comme la tangente de la longitude du Soleil	16.° 9.′ 35.″	9.462039
Eſt à la tangente de ſon aſcenſion droite	14° 53′ 3″	9.424528
D'où ôtant celle de l'Etoile polaire	11 9 41	
On aura l'angle du Mérid. & du cercle de déclin.	3 43 22, & en tems 14.′ 53″ ½.	

L'aſcenſion droite de l'Etoile étant moindre que celle du ſoleil, elle paſſera par la partie ſupérieure du Méridien 14.′ 53″ ½ avant le Soleil. La différence des longitudes du Soleil du 4 au 5 Avril eſt de 58.′ 37″; & prenant la partie proportionnelle pour 15′ ou ¼ d'heure, on trouve 37″ dont il faut diminuer la longitude du Soleil, qui ſera à 2 ſecondes près, 16.° 9.′ 0. On dira donc:

Comme le rayon est au cos. de l'obliquité de l'écliptique 9.962489
Ainsi la tang. de la vraie longitude du Soleil, 16.° 9.′ 0″ 9.461770

Est à la tang. de la vraie ascension droite 14.° 52.′ 31″ 9.424259
D'où il faut retrancher celle de l'Etoile 11 9 41

Pour avoir son angle horaire 3 42 50, & en tems 14.′ 51″ $\frac{1}{3}$.

PROBLEME V.

La longitude & la latitude d'une Etoile étant données, trouver son ascension droite & sa déclinaison ?

SOit EPQS (fig. 22) le colure des solstices, & dans sa circonférence P le pole du monde, Π le pole de l'écliptique, EQ l'équateur, ♋ ♑ l'écliptique, P♈S le colure des équinoxes, A une Etoile, PA un cercle de déclinaison ou d'ascension droite, ΠA un cercle de latitude ou de longitude, l'un perpendiculaire à l'équateur & l'autre à l'écliptique; l'arc PΠ = 23.° 28.′ 20″; la distance AΠ de l'étoile au pole de l'écliptique, complément de sa latitude; & l'angle PΠA de sa longitude par rapport au colure des solstices. On aura donc son ascension droite, APΠ relativement au même colure, & le complément PA de sa déclinaison, par le 3^e^. Cas des obliquangles. Fig. 22.

Exemple.

La longitude d'Aldebaran sera le 13 Novembre 1764, de 2.^s^ 6.° 30.′ 10″ & sa latitude 5.° 29.′ 0″ australe. On demande sa déclinaison & son ascension droite.

L'angle PΠA′ est le complément de la longitude A′Π♈ de cette Etoile, 66.° 30.′ 10″, il est donc = 23.° 29.′ 50.″ les deux côtés A′Π & PΠ sont

A′Π =	95.°	29.′	0″
PΠ =	23.	28.	20
Somme	118.	57.	20
Différence	72.	0.	40
Demi-somme	59.	28.	40
Demi-différence	36.	0.	20
A′ΠP =	23.	29.	50
½A′ΠP =	11.	44.	55

1.° Le sinus de la ½ somme	59.° 28.′ 40″	compl. arith.	0.064779
: Sinus de la demi-différence	36. 0. 20		9.769277
:: Cotang. de ½ A′ΠP.	11. 44. 55		0.681989
: A la tang. de la ½ différence des angles, 73.° 3.′ 3″			0.516045
Le cosinus de la ½ somme	59.° 28.′ 40″	compl. arith.	0.294245
: Au cos. de la demi-différence	36. 0. 20		9.907927
:: Cotang. de ½ A′ΠP	11. 44. 55		0.681989
: A la tang. de la ½ somme des angles		82.° 33.′ 40″	0.884161
Demi-différence		73. 3. 3	

A′PΠ opposé au plus grand côté est donc = 155. 36. 43
C'est le compl. de l'ascens. droite d'Aldebaran = 65. 36. 43, ♈PΠ étant de 90.°

2.° Le rayon est au cosinus de l'angle Π,	23.° 29.′ 50″		9.962407
:: La tangente de PΠ,	23.° 28.′ 20″		9.637726
: A la tangente de M	21. 42. 50	aigu	9.600133
ΠA′ =	95. 29. 0		
N =	73. 46. 10		

Le cosinus de M	21.° 42.′ 50″	compl. arith.	0.031964
: Au cosinus de N	73. 46. 10		9.446387
:: Le cosinus de PΠ	23. 28. 20		9.962489
: Au cosinus de PA′,	73. 58. 53		9.440840
Donc déclinaison Nord	16. 1. 7		

Remarque.

Comme les Etoiles n'ont aucun mouvement réel, elles auroient toujours la même longitude & la même latitude, si le colure des Equinoxes P♈ & le pole Π de l'Eclipti-

que étoient invariables. Mais le premier point du Bélier reculant continuellement contre l'ordre des ſignes, l'angle ♈ΠA de la longitude des Etoiles devient toujours plus grand. C'eſt ce qu'on appelle la *préceſſion des Equinoxes.* On a trouvé par un grand nombre d'obſervations, que cet angle des longitudes augmentoit toutes les années de 50.″ 3‴. Ce mouvement n'affecte pas la latitude des Etoiles, qui ne dépend que de la poſition du pole Π. Dans le ſiécle paſſé, on étoit perſuadé que la latitude des Etoiles fixes étoit invariable, parce qu'on ne s'étoit pas encore convaincu du mouvement du pole Π de l'écliptique qui s'approche peu à peu du pole du Monde. Il étoit éloigné de ce pole de 23.° 29′; & il n'en eſt à préſent éloigné que de 23.° 28.′ 20″. On a lieu de croire que cette diſtance ne ſera que de 23.° 28.′ 0.″ en 1776. C'eſt ce qui fait varier un peu la latitude des Etoiles, qui étant immobiles, paroiſſent s'approcher, ou s'éloigner du pole de l'Ecliptique, ſelon que ce pole s'approche ou s'éloigne d'elles.

PROBLEME VI.

L'aſcenſion droite & la déclinaiſon d'une Etoile étant données, trouver ſa longitude & ſa latitude?

L'Aſcenſion droite donne l'angle APΠ, la déclinaiſon donne la diſtance AP de l'Etoile au pole; & l'on a toujours la diſtance PΠ des deux poles. Donc par le 3^e^. Cas des obliquangles, on aura l'angle PΠA, qui donnera la longitude, & l'arc AΠ qui donnera la latitude de l'Etoile.

Exemple.

L'aſcenſion droite d'Aldebaran eſt 65.° 36.′ 43.″ ſa déclinaiſon Nord 16.° 1.′ 7.″ On demande ſa longitude & ſa latitude.

AP = 73.° 58.′ 53″ compl. de la déclinaif.
PΠ = 23. 28. 20

Somme 97. 27. 13
Différence 50. 30. 33

Demi-fomme 48. 43. 36 ½
Demi-différence 25. 15. 16 ½

APΠ = 155. 36. 43
½ APΠ = 77. 48. 21 ½

Le finus de la ½ fomme 48.° 43.′ 36″ ½ compl. arithm. 0.124031
: Au finus de la ½ différence 25.° 15.′ 16″ ½ 9.630063
:: La cotang. de ½ P 77. 48. 21 ½ 9.334652

: A la tang. de la ½ différence des angles 6.° 59.′ 36″ 9.088746

Le cofinus de la demi-fomme compl. arithm. 0.180686
: Au cofinus de la demi-différence 9.956371
:: La cotang. de ½ P 9.334652

: A la tang. de la ½ fomme des angles 16.° 30.′ 14″ 9.471709
Demi-différence 6. 59. 36

Le plus grand angle AΠP = 23. 29. 50
ϒΠA longitude & compl. de APΠ = 66. 30. 10, ou 2ˢ 6° 30′ 10″

Le rayon eft au cof. de APΠ, 155.° 36.′ 43″ 9.959409
:: La tangente de PΠ 23.° 28.′ 20″ 9.637726

: A la tangente de M 158. 25. 18, obtus 9.597135
PA = 73. 58. 53

N = 84. 26. 25

Le cofinus de M, 158.° 25.′ 18″ compl. arith. 0.031557
: Au cofinus de N 8.986248
:: Le cofinus de PΠ 9.962489

: Au cofinus de ΠA obtus 95.° 29.′ 0″ 8.980294

Ce qui fait voir que cette latitude eft Sud, quoique la déclinaifon foit Nord.

PROBLEME VII.

Etant données la latitude du lieu, la déclinaiſon & la hauteur d'un Aſtre, trouver l'heure? C'eſt le Probl. 1. de l'Aſtronomie Nautique.

SOit (fig. 23) Z le Zénith, P le Pole, A l'Aſtre connu. ZP, AP, AZ, ſont les complémens de la hauteur du Pole, de la déclinaiſon de l'Aſtre & de ſa hauteur. Ces trois complémens étant donnés, on trouvera l'angle horaire ZPA par le 1^er^. Cas des triangles obliquangles; & ayant trouvé par le Probl. IV, le tems du paſſage de l'Aſtre par le Méridien, on aura l'heure de l'obſervation. Fig. 23.

Exemple 1.

La latitude du lieu eſt 51.° 32.′ Nord; la déclinaiſon du Soleil Nord 19.° 39.′ 10″, & ſa hauteur 38.° 18.′ 46″, on demande l'heure.

ZP =	38.° 28.′ 0″	Complément de la latitude Nord
AP =	70. 20. 50	Complément de la déclinaiſon Nord
ZA =	51. 41. 14	Complément de la hauteur du Soleil
Somme	160. 30. 4	
½ ſomme	80. 15. 2	

—ZP =	38. 28. 0	Compl. arith. du ſinus de ZP	0.206168
1^er^. reſte =	41. 47. 2	Sinus du 1^er^. reſte	9.823685
—AP =	70. 20. 50	Compl. arith. du ſinus de AP	0.026065
2^d^. reſte =	9. 54. 12	Sinus du 2^d^. reſte	9.235494
		Somme	9.291412
Sinus de la moitié de l'angle horaire	26.° 15.′ 0″		9.645706

L'angle horaire eſt donc 52. 30 0 & en tems 3.^h 30.′ avant ou après midi, ſelon que le Soleil étoit à l'Eſt ou à l'Oueſt au tems de l'obſervation.

Exemple. 2.

A 43.° 18.′ de latitude Nord, le Soleil ayant 19.° 39.′ 10.″ de déclinaiſon Sud, on a obſervé ſa hauteur de 20.° 10′. On demande l'heure.

ZP =	46.° 42.′ 0″	Complément de la latitude
AP =	109. 39. 10	Compl. de la décl. Sud, ou distance au Pole Nord
AZ =	69. 50. 0	Compl. de la hauteur, ou distance au Zénith
Somme	226. 11. 10	
½ somme	113. 5. 35	

—ZP =	46. 42. 0	Compl. arith. du sinus de ZP	0.138004
1[er]. reste =	66. 23. 35	Sinus du 1[er]. reste	9.962044
— AP =	109. 39. 10	Compl. arithm. du sinus de AP	0.026065
2[d]. reste =	3. 26. 25	Sinus du 2[d]. reste	8.778210
		Somme	8.904323

Sinus de la moitié de l'angle horaire ZPA 16.° 27.′ 14″ 9.452161
L'angle horaire est donc 32. 54. 28, & en tems 2.ʰ 11.′ 37.″ 52‴.

Exemple 3.

Sous 51.° 32.′ de latitude Sud, la déclinaison du Soleil étant 23.° 28.′ Sud, & sa hauteur 47.° 40′, on trouvera, l'angle horaire 37.° 51.′ 38″, & en tems 2.ʰ 31.′ 26.″ 32‴.

Exemple 4.

Le 13 Novem. 1764 on a observé la hauteur d'Aldebaran 38° 58′ à l'Est du Méridien, la latitude ou hauteur du Pole Nord étant 51° 15′. On demande l'heure de l'observation.

L'ascension droite d'Aldebaran étoit en 1760 selon le Catalogue le plus récent de 65.° 32.′ 36.″ Elle augmente tous les ans de 51″ & en 4 ans 10 mois ½ de 4.′ 9″ donc son ascension droite étoit le 15 Novembre 1764, de 65.° 36.′ 45″.

Sa déclinaison étoit au commencement de 1760, de 16.° 0.′ 27″ Nord, & elle a augmenté de 8″ par an. Donc elle étoit le 13 Novembre 1764, de 16.° 1.′ 6.″; On a donc

PA =	73.° 58.′ 54″	Distance d'Aldebaran au Pole Nord
ZA =	51. 2. 0	Sa distance au Zénith
ZP =	38. 45. 0	Distance du Zénith au Pole Nord
Somme	163. 45. 54	
½ Somme	81. 52. 57	

— ZP =	38. 45. 0	Compl. arithm. du sinus de ZP	0.203479
1[er]. reste =	43. 7. 57	Sinus du 1[er]. reste	9.834878
— PA =	73. 58. 54	Compl. arithm. dn sinus de PA	0.017198
2[d]. reste =	7. 54. 3	Sinus du 2[d]. reste	9.138173
		Somme	9.193728

Sinus de la moitié de l'angle horaire ZPA = 23.° 16.′ 50″ 9.596864
Donc ZPA = 46. 33. 40 & en tems 3.ʰ 5.′ 14.″ 40‴.

La longitude du Soleil eſt le 13 Novembre 1764 à midi 7.ˢ 21.° 38.′ 52″. Pour avoir ſon aſcenſion droite à cette heure-là, on dira :

Le rayon eſt au coſinus de l'obliquité de l'Ecliptique	9.962489
: La tang. de la long. du Soleil depuis la Balance 51° 38′ 52″	0.101695
: A la tang. de ſon aſcenſ. droite depuis cet Equin., 49.° 13.′ 10″	0.064184
Ainſi l'aſc. droite du Soleil depuis le Bélier étoit 229. 13. 10	
D'où il faut ôter l'aſcenſion droite de l'Etoile 65. 36. 45	
Le reſte ſera la différence des deux Méridiens 163. 36. 25, ou 10.ʰ 54.′ 25.″ 40‴.	

L'aſcenſion droite de l'Etoile étant moindre que celle du Soleil, elle a paſſé ce jour-là au Méridien avant le Soleil, & par conſéquent à 1.ʰ 5.′ 34″ ⅗ ou ſelon la manière de compter

des Aſtronomes, à	13.ʰ 5.′ 34″ ⅕ après midi.
D'où il faut ôter l'angle ZPA qu'on a trouvé	3. 5. 14 ⅖
Pour avoir l'heure de l'obſ. qui ſera après midi	10.ʰ 0.′ 19 ⅖

Mais la longitude vraie du Soleil étoit à 10.ʰ de 7.ˢ 22.° 3.′ 50.″ ou 52.° 3.′ 50″ par rapport à l'Equinoxe d'Automne. Ainſi on dira de nouveau pour avoir ſon aſcenſion droite à cet inſtant :

Le rayon eſt au coſinus de l'obliquité de l'Ecliptique	9.962489
Comme la tangente de 52.° 3.′ 50.	0.108145
Eſt à la tang. de l'aſcenſion droite du Soleil depuis la Balance 49.° 38.′ 20.°	0.070634
L'aſcenſion droite du Soleil étoit donc alors	229.° 38.′ 20″
D'où il faut encore ôter celle de l'Etoile	65. 36. 45
Pour avoir l'angle des deux Méridiens	164. 1. 35, & en tems 10.ʰ 56.′ 6″ ⅕ avant midi,
C'eſt-à-dire, 1.ʰ 3.′ 53″ ⅘ après minuit, ou	13.ʰ 3.′ 53″ ⅕ après midi.
D'où retranchant comme ci-devant l'angle horaire ZPA,	3. 5. 14 ⅖
On aura l'heure corrigée	9.ʰ 58.′ 39″
Au lieu du tems qu'on avoit d'abord trouvé	10. 0. 19 ⅖
La différence eſt	1.′ 40″ ⅖

Remarque.

Cette méthode ſuppoſe que l'on connoiſſe du moins à peu près la longitude du lieu de l'Obſervation. Car ſi le Méridien du Navire étoit fort éloigné du Méridien de

Paris, l'ascension droite du Soleil seroit un peu plus petite ou un peu plus grande. Il faudroit néanmoins un éloignement de 150° ou de 10 heures, pour produire dans le tems une erreur de 1′ 40″, comme on le voit dans cet exemple.

PROBLEME VIII.

Connoissant la latitude du lieu, la déclinaison & la hauteur d'un Astre, trouver l'angle Azimuthal..... C'est le Probl. 2. de l'Astronomie Nautique.

Fig. 23. DAns le triangle APZ (fig. 23) ayant les trois côtés, on trouvera l'angle Z par le 1^er^. Cas.

Exemple 1.

Tout étant donné comme dans le premier Exemple du Probléme précédent, on trouvera la demi-somme des trois côtés. 80.° 15.′ 2″

— ZP =	38.	28.	0	Compl. arith. du sinus de ZP	0.206168
1^er^ reste =	41.	47.	2	Sinus du 1^er^ reste	9.823685
— ZA =	51.	41.	14	Compl. arith. du sinus de ZA	0.105331
2^d^ reste	28.	33.	48	Sinus du second reste	9.679546
				Somme	9.814730

Sinus de la moitié de AZP,	53°	53′	33	9.907365
AZP =	107	47	6	
Angle Azimuthal supplém. de AZP =	72	12	54	

Exemple 2.

Par les 43.° 18.′ de latitude Nord, le Soleil ayant 19.° 39.′ 10″ de déclinaison Sud, on a trouvé sa hauteur de 20.° 10.′ on demande son Azimuth.

La ½ som. des côtés est	113° 5′ 35″		
— PZ =	46 42 0	Compl. arith. du sin. de ZP	0.138004
1^er^. reste =	66 23 35	Sinus du 1^er^. reste	9.962044
— ZA =	69 50 0	Compl. arith. du sin. de ZA	0.027476
2^d^. reste =	43 15 35	Sinus du 2^d^. reste	9.835885
		Somme	9.963409
Sinus de la moitié de AZP =	73° 29′ 8″ $\frac{1}{5}$		9.981704
AZP =	146 58 16 $\frac{2}{5}$		
Donc angle Azimuthal =	33 1 43 $\frac{3}{5}$		

Exemple. 3.

Les mêmes choses étant données, comme dans l'Exemple 3. du Probléme précédent, on trouvera l'angle Azimuthal de 60.° 26.′ 18″.

Exemple 4.

La latitude étant 51.° 32.′ Nord, la déclinaison du Soleil 15.° 16.′ Sud, sa hauteur 19.° 17.′ on demande son Azimuth.

On trouvera par la même méthode 26.° 6.′ 22″.

Exemple 5.

La latitude est 51.° 15.′ Nord, la déclinaison d'*Aldebaran* 16.° 1.′ 6″ Nord, sa hauteur 38.° 58.′ 0.″ on trouvera son Azimuth 63.° 40.′ 58″.

PROBLEME IX.

La hauteur d'un Astre, sa déclinaison & son Azimuth étant donnés, trouver l'heure & la latitude? C'est le Probl. 3. de l'Astronomie nautique.

DAns le même triangle APZ (fig. 23), on a deux côtés, AZ complément de la hauteur, AP complément de la déclinaison, & l'angle Z opposé à AP. On aura donc ZP complément de la latitude, & l'angle horaire P par le 5^e^. Cas des obliquangles. Fig. 23.

Exemple 1.

La hauteur du Soleil eſt 38.° 18.′ 46.″ ſa déclinaiſon 19.° 39.′ 10″ Nord, ſon Azimuth 72.° 12.′ 54″. On demande la latitude & l'heure ?

Cet Azimuth eſt un angle aigu, ſon ſupplément AZP eſt obtus; ce qui rendra *m* & *n* obtus dans le 5^e^. Cas. On dira donc :

1. Le rayon eſt au coſinus de l'angle AZP, 107.° 47.′ 6.″	9.484934
:: La cotangente de la hauteur 38.° 18.′ 46.″	0.102310
: A la tangente d'un arc *m* obtus, 158.° 51.′ 51.″	9.587244
2. Le ſin. de la hauteur 38° 18′ 46″, ou coſ. de AZ Comp. arit.	0.207641
: Au ſinus de la déclin. 19 39 10, Coſinus de AP	9.526752
: : Le coſin. de l'arc *m* 158 51 51	9.969755
: Au coſin. de *n* obtus 120 23 51	9.704148

La différ. $m - n = ZP =$ 38 28 0 Complément de la latitude Nord 51.° 32.′ 0″.

3. Le coſ. de la déclin. 19° 39′ 10″, ou ſin. de AP Compl. arit.	0.026065
: Au coſ. de la hauteur 38 18 46, ou ſinus de AZ	9.894669
: : Le ſinus de AZP, ou de l'Azimuth 72.° 12.′ 54.″	9.978732
: Au ſinus de l'angle horaire 52.° 30.′ 0.″	9.899466

Ce qui vaut 3.^h^ 30.′ après ou avant midi, ſelon que le Soleil étoit à l'Oueſt ou à l'Eſt, c'eſt-à-dire, 3.^h^ 30.′ après midi ou 8.^h^ 30.′ après minuit.

Exemple 2.

La hauteur du Soleil eſt 20.° 10.′ ſon angle Azimuthal 33.° 1.′ 43″ $\frac{1}{3}$, & ſa déclinaiſon Sud 19.° 39.′ 10″. On demande la hauteur du Pole & l'heure.

m eſt obtus, & *n* aigu, parce que AP eſt obtus, la déclinaiſon étant Sud.

1. Le rayon eſt au coſin. de l'angle Azimuthal	33° 1′ 43″ $\frac{1}{3}$	9.923450
: : La cotangente de la hauteur	20 10 0	0.435017
: A la tangente d'un arc *m* obtus	113 39 23	0.358467

2. La

2. Le sinus de la hauteur	20°	10′	0″	Compl. arith.	0.462493
: Au sinus de la déclinaison	19	39	10		9.526752
: : Le cosinus de l'arc *m*	113	39	23		9.603416
: Au cos. d'un arc *n* aigu	66	57	22		9.592661
m—*n* = ZP compl. de la lat.	46	42	1	Latitude 43.° 18′.	

3. Le cos. de la décl.	19°	39′	10″	Compl. arith.	0.026065
: Au cos. de la hauteur	20	10	0		9.972524
:: Le sin. de l'Azimuth	33	1	43 $\frac{1}{3}$		9.736442
: Au sin. de l'ang. horaire 32	54	28	& en tems $2^h\ 8'\ 37''\ 52'''$		9.735031

Exemple 3.

La hauteur du Soleil est 12.° 30′. Le supplément de son Azimuth au Nord, 74.° 3.′ 11″. Sa déclinaison Nord 19.° 39.′ 10″. On demande la latitude & l'heure ?

On trouvera deux latitudes 51.° 32.′ 11.″ & 26.° 15.′ 51″. On choisira la plus vraisemblable. On aura l'angle horaire 85.° 24.′ 31.″ ou son supplément, qui valent en tems 5.ʰ 41.′ 38″, ou 6.ʰ 18.′ 22″.

Exemple 4.

La hauteur du Soleil est 49.° 40′, sa déclinaison Sud 23.° 28.′, le supplément de son Azimuth 119.° 33.′ 42″. On demande la latitude Sud ?

m est obtus, parce que AZP est obtus, *n* l'est aussi parce que AP est aigu, si la latitude est Sud. On trouvera 51.° 33.′ 0″ de latitude Sud.

Exemple 5.

La hauteur du Soleil est 19.° 37.′ sa déclinaison Sud 15.° 16.′, le supplément de son Azimuth 151.° 53.′ 38″. On demande la hauteur du Pole Nord ?

m est obtus, parce que AZP est obtus ; *n* est aigu, parce que AP est obtus. On trouvera la latitude Nord 51.° 32′.

Exemple 6.

La déclinaiſon d'*Aldebaran* eſt 16.° 1.′ 6″ Nord ; ſa hauteur 38.° 58.′ 0″ & ſon Azimuth 63.° 43.′ 58″ le 13 Novembre 1764. On demande l'heure & la latitude ?

On trouvera la latitude 51.° 15.′ Nord, & l'angle horaire 46.° 13.′ 40.″ & enſuite comme dans le Probl. VII, on aura l'heure de ſon paſſage par le Méridien, & l'heure de l'Obſervation 9.h 58.′ 39″.

PROBLEME X.

La latitude du lieu étant donnée, la déclinaiſon d'un Aſtre & ſon Azimuth, trouver l'heure ? C'eſt encore le Probl. 3. de l'Aſtronomie Nautique.

Fig. 23. DAns le triangle APZ (fig. 23), on connoit l'angle Z, & deux côtés ZP, AP, dont l'un AP eſt oppoſé à l'angle connu Z. On aura donc l'angle horaire P compris entre les deux côtés connus, par le 5e. Cas des obliquangles.

Exemple 1.

La latitude eſt 51.° 32.′ Nord, la déclinaiſon du Soleil 19.° 39.′ 10″ Nord, & l'angle Azimuthal 72.° 12.′ 54.″, trouver l'heure ?

1. Le rayon eſt au ſinus de la lat.	51°	32′	0″		9.893745
: : La tangente de l'angle AZP	107	47	6		0.493798
: A la cotangente d'un arc *m* obtus	157	43	18		0.387543
2. La cotang. de la déclinaiſon	19°	39′	10″	Compl. arit.	9.552817
: A la cotang. de la latitude	51	32	0		9.900086
: : Le coſinus de l'angle *m*	157	43	18		9.966307
: Au coſinus d'un autre arc *n* obtus	105	13	17		9.419210

L'angle horaire P eſt $= m - n =$ 52 30 1 en tems 3.h 30.′ 9.″ 4.‴ avant ou après midi, ſelon qu'on a obſervé l'Azimuth à l'Eſt ou à l'Oueſt du Méridien.

Exemple 2.

La latitude des *Barbades* eſt 13.° 30.′ Nord ; la déclinaiſon du Soleil au ſolſtice d'Eté 23.° 28.′ 20″ Nord, & le Soleil paroit O. N. O, ou E. N. E., c'eſt-à-dire que ſon Azimuth eſt à 22.° 30′ de l'Oueſt ou de l'Eſt, & 67.° 30′ du Nord. On demande l'heure ?

1. Le rayon eſt au ſinus de la lat.	13.° 30′		9.368185
: : La tangente de l'angle AZP	67. 30		0.382776
: A la cotang. d'un angle *m obtus*	119. 24. 18″		9.750961
2. La cotang. de la déclinaiſon	23° 28′ 20″	Compl. arit.	9.637726
: A la cotangente de la latitude	13 30 0		0.619646
: : Le coſinus de *m*	119 24 18		9.691064
: Au coſinus de *n obtus*	152 37 44		9.948436
La différence *n* — *m* = ZPA	33 13 26		
m + *n* eſt auſſi ſupplément de P	272 2 2		
qu'il faut ôter de	360 0 0		
pour avoir encore ZPA =	87 57 58		

C'eſt que le Soleil ſe trouve deux fois le matin, & deux fois le ſoir au même vertical, & à deux hauteurs différentes.

Exemple 3.

La déclinaiſon d'*Aldebaran* eſt 16.° 1.′ 6″ Nord, ſon Azimuth 63.° 40.′ 58.″ la latitude 51.° 15′. On demande l'heure, le 13 Novembre 1764.

On trouvera l'angle horaire 46.° 13.′ 40″, & l'heure comme ci-devant *Probl. VII.*

PROBLEME XI.

La hauteur du Pole étant donnée, la hauteur d'un Aſtre & ſon Azimuth, trouver l'heure ? C'eſt le Probl. 4. de l'Aſtronomie Nautique.

Dans le même triangle APZ (fig. 23) on connoit deux côtés, ZP, AZ, & l'angle compris Z. On aura donc les deux autres angles par le 3e. Cas des triangles obliquangles. Fig. 23.

Exemple.

La latitude eſt 51.° 32′ Nord, la hauteur du Soleil 38.° 18.′ 46.″ & ſon angle Azimuthal 72.° 12.′ 54″. On demande l'angle horaire P?

ZP eſt donc =	38.° 28.′ 0″
AZ =	51. 41. 14
Somme	90. 9. 14
Différence	13. 13. 14
Demi-ſomme	45. 4. 37
Demi-différence	6. 36. 37
AZP	107. 47. 6
½ AZP =	53. 53. 33

1. Le ſinus de la ½ ſomme	45° 4′ 37″	Compl. arith.	0.149933
: Sinus de la ½ différence	6 36 37		9.061133
: : La cotang. de ½ AZP	53 53 33		9.862973
: A la tang. de la ½ différence des angles	6° 45′ 47″		9.074039
2. Le coſ. de la ½ ſomme	45° 4′ 37″	Compl. arith.	0.151099
: Au coſinus de la ½ différen.	6 36 37		9.997103
: : La cotang. de ½ AZP	53 53 33		9.862973
: A la tang. de la ½ ſomme des angles	45° 44′ 13″		0.011175
Ajoutant leur ½ différence	6 45 47		
On aura ZPA	52 30 0,	& en tems 3.h 30.′ le ſoir, ou 8.h 30.′ le matin.	

PROBLEME XII.

La hauteur du Pole, la hauteur d'un Aſtre & l'angle horaire étant donnés, trouver l'angle Azimuthal? C'eſt le Probl. 4 de l'Aſtronomie Nautique.

Fig. 23. DAns le même triangle ayant ZP & AZ (fig. 23), avec l'angle horaire P oppoſé à ZA, on trouvera l'angle Azimuthal, ou ſon ſupplément Z par le 5e. Cas des obliquangles.

Exemple.

Sous la latitude Nord 51° 32′ on a trouvé à $3^h \frac{1}{2}$ après midi la hauteur du Soleil 38° 18′ 46. On demande l'Azimuth ?

1. Le rayon est au sinus de la latitude	51° 32′ 0″		9.893745
:: La tangente de l'angle horaire	52 30 0		0.115019
: A la cotangente d'un arc *m aigu*	44 25 19		0.008764
2. La cotang. de la hauteur	38° 18′ 46″	Compl. arith.	9.897690
: A la cotang. de la latitude	51 32 0		9.900086
:: Le cosinus de l'arc *m*	44 25 19		9.853823
: Au cosin. d'un arc *n aigu*	63 21 47		9.651599
AZP = *m* + *n* =	107 47 6		
Angle azimuthal =	72 12 54		

PROBLEME XIII.

La hauteur d'un Astre, son Azimuth & l'angle horaire étant donnés, trouver la latitude ? C'est encore le Probl. 4. de l'Astronomie Nautique.

On a ici deux angles Z & P, & le côté AZ opposé à l'angle donné. On aura donc le côté ZP compris entre les deux angles donnés, par le 6ᵉ. Cas des obliquangles.

Exemple 1.

A $3^h \frac{1}{2}$ après midi on a trouvé la hauteur du Soleil 38° 18′ 46″, & son Azimuth 72° 12′ 54″. On demande la latitude ?

1. Le rayon est au cos. de l'Azimuth	107° 47′ 6″	9.484934
:: La cotangente de la hauteur	38 18 46	0.102308
: A la tangente d'un arc *m obtus*	158 31 52	9.587242

2. La tang. de l'angle horaire	52°	30′	0″	Compl. arith.	9.884981	
: A la tang. de l'angle Azimuthal	72	12	54		0.493799	
: : Le sinus de l'arc *m*	158	51	52		9.556996	
: Au sinus de *n ambigu*	59	36	8		9.935776	
ou	120	23	52			
ZP compl. de la lat. $= m - n =$	38	28	0	latitude	51° 32′ Nord	
ou $=$	99	15	44	latitude	9 15 44″ Sud.	

Exemple 2.

A 6ʰ 18′ 22″ après midi, on a trouvé la hauteur du Soleil 12° 30′, & son angle Azimuthal AZP du Nord à l'Ouest 74° 3′ 11″. On demande la latitude.

1. Le rayon est au cos. de l'Azimuth	74°	3′	11″ aigu		9.438931
: : La cotangente de la hauteur	12	30	0		0.654245
: A la tangente d'un arc *m aigu*	51	5	58		0.093176
2. La tang. de l'angle horaire	94°	35′	30″	Compl. arith.	8.904779
: A la tangente de l'Azimuth	74	3	11		0.544025
: : Le sinus de l'arc *m*	51	5	58		9.891112
: Au sinus de *n ambigu*	12	38	5		9.339916
ZP est dans ce Cas $= m - n =$	38	27	53	latitude 51° 32′ 7″.	

PROBLEME XIV.

La hauteur d'un Astre, sa déclinaison & l'angle horaire étant donnés, trouver l'angle Azimuthal ? C'est le Probl. 5. de l'Astronomie Nautique.

Fig. 23. DAns le même triangle on a ZA (fig. 23) complément de la hauteur, AP complément de la déclinaison, & l'angle P opposé à ZA. On aura donc l'angle Z opposé à PA, par le 5ᵉ. Cas des obliquangles.

Exemple 1.

Le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaison Nord, on a trouvé à 3ʰ ½ après midi que sa hauteur étoit 38° 18′ 46″. On demande son Azimuth ?

Le cosinus de la hauteur	38° 18′ 46″	Compl. arith.	0.105331
: Au cosinus de la déclinais.	19 39 10		9.973935
: : Le sinus de l'angle horaire	52 30 0		9.899466
: Au sinus de l'Azimuth	72 12 54, ou 107° 47′ 6″		9.978732

Exemple 2.

Avec la même déclinaison, la hauteur du Soleil à 6^h 18′ 22″ étoit 12° 30′. Quel étoit son Azimuth ?

Le cosinus de la hauteur	12° 30′ 0″	Compl. arith.	0.010418
: Au cosin. de la déclinaison	19 39 10		9.973935
: : Le sinus de l'angle horaire	94 35 30		9.998604
: Au sinus de l'Azimuth	74 3 11, ou 105° 56′ 49″		9.982957

Remarque.

Lorsque l'un des angles donnés est droit, ou que l'un des côtés donnés est de 90°, on résoud plus aisément tous les Problémes précédens par la méthode des triangles rectangles, & ainsi

I.

La hauteur d'un Astre au Méridien de 6 heures étant donnée avec sa déclinaison, on trouve son Azimuth & la hauteur du Pole par le 1er. Cas des triangles rectangles, en cette manière : l'angle horaire ZPA étant droit, on dira 1. comme le sinus de AZ est au rayon, ainsi le sinus de AP est au sinus de AZP, semblable à AP.

2. Comme le cosinus de AP est au rayon, ainsi le cosinus de AZ est au cosinus de ZP.

Exemple 1.

La déclinaison du Soleil est 19° 39′ 10″ Nord, sa hauteur à 6 est 15° 16′ 4″. On demande son Azimuth & la hauteur du Pole Nord ?

1. Le sinus de AZ, cosinus de 15° 16′ 4″ Compl. arith.	0.015605
Est au rayon, comme le cosin. de la déclinaison 19° 39′ 10″	9.973935
Est au sinus de l'Azimuth 77° 28′ 30″.	9.989540

2. Le ſinus de la déclinaiſon	19° 39′ 10″	Compl. arith.	0.473248
Eſt au rayon, comme le ſinus de la hauteur	15° 16′ 4″		9.420501
Eſt au ſinus de la hauteur du pole Nord	51 32 0		9.893749

Exemple 2.

La déclinaiſon du Soleil étant la même 19° 39′ 10″, & ſa hauteur à 6 heures, 13° 20′ 8″ on trouvera par le même calcul, l'Azimuth 75° 25′ 50″, & la hauteur du Pole 43° 18′.

I I.

La latitude étant donnée avec la déclinaiſon du Soleil à 6 heures, on trouvera par le 5ᵉ. Cas des rectangles, l'angle Azimuthal, en diſant : le rayon eſt au ſinus de ZP, comme la cotangente de AP eſt à la cotangente de l'angle AZP.

Exemple.

Dans la latitude de 51° 32′ Nord, le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaiſon Nord, on demande ſon Azimuth à 6 heures ?

Le rayon eſt au coſ. de la latitude	51° 32′	9.793832
: : La tangente de la déclinaiſon	19 39 10″	9.552817
: A la cotangente de l'Azimuth	77 28 30	9.346649

I I I.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures étant donné, avec ſa déclinaiſon, trouver la hauteur du Pole ?

Dans le même triangle rectangle ayant un angle & un côté, on dira par le 3ᵉ. Cas : le rayon eſt à la tangente de AP, comme la cotangente de Z eſt au ſinus de ZP.

Exemple 1.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures eſt 77° 28′ 30″, ſa déclinaiſon 19.° 39′ 10″ on demande la latitude ?

Le rayon eſt à la cotang. de la déclinaiſ.	19°	39′	10″	0.447183
[illegible]omme la cotangente de l'Azimuth	77	28	30	9.346649
[illegible]t au coſinus de la hauteur du Pole	51	32	0	9.793832

Exemple 2.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures eſt 75° 26′ 50″, ſa dé-[illegible]naiſon 19° 39′ 10″. Quelle eſt la hauteur du Pole ?

[illegible]e rayon eſt à la cotang. de la déclinaiſ.	19°	39′	10″	0.447183
[illegible]mme la cotang. de l'Azimuth	75	26	50	9.414306
[illegible]au coſinus de la hauteur du Pole	43	22	15	9.861489

I V.

L'angle du Méridien avec le premier vertical étant droit, [illegible] a encore un triangle rectangle ; & ainſi la déclinaiſon [illegible]Soleil étant donnée dans le premier Vertical avec ſa [illegible]eur, on trouvera la latitude & l'angle horaire par le [illegible]as des rectangles.

Exemple 1.

[illegible]auteur du Soleil dans le 1^er^. Vertical eſt 25° 26′ 20″, [illegible] déclinaiſon 19° 39′ 10″. On demande l'heure & la latitu[illegible]?

1. L[illegible]s de la hauteur du Soleil	25°	26′	20″	Comp.arit.	0.366988
: Au ra[illegible]: le ſin. de la déclinaiſon	19	39	10		9.526752
: Au ſinu[illegible] la latitude	51	32			9.893740

2. Le c[illegible]s de la déclin.	19°	39′	10″	Compl. arith.	0.026065
: Au rayon [illegible]coſ. de la haut.	25	26	20		9.955709
: Au ſinus d[illegible]le horaire	73	31	0,	en tems 4^h 54′ 4″	9.981774

Exemple 2.

Avec la [illegible]déclinaiſon, la hauteur du Soleil dans le 1^er^. Vertical [illegible]9° 21′ 59″. Quelle eſt l'heure & la latitude ?

2. Le ſinus de la déclinaiſon	19° 39′ 10″	Compl. arith.	0.473248
Eſt au rayon, comme le ſinus de la hauteur	15° 16′ 4″		9.420501
Eſt au ſinus de la hauteur du pole Nord	51 32 0		9.893749

Exemple 2.

La déclinaiſon du Soleil étant la même 19° 39′ 10″, & ſa hauteur à 6 heures, 13° 20′ 8″ on trouvera par le même calcul, l'Azimuth 75° 25′ 50″, & la hauteur du Pole 43° 18′.

II.

La latitude étant donnée avec la déclinaiſon du Soleil à 6 heures, on trouvera par le 5ᵉ. Cas des rectangles, l'angle Azimuthal, en diſant : le rayon eſt au ſinus de ZP, comme la cotangente de AP eſt à la cotangente de l'angle AZP.

Exemple.

Dans la latitude de 51° 32′ Nord, le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaiſon Nord, on demande ſon Azimuth à 6 heures ?

Le rayon eſt au coſ. de la latitude	51° 32′	9.793832
: : La tangente de la déclinaiſon	19 39 10″	9.552817
: A la cotangente de l'Azimuth	77 28 30	9.346649

III.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures étant donné, avec ſa déclinaiſon, trouver la hauteur du Pole ?

Dans le même triangle rectangle ayant un angle & un côté, on dira par le 3ᵉ. Cas : le rayon eſt à la tangente de AP, comme la cotangente de Z eſt au ſinus de ZP.

Exemple I.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures eſt 77° 28′ 30″, ſa déclinaiſon 19.° 39′ 10″ on demande la latitude ?

Le rayon eſt à la cotang. de la déclinaiſ.	19° 39′ 10″	0.447183
Comme la cotangente de l'Azimuth	77 28 30	9.346649
Eſt au coſinus de la hauteur du Pole	51 32 0	9.793832

Exemple 2.

L'Azimuth du Soleil à 6 heures eſt 75° 26′ 50″, ſa déclinaiſon 19° 39′ 10″. Quelle eſt la hauteur du Pole ?

Le rayon eſt à la cotang. de la déclinaiſ.	19° 39′ 10″	0.447183
Comme la cotang. de l'Azimuth	75 26 50	9.414306
Eſt au coſinus de la hauteur du Pole	43 22 15	9.861489

IV.

L'angle du Méridien avec le premier vertical étant droit, on a encore un triangle rectangle ; & ainſi la déclinaiſon du Soleil étant donnée dans le premier Vertical avec ſa hauteur, on trouvera la latitude & l'angle horaire par le 1er. Cas des rectangles.

Exemple 1.

La hauteur du Soleil dans le 1er. Vertical eſt 25° 26′ 20″, ſa déclinaiſon 19° 39′ 10″. On demande l'heure & la latitude ?

1. Le ſinus de la hauteur du Soleil	25° 26′ 20″	Comp.arit.	0.366988
: Au rayon :: le ſin. de la déclinaiſon	19 39 10		9.526752
: Au ſinus de la latitude	51 32		9.893740
2. Le coſinus de la déclin.	19° 39′ 10″	Compl. arith.	0.026065
: Au rayon :: le coſ.de la haut.	25 26 20		9.955709
: Au ſinus de l'angle horaire	73 31 0	, en tems 4^h 54′ 4″	9.981774

Exemple 2.

Avec la même déclinaiſon, la hauteur du Soleil dans le 1er. Vertical eſt 29° 21′ 59″. Quelle eſt l'heure & la latitude ?

1. Le ſinus de la hauteur	29°	21′	59″	Compl. arith.	0.309456
: Au rayon :: le ſin. de la déclin.	19	39	10		9.526752
: Au ſinus de la latitude	43	18			9.836208

2. Le coſinus de la déclinaiſon	19°	39′	10″	Compl. arith.	0.026065
: Au rayon :: le coſ. de la haut.	29	21	59		9.940268
: Au ſinus de l'angle horaire	67	43	48		9.966333

V.

Dans le même triangle la déclinaiſon du Soleil étant donnée, & le tems de ſon paſſage par le 1^er^ Vertical ZA, on aura la latitude & la diſtance au Zénith par le 2^d^ Cas des rectangles.

Exemple.

Le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaiſon Nord, & étant dans le 1^er^. Vertical, à 4^h^ 54′ 4″ après midi, on demande ſa hauteur & la latitude ?

1. Le rayon eſt au coſinus de la déclinaiſon	19°	39′	10″	9.973935
:: Le ſinus de l'angle horaire	73	31	0	9.981774
: Eſt au coſinus de la hauteur du Soleil	25	26	20	9.955709

2. Le rayon eſt au coſ. de l'angle horaire	73°	31′	0″	9.452915
:: La cotangente de la déclinaiſon	19	39	10	0.447183
: A la cotangente de la latitude Nord	51	32	0	9.900098

V I.

Le Soleil étant dans l'Equateur, on aura un triangle dont un côté PA eſt de 90°. Or dans ce triangle, la *latitude* étant donnée & l'angle horaire, on trouvera la hauteur de l'Aſtre & ſon Azimuth par le 4^e^ Cas des rectangles, en prenant les angles pour les côtés oppoſés.

Exemple.

Soit la latitude 51° 32′, & l'heure 3^h^ ½ après midi : on demande la hauteur & l'Azimuth du Soleil dans l'Equateur ?

1. Le rayon eſt au coſ. de l'angle horaire	52° 30′	9.784447
: : Le coſinus de la latitude	51 32	9.793832
: Au ſinus de la hauteur	22 15 8″	9.578279

2. Le rayon eſt au ſinus de la latitude	51° 32′ 0″	9.893745
: : La cotangente de l'angle horaire	52 30 0	9.884980
: A la cotangente de l'Azimuth	59 0 10	9.778725

VII.

La latitude étant donnée avec la hauteur du Soleil dans l'Equateur, on trouvera ſon Azimuth & l'heure par le 6ᵉ. Cas des rectangles, en prenant encore les angles pour les côtés oppoſés.

Exemple.

La latitude étant 51° 32′ & la hauteur du Soleil dans l'Equateur 22° 15′ 8″, on demande l'heure & l'Azimuth ?

1. Le rayon eſt à la tang. de la hauteur	22° 15′ 8″	9.611890
: : La tangente de la latitude	51 32 0	0.099913
: Au coſinus de l'Azimuth	59 0 10	9.711803

2. Le coſinus de la latitude	51° 32′	Compl. arith.	0.206168
: Au rayon : : le ſinus de la hauteur	22 15 8″		9.578279
: Au coſinus de l'angle horaire	52 30 0		9.784447

VIII.

La hauteur du Soleil dans l'Equateur & ſon Azimuth étant donnés, on trouvera l'heure & la latitude par le 2ᵈ. Cas des rectangles, en prenant l'angle de l'Azimuth pour l'hypothénuſe.

Exemple.

La hauteur du Soleil dans l'Equateur eſt 22° 15′ 8″, ſon Azimuth 59° 0′ 10″, on demande l'heure & la latitude ?

1. Le rayon eſt au coſinus de l'Azimuth	59°	0′	10″	9.711804
: : La cotangente de la hauteur	22	15	8	0.388110
: A la tangente de la latitude	51	32	0	0.099914
2. Le rayon eſt au ſinus de l'Azimuth	59°	0′	10″	9.933078
: : Le coſinus de la hauteur	22	15	8	9.966388
: Au ſinus de l'angle horaire	52	30	0	9.899466

IX.

La hauteur du Soleil dans l'Equateur & l'heure étant données, on trouvera l'Azimuth & la latitude par le 3ᵉ. Cas des rectangles.

Exemple.

La hauteur du Soleil dans l'Equateur eſt 22° 15′ 8″ à 8$^h \frac{1}{2}$ du matin; on demande l'Azimuth & la latitude?

1. Le coſinus de la hauteur	22°	15′	8″ Compl. arit.	0.033612
: Au rayon : : le ſin. de l'angle horaire	52	30	0	9.899466
: Au ſinus de l'Azimuth	59	0	10	9.933078
2. Le coſinus de l'angle horaire	52°	30′	Compl. arith.	0.215553
: Au rayon :: le ſinus de la hauteur	22	15	8″	9.578279
: Au coſinus de la latitude	51	32		9.793832

X.

Fig. 23. Dans le même triangle APZ (fig. 23), lorſqu'un Aſtre ſe leve ou ſe couche, le côté AZ eſt de 90°. Donc la hauteur du Pole étant donnée avec la déclinaiſon d'*un* Aſtre, on trouvera l'heure de ſon lever ou de ſon coucher, avec le complément Z de ſon amplitude ortive ou occaſe, ſi l'on change les angles en côtés, par le 6ᵉ. Cas des rectangles.

Exemple 1.

La hauteur du Pole Nord eſt 51° 32′ & la déclinaiſon du Soleil Nord 19° 39′ 10″, on demande ſon amplitude & l'heure de ſon lever ou de ſon coucher.

1. Le cosinus de la hauteur du Pole	$51^\circ\ 32'\ 0''$	Comp. arit.	0.206168
: Au rayon : : le sin. de la déclinaison	19 39 10		9.526752
: Au sinus de l'amplitude, cosin. de Z,	32 43 43		9.732920

Cette amplitude est du côté du Nord dans les signes Nord; elle est Sud dans les signes Sud ; ainsi le Soleil se leve en Été (dans cet exemple) à l'ENE $10^\circ\ 14'$ Nord selon le langage des Marins, ou presque au NE$\frac{1}{4}$E, & il se couche presque au NO$\frac{1}{4}$O.

2. Le rayon est à la tang. de la déclinais.	$19^\circ\ 39'\ 10''$	9.552817
:: La tangente de la hauteur du Pole	51 32 0	0.099914
: Au cosinus de l'angle horaire obtus	116 42 42	9.652731

Cet angle est *obtus*, parce que AP est *aigu*, & donne en tems $7^h\ 46'\ 50''\ 48'''$ après midi pour le coucher, & avant midi pour le lever, c'est-à-dire $4^h\ 13'\ 9''\ 12'''$ après minuit.

Exemple 2.

La hauteur du Pole est $43^\circ\ 18'$ Nord, & la déclinaison Nord $19^\circ\ 39'\ 10''$. On demande l'amplitude & l'heure du lever & du coucher du Soleil ?

1. Le cosinus de la hauteur du Pole	$43^\circ\ 18'\ 0''$	Comp. arit.	0.138004
: Au rayon :: le sinus de la déclinaison	19 39 10		9.526752
: Au sinus de l'amplitude	27 31 26		9.664756

2. Le rayon : à la tang. de la déclinaison	$19^\circ\ 39'\ 10''$	9.552817
: : La tangente de la hauteur du Pole	43 18 0	9.974213
: Au cosinus de l'angle horaire obtus	109 39 58	9.527030

Et en tems $7^h\ 18'\ 40''$ pour le coucher, & le complément à 12^h pour l'heure du lever après minuit, $4^h\ 41'\ 20''$.

Si l'on double l'heure du coucher, on aura la longueur du jour, qui est ici $14^h\ 37'\ 20$; & si l'on double l'heure du lever, on aura la longueur de la nuit, dans cet exemple $9^h\ 22'\ 40''$.

Lorsque le Soleil n'a point de déclinaison, il n'y a point d'amplitude, & il se leve à l'Est à 6 heures du matin, il se couche à l'Ouest à 6 heures du soir dans tous les païs du

Monde, excepté sous les Poles. Plus on s'approche de l'Equateur, plus l'amplitude diminue sous la même déclinaison.

PROBLEME XV.

La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil, trouver le commencement de l'aurore, & la fin du Crépuscule ?

L'Aurore, ou la pointe du jour, commence, lorsque le Soleil est à 18° au dessous de l'horison avant son lever; parce qu'alors il commence à éclairer notre atmosphere & le crépuscule finit après son coucher, lorsqu'il est arrivé à la même distance de l'horison. C'est alors qu'on commence à voir les plus petites Etoiles, celles qu'on nomme de la 6e. grandeur.

Fig. 23. Dans le triangle ZAP (fig. 23), on a les trois côtés ZP, PA & ZA qui est de 108°. On aura donc l'angle ZP par le 1er. Cas des obliquangles.

Exemple.

La déclinaison est 19° 39′ 10″ & la latitude 51° 52′ de même espèce que la déclinaison, on demande le commencement de l'aurore.

AP =	70.°	20.′	50″	Complément de la déclinaison	
ZP =	38.	28.	0	Complément de la latitude	
ZA =	108.	0.	0	Complément de 18° sous l'horison	
Somme	216.	48.	50		
½ somme	108.	24.	25		
—ZP =	38.	28.	0	Compl. arith. du sinus de ZP	0.206168
1er. reste =	69.	56.	25	Sinus du 1er. reste	9.972821
—AP =	70.	20.	50	Compl. arith. du sinus de AP	0.026065
2d. reste =	38.	3.	35	Sinus du 2d. reste	9.789921
				Somme	9.994975
Sinus de ½ ZPA =	83.°	50.′	35″		9.997487
Angle horaire ZPA =	167.	41.	10	depuis midi	
Supplément	12.	18.	50	depuis minuit.	

Cet angle horaire réduit en tems depuis minuit, donne $0^h\ 49'\ 15''\ 20'''$ pour le commencement de l'aurore, & par conséquent la fin du crépuscule à $11^h\ 10'\ 44''\ 40'''$ du soir.

On a trouvé ci-devant (*Rem.* n°. X. *pag.* 125) que dans cette latitude & avec cette déclinaison, le Soleil se leve à $4^h\ 13'\ 9''$. Retranchant de ce tems celui du commencement de l'aurore $0^h\ 49'\ 15''$, on aura la durée de l'aurore & par conséquent celle du crépuscule $3^h\ 23'\ 54''$.

Cette durée varie tous les jours avec la déclinaison ; & pour trouver la déclinaison qui donne le plus court crépuscule pour une latitude donnée, on dira ;

Le rayon est à la tangente de la moitié de la distance	18°	9.199712
Comme le sinus de la hauteur du Pole	51 52'	9.893745
Est au sinus de la déclinaison du Soleil dans le plus court crépuscule 7° 7' 25''.		9.093457

Cette déclinaison est Sud pour la latitude Nord, parce que la durée du crépuscule est plus petite dans les signes opposés à la latitude que dans ceux de même espèce.

PROBLEME XVI.

Connoissant la réfraction horisontale d'un Astre, sa déclinaison & la hauteur du Pole, trouver l'amplitude apparente & le tems du lever & du coucher apparents de cet Astre ?

LA réfraction horisontale est la plus grande de toutes les réfractions. Elle fait paroitre le centre du Soleil dans l'horison, lorsqu'il est à 32 ou à 33 minutes au dessous de l'horison. Elle est plus grande dans les païs Septentrionaux que dans les païs Méridionaux. On ne peut la connoître assez exactement que par des observations réïterées. On l'a trouvée à Paris de 32', & à Londres de 33'. On a donc les trois côtés du triangle ZPA, dont le plus grand ZA est de 90.° 32' ou 33'. On trouvera les angles par le 1er. Cas des obliquangles.

Exemple 1.

La hauteur du Pole à Londres eſt 51° 32′ Nord. On demande l'amplitude apparente du Soleil, lorſque ſa déclinaiſon eſt 19° 39′ 10″ Nord, & l'heure de ſon lever ou de ſon coucher apparents.

PA =	70° 20′ 50″	Complément de la déclinaiſon
ZP =	38 28 0	Complément de la latitude
ZA =	90 33 0	Diſt. du Soleil au Zénith, lorſqu'il paroit à l'*hor.*
Somme	199 21 50	
½ ſomme	99 40 55	

— ZP =	38 28 0	Compl. arith. du ſinus de ZP	0.206168
1^er. reſte =	61 12 55	Sinus du 1^er. reſte	9.942720
— ZA =	90 33 0	Compl. arithm. du ſinus de ZA	0.000020
2^d. reſte =	9 7 55	Sinus du 2^d. reſte	9.200599
		Somme	9.349507

Sinus de la moitié de PZA	28° 13′ 17″		9.674754
Angle Azimuthal PZA =	56 26 34		
Ampl. apparente, ou Comp.	33 33 26		
Amplitude vraie	32 43 43	trouvée ci-deſſus (*Rem.* n°. X *pag.* 125 *Ex.* 1).	
Erreur produite par la réfr.	0 49 23	, qui a augmenté l'amplit. de 49′.	

Par la même méthode ou trouvera l'angle horaire ZPA = 117° 46′ 2″.

Et en tems	7^h 51 42″
On l'a trouvé ci-devant	7 46 51
Donc	0 4 51 l'erreur de la réfraction.

Exemple 2.

La hauteur du Pole Nord à Marſeille eſt 43° 18. Soit la déclinaiſon du Soleil 19° 39′ 10″ Nord, & la réfraction horiſontale 32′. On demande l'amplitude apparente, & l'heure du lever ou du coucher apparens du Soleil.

AP =

AP =	70° 20′ 50″	Distance du Soleil au Pole
ZP =	46 42 0	Complément de la latitude
AZ =	90 32 0	Distance du Soleil au Zénith, lorsqu'il paroît à l'horison
Somme	207 34 50	
½ somme	103 47 25	

− AP =	70 20 50	Compl. arith. du sinus de AP	0.026066
1er. reste =	33 26 35	Sinus du 1er. reste	9.741236
− ZP =	46 42 0	Compl. arithm. du sinus de ZP	0.138004
2d. reste =	57 5 25	Sinus du 2d. reste	9.924035
		Somme	9.829341

Sinus de la moitié de ZPA	55° 14′ 50″	9.914670
Donc l'angle horaire ZPA =	110 29 40 & en tems	7h 21′ 58″
On a trouvé ci-devant (*Rem.* X. *Ex.* 2. *p.* 125)		7 18 40
Erreur produite par la Réfraction		0 3 18

On trouvera par la même méthode, l'ang. PZA =	61° 54′ 22″
Son complément sera l'amplitude apparente	28 5 38
On a trouvé ci-devant (*p.* 125) l'amplit. vraie	27 31 26
L'erreur produite par la réfraction est donc	0 34 12

PROBLEME XVII.

Etant donnés le tems du lever ou du coucher apparent du Soleil, sa déclinaison & la hauteur du Pole, trouver la réfraction horisontale?

DAns le triangle ZPA (fig. 23), on connoit la distance PA du Soleil au Pole, celle ZP du Zénith au Pole, & l'angle horaire ZPA; on aura donc par le 3e. Cas des triangles obliquangles, la base ZA, dont le complément sera la réfraction horisontale. Fig. 23.

Exemple.

La hauteur du Pole Nord étant 43° 18′, la déclinaison du Soleil 19° 39′ 10″ Nord, on a trouvé par une Pendule bien reglée, que le tems vrai du coucher apparent du So-

leil étoit $7^h\ 21'\ 58''$ qui valent $110^\circ\ 29'\ 40''$. On demande la réfraction horisontale.

1. Le rayon est au cosin. de l'angle ZPA	110° 29′ 40″	9.544212
: : La cotangente de la latitude	43 18 0	0.025787
: A la tangente d'un arc M obtus	159 37 6	9.569999
AP =	70 20 50	
Donc N =	89 16 16	

2. Le cosinus de l'arc M	159° 37′ 6″	Compl. arith.	0.028078
: Au cosinus de ZP	46 42 0		9.836109
: : Cosinus de N	89 16 16		8.104527
: Au cosinus de ZA obtus	90 32 0		7.968814

Donc la réfraction horisontale est $32'\ 0''$

PROBLEME XVIII.

La hauteur Méridienne d'un Astre, c'est-à-dire, *sa plus grande ou sa moindre hauteur étant donnée, trouver la latitude ou hauteur du Pole ?*

Fig. 24. SOit (fig. 24) Z le Zénith, HO l'horison, LQ l'Equateur, P le Pole. Le demi-cercle, HLZPO représentera le Méridien, où les Astres arrivent dans leur plus grande hauteur; les Etoiles qui ne se couchent point, y arrivent aussi dans leur plus grand abaissement; par exemple, l'Etoile polaire, qui traverse tous les jours le Méridien en E au-dessus du Pole, & environ douze heures après en *e* au-dessous.

Un Astre peut se trouver en A dans le Méridien entre le Zénith & l'Equateur, en *a* entre l'équateur & l'horison, en E entre le Zénith & le pole, ou en *e* entre le pole & l'horison, ou dans le Zénith même, ou dans l'Equateur. S'il est en A entre le Zénith & l'équateur, on aura la latitude LZ, en ajoutant à sa déclinaison AL, sa distance au Zénith AZ. S'il est en *a* au-dessous de l'équateur, il faut retrancher sa déclinaison *a*L de sa distance au Zénith *a*Z, pour avoir la latitude LZ. S'il est en E

entre le Zénith & le pole, il faut retrancher de sa hauteur EO, le complément EP de sa déclinaison, pour avoir la hauteur du Pole PO. S'il est au-dessous du pole en *e*, il faut ajouter à sa hauteur *e*O, le complément *e*P de sa déclinaison, pour avoir la hauteur du pole PO. Enfin s'il est au Zénith, sa déclinaison LZ sera la latitude; & s'il est dans l'Equateur, sa distance LZ au Zénith sera la latitude.

La latitude sera Nord, si le pole visible P est le pole Nord; elle sera Sud si P est le pole Sud. On connoit par la boussole si le pole qui paroit au-dessus de l'horison, est Nord ou Sud. La fleur de lis tourne vers le pole Nord.

On peut connoitre la hauteur du pole par le moyen des Etoiles qui ne se couchent point, sans se servir de leur déclinaison. Car la demi-somme des deux hauteurs méridiennes EO, *e*O, de ces Etoiles sera la hauteur du pole PO, & la demi-différence de ces deux hauteurs, sera la distance de l'Etoile au pole EP.

Cette méthode est la plus courte, la plus commode & la plus sûre pour déterminer la latitude, qui est l'élément le plus important de la Navigation. On ne doit pas la borner à la hauteur méridienne du Soleil, comme font la plûpart de nos Pilotes. Toutes les Etoiles ont le même avantage, lorsque l'horison est visible. On trouve dans le Livre de *la Connoissance des mouvemens Célestes*, la déclinaison & l'ascension droite des Etoiles les plus brillantes. Leur ascension droite sert à faire connoitre le tems de leur passage par le Méridien (Probl. IV.), & leur déclinaison jointe à l'observation de leur hauteur méridienne, donne la latitude aussi exactement que la hauteur méridienne du Soleil. Elle la donne même dans un sens plus exactement, parce qu'on est plus assuré de leur déclinaison, qui varie très-peu, que de celle du Soleil, & que les Etoiles fort élevées n'ont presque point de réfraction. Les anciens se servoient beaucoup de l'Etoile polaire. Les Etoiles de la grande Ourse sont encore plus utiles dans leur hauteur méridienne, par rapport aux latitudes de la France, parce que leur distance au Pole les approche beaucoup du Zénith.

PROBLEME XIX.

Etant donné le tems que le Soleil employe à monter ou à descendre de tout son diamètre, trouver la hauteur du Pole, l'Azimuth du Soleil & l'heure?

Fig. 25. SOit A (fig. 25) le centre du Soleil, H son bord inférieur dans l'horison HO, ou dans quelque Almicantarath connu; O son bord supérieur dans le même horison HO, ou dans le même Almicantarath connu; & A' son centre sous l'Almicantarath, Z le Zénith, & P le pole. Le tems étant donné, on connoit l'angle horaire APA'; la déclinaison du Soleil donne AP, A'P. Donc par le 3^e^. Cas des obliquangles, on aura les angles A'AP, AA'P, & la base AA'. Les trois côtés connus du triangle AZA', donneront, par le 1^er^. Cas, ZAA'; & par conséquent on aura ZAP, & les deux côtés AZ, AP. Donc on aura, par le 3^e^. Cas, les angles P & Z, & la distance ZP du Zénith au Pole.

Exemple.

La distance du Soleil au pole Nord étant 66° 31′ 40″, on a trouvé le tems compris entre les momens où le bord inférieur & le bord supérieur ont touché l'horison, 7′ 20″ qui valent 1° 50′, son Diamètre étant 31′ 30″. On demande la latitude, l'heure & l'Azimuth.

Le triangle APA' est ici isoscéle; ainsi on peut le diviser en deux triangles égaux par un arc perpendiculaire au milieu de la base, & par le 2^d^. Cas des rectangles,

1. Le rayon est au sinus de PA	66° 31′ 40″	9.962489
Comme le sinus de ½ APA'	0 55 0	8.204070
Au sinus de ½ AA'	0 50 27	8.166559
2. Le rayon est au cosinus de PA	66° 31′ 40″	9.600215
: : La tangente de ½ APA'	0 55 0	8.204126
: A la cotangente de PAA'	89 38 5	7.804341

Triangle ZAA′

ZA′ =	90° 15′ 45″			
ZA =	89 44 15			
AA′ =	1 40 54			
Somme	181 40 54			
½ somme =	90 50 27			
− ZA =	89 44 15	Compl. arith. du sinus de ZA		0.000005
1^er^. reste =	1 6 12	Sinus du 1^er^. reste		8.284557
− AA′ =	1 40 54	Compl. arith. du sinus de AA′		1.532445
2^d^. reste =	89 9 33	Sinus du 2^d^. reste		9.999953
			Somme	9.816960
Sinus de ½ ZAA′,	54° 5′ 40″½			9.908480
ZAA′ =	108 11 21			

Triangle ZAP

ZA =	89° 44′ 15″	ZAA′ =	108° 11′ 21″
AP =	66 31 40	− PAA′ =	89 38 5
Somme	156 15 55		
Différence	23 12 35	ZAP =	18 33 16
½ somme	78 7 57½	½ ZAP =	9 16 38
½ différence	11 36 17½		

1. Le sinus de la ½ somme	78° 7′ 57″½	Compl. arithm.	0.009383
: Au sinus de la ½ différence	11 36 17½		9.303543
: : La cotangente de ½ ZAP	9 16 38		0.786886
: Tang. de la ½ diff. des ang.	51 31 36		0.099812
2. Le cosinus de la ½ somme	78° 7′ 57″½	Compl. arith.	0.686878
: Au cosinus de la ½ différence	11 36 17½		9.991031
: : La cotangente de ½ ZAP	9 16 38		0.786886
: A la tang. de la ½ somme des angl.	88 2 10		1.464795
½ Différence	51 31 36		
Le plus grand angle ZPA =	139 33 46		
Le moindre AZP =	36 30 34		
Angle Azimuthal	143 29 26		

Le rayon est au cosinus de l'angle ZAP	18° 33′ 16″	9.976818
: : La tangente de AP	66 31 40	0.362274
: A la tangente d'un arc M *aigu*	65 23 24	0.339092
ZA =	89 44 15	
Donc N =	24 20 51	

Le cosinus de M	65° 23′ 24″	Compl. arith.	0.380454
: Au cosinus de N	24 20 51		9.959547
: : Le cosinus de AP	66 31 40		9.600215
: Au sinus de la latitude	60 37 20		9.940206
ZP =	29 22 40		

Cette méthode est générale pour toutes les hauteurs du Soleil. Mr. *de Maupertuis* en donne une autre qu'il prétend être indépendante de la réfraction horisontale. Voyez les Problémes 16, 17 & 18 de l'Astronomie Nautique. Il faut retrancher du quarré du cosinus de la déclinaison du Soleil, le quarré du quotient du Diamètre du Soleil divisé par l'angle APA′. La racine quarrée de cette différence sera le sinus de la hauteur du Pole.

On peut simplifier cette méthode, en cherchant l'angle dont ce quotient est le sinus, & prenant la demi-somme & la demi-différence de cet angle & de la distance du Soleil au Pole; si l'on ajoute ensemble le sinus & le cosinus de la demi somme, le sinus & le cosinus de la demi-différence de ces deux arcs, la moitié de la somme de ces 4 logarithmes étant encore ajoutée au logarithme du nombre 2, donnera le sinus de la hauteur du Pole. Ainsi dans notre exemple

Logar. du Diamètre du Soleil	31′ ½		1.498311
Celui de l'ang. APA′, 1° 50′ ou 150′			2.041393
Le log. du quotient est le sin. de	16° 38′ 26″		9.456918
Distance du Soleil au Pole	66 31 40		
Somme	83 10 6	sin. de la ½ somme	9.821983
Différence	49 53 14	cosinus	9.873890
		sin. de la ½ différ.	9.625030
½ somme	41 35 3	cosinus	9.957474
½ différence	24 56 37		
		Somme	9.278377
		½ somme	9.639188
		+ logar. 2	0.301030
Sinus de la latitude	60° 37′ 20″		9.940218

Il est évident, ajoute Mr. *de Maupertuis* (Probl. 18) que la réfraction horisontale, quelque grande qu'elle soit, n'apporte ici aucune erreur. Car la réfraction ne fait ici

que transporter l'horison un peu plus haut qu'il n'est, ou le change dans un Almicantarath fort peu élevé. Cela est vrai, quoique dans la rigueur le calcul du Probl. 16 de Mr. *de Maupertuis* suppose le centre du Soleil dans l'horison.

Remarque.

L'expression de Mr. *de Maupertuis* est $S = \sqrt{yy - \frac{dH^2}{dE^2}}$, dans laquelle S est le sinus de la hauteur du pole, y le cosinus de la déclinaison du Soleil, dH son diamètre, & dE l'angle horaire. Or cette expression revient à celle-ci $S = \sqrt{\overline{y - \frac{dH}{dE}} \times \overline{y + \frac{dH}{dE}}}$; & l'on sçait qu'en prenant $\frac{dH}{dE}$ pour le sinus d'un angle, la différence des deux sinus y & $\frac{dH}{dE}$ est égale au double produit du cosinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence de ces deux angles, & que la somme des deux sinus est égale au double produit du sinus de la demi-somme par le cosinus de la demi-différence des mêmes angles. Soient a & b ces deux angles. Il est démontré que $\overline{\text{sin.}\,a - \text{sin.}\,b} \times \overline{\text{sin.}\,a + \text{sin.}\,b} = 2.\ \text{cos}.\frac{a+b}{2}.\ \text{Sin}.\frac{a-b}{2} \times 2.\ \text{sin}.\frac{a+b}{2}.\ \text{Cos}.\frac{a-b}{2}$; & puisque $S = \sqrt{\overline{\text{sin.}\,a - \text{sin.}\,b} \times \overline{\text{sin.}\,a + \text{sin.}\,b}}$, ou $= \sqrt{\text{sin.}\,a.\ \text{sin.}\,a. - \text{sin.}\,b.\ \text{sin.}\,b}$, la racine quarrée des deux doubles produits du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles, & du cosinus de la demi-somme par le cosinus de la demi-différence des mêmes angles, donne le sinus S de la hauteur du Pole.

PROBLEME XX.

La différence des Azimuths ou des Amplitudes entre les deux momens où le bord inférieur & le bord supérieur du Soleil touchent l'horison, étant donnée avec sa déclinaison; trouver la latitude, l'heure & la vraie amplitude?

Fig. 25. 1°. DAns le triangle AZA′ (fig. 25), on connoit *les* deux côtés AZ, A′Z, & l'angle compris AZA′, qui est la différence des Azimuths. On aura donc, par le 3ᵉ. Cas des obliquangles, les deux autres angles A & A′, & la base AA′.

2°. Dans le triangle APA′ on a les trois côtés; on aura donc, par le 1ᵉʳ. Cas, l'angle PAA′ & par conséquent ZAP.

3°. Dans le triangle ZAP ayant deux côtés & l'angle compris, on aura le reste par le 3ᵉ. Cas.

Exemple.

La distance du Soleil au Pole Nord, est 66° 31′ 30″, la différence AZA′ des Azimuths est 1° 35′ 52″. On demande la latitude?

Triangle ZAA′.

ZA′ =	90° 15′ 45″	
ZA =	89 44 15	
Somme =	180 0 0	½ AZA′ = 0° 47′ 56″.
Différence =	0 31 30	
½ somme =	90 0 0	
½ différ. =	0 15 45	

Le sin. de la ½ somme, ou le rayon est au sin. de la ½ différ.	7.661005
: : La cotangente de ½ AZA′	1.855628
: A la tangente de la ½ différence des angles 18° 11′ 21″	9.516633

Leur demi-somme est 90°, parce que le cosinus de 90° étant = 0, la tangente de la demi-somme est infinie; c'est la tangente de 90°. Donc ZAA′ = 108° 11′ 21″, comme dans l'exemple du Probléme précédent. On trouvera de même AA′ = 1° 40′ 54″ & ZAP = 18° 33′ 16″.

Le triangle AZP ayant deux côtés & un angle égaux à ceux du triangle AZP du même exemple ; on aura la même latitude 60° 37′ 20″.

REMARQUE

Sur les Problémes qui dépendent des Observations qui se font au Soleil, lorsqu'il se leve ou qu'il se couche.

Lorsque le Soleil est dans l'Equateur, il se leve & se couche à 6 heures par rapport à tous les habitans de la terre, excepté sous les Poles ; par conséquent l'angle P & l'angle Z (fig. 25), le côté AP & le côté AZ sont tous de 90°. Fig. 25.
Donc en quelque endroit que soit le Zénith dans le Méridien ZP, on aura toujours les mêmes quantités données. Donc on ne pourra pas conclure la latitude, le Probléme étant indéterminé, ou n'y ayant pas assez de données. Si l'on connoissoit l'angle A, on auroit ZP, parce que le sinus de cet angle est alors égal au sinus de ZP. On peut connoitre l'angle A, ou l'arc ZP, en mesurant le tems que le Soleil emploie à descendre sous l'horison de tout son diamètre. Car il se forme un triangle rectangle EQH (fig. Fig. 26.
26) dont l'hypothénuse EQ est l'arc de l'équateur décrit par le Soleil en traversant l'horison ; ce côté est égal au tems réduit en degrés. On a aussi le côté EH égal au demi-diamètre du Soleil. On dira donc : comme le sinus du tems EQ est au rayon, ainsi le sinus du diamètre EH, est au sinus de l'angle EQH, qui est la hauteur de l'équateur au-dessus de l'horison, ou le complément de la hauteur du Pole.

Par la même raison, lorsque le Soleil est dans l'équateur, on ne peut pas se servir de l'amplitude, qui disparoit alors. Mais dans les autres tems, pour avoir la vraie amplitude, il est bon d'observer le Soleil dans le moment où son bord inférieur paroit élevé au-dessus de l'horison de la moitié de son diamètre, parce que son diamètre étant d'environ 32′, & la réfraction horisontale étant aussi de 32′, son centre doit être alors dans l'horison.

Ces sortes d'Observations ne donnent pas une latitude bien exacte, parce que la réfraction horisontale varie d'un

païs à l'autre, & qu'elle varie aussi dans le même lieu en différens tems de l'année. Cependant elles sont utiles, lorsqu'on n'a pas pu observer le Soleil à midi.

A l'occasion du Probléme 16 de Mr. de Maupertuis, nous observerons qu'on peut le resoudre d'une manière différente de celle de cet Auteur, & qui soit à la portée de ceux qui ne sont pas versés dans l'Algébre. Le voici :

La hauteur du Pole & la déclinaison du Soleil étant données, trouver le tems qu'il emploie à s'élever au dessus de l'horison, ou à s'abaisser de tout son disque ?

Fig. 25. Les trois côtés ZA, ZP, AP du premier triangle (fig. 25) étant donnés, on aura l'angle ZPA par le 1er. Cas des obliquangles. On aura de même dans le second triangle, l'angle ZPA', & par conséquent leur différence APA'.

Exemple I.

AP =	66°	31′	40″		
ZA =	89	44	15		
ZP =	29	10	46		
Somme	185	26	41		
½ somme	92	43	20 ½		
— AP	66	31	40	Compl. arith. du sinus de AP	0.037511
1er. reste	26	11	40½	Sinus du 1er. reste	9.644853
—ZP	29	10	46	Compl. arith. du sinus de ZP	0.311984
2d. reste	63	32	34½	Sinus du 2d. reste	9.951952
				Somme	9.946300
Sinus de ½ ZPA	70°	3′	35″	½ somme	9.973150
ZPA =	140	7	10		

2d. *Triangle.*

A'P =	66°	31′	40″		
ZA' =	90	15	45		
ZP =	29	10	46		
Somme	185	58	11		
½ somme	92	59	5 ½		
— A'P =	66	31	40	Compl. arith. du sinus de A'P	0.037511
1er. reste	26	27	25 ½	Sinus de 1er. reste	9.648874
— ZP =	29	10	46	Compl. arithm. du sinus de ZP	0.311984
2d. reste	63	48	19 ½	Sinus du 2d. reste	9.952937
				Somme	9.951306

Sinus de ½ ZPA'	70° 59' 36"	½ somme	9.975653
Donc ZPA' =	141 59 12		
— ZPA =	140 7 10		
APA' =	1 52 2		

Exemple 2.

Le Soleil étant dans l'Equateur à 80° de latitude, on demande le tems qu'il emploie à se lever ou à se coucher, en supposant son diamètre de 31' 30"?

A'P =	90° 0' 0"		
ZA' =	90 15 45		
ZP =	10 0 0		
Somme	190 15 45		
½ somme	95 7 52 ½		
— A'P =	90 0 0	Compl. arith. du sinus	0
1er. reste =	5 7 52 ½	Sinus	8.951520
— ZP =	10 0 0	Compl. arithm. du sinus	0.760330
2d. reste =	85 7 52 ½	Sinus	9.998430
		Somme	9.710280

Sinus de ½ A'PZ =	45° 45' 21"	½ somme	9.855140
Donc A'PZ =	91 30 42		
On trouve de même APZ =	88 29 18		
Ce qui donne A'PA =	3 1 24, & en tems 12' 5" ⅗		

La méthode que donne Mr. de Maupertuis (*Astron. Naut. Probl.* 16) est tirée du calcul différentiel. Il démontre que la racine quarrée de la différence des quarrés du cosinus de la déclinaison & du sinus de la hauteur du pole est au rayon, comme le diamètre du Soleil est au tems requis. Pour trouver par les logarithmes, le premier terme de cette Analogie, il faut prendre la demi-somme & la demi-différence de la distance du Soleil au Pole & de la hauteur du pole; ajouter ensemble le sinus & le cosinus de la demi-somme, le sinus & le cosinus de la demi-différence, prendre la moitié de la somme de ces quatre logarithmes, & ajouter à cette moitié le logarithme de 2. Vous aurez par ce moyen le logarithme de la racine quarrée requise, &

enſuite le tems cherché, en faiſant l'Analogie précédente. Ainſi dans le dernier exemple.

Diſtance du Soleil au Pole	90°	$\frac{1}{2}$ ſomme	85°	Son ſinus	9.998344
Hauteur du Pole	80			Son coſinus	8.940296
Somme	170	$\frac{1}{2}$ differ.	5°	Son ſinus	8.940296
Différence	10			Son coſinus	9.998344
				Somme	7.877280
				Demi-ſomme de ces 4 logarithmes	8.938640
				+ logarithme de 2	0.301030
				Comme ce produit	9.239670
				Compl. arithm.	0.760330
				Eſt au rayon, ainſi le diamètre 31′, 5	1.498311
				Eſt au tems requis 181′, 4 ou 3° 1′ 24″, le même que ci-deſſus.	2.258641

Mr. *de Maupertuis* ajoute que dans les lieux voiſins du Pole où le Soleil emploie un tems trop long à ſe lever & à ſe coucher, ce calcul ſeroit défectueux ; parce qu'il ſuppoſe le tems fort petit. On voit le contraire dans les deux Exemples précédens. Ainſi ſa méthode eſt beaucoup meilleure qu'il ne l'a crue.

PROBLEME XXI.

Trois hauteurs d'un Aſtre étant données dans le voiſinage du Méridien, avec l'intervalle des tems entre les Obſervations, trouver le moment du paſſage de l'Aſtre par le Méridien & ſa hauteur Méridienne ?

Fig. 26. SOit (fig. 26) BCDH une petite partie du parallèle que l'Aſtre décrit aux environs du Méridien, ſes diſtances au Zénith BZ, CZ, DZ ; & la moindre, que l'on cherche, HZ. Leurs différences HL, HK, HI ſont les ſinus verſes des arcs DH, CH, BH. Ces arcs ſont en raiſon des tems, & leurs ſinus droits DL, CK, BI dans ces petites diſtances ſont en raiſon des arcs. Leurs ſinus verſes HL,

HK, HI ſont entr'eux comme les quarrés des ſinus droits ou des tems. On aura donc ces deux proportions.

HI eſt au quarré de BI, ou de BH, comme HK au quarré de CK, ou de CH; & comme HL au quarré de DL ou de DH.

De-là il ſuit que pour avoir le tems vrai BH, il faut multiplier le quarré de la différence BN entre le tems de la 1ere. & de la 3e. Obſervation, par la différence IK entre la 1ere. & la 2e. hauteur; & retrancher de ce produit, celui du quarré de la différence BM entre les tems de la 1ere. & de la 2e. Obſervation, par la plus grande différence LI des hauteurs, pour avoir un premier reſte.

Enſuite on multipliera la différence BN par la différence IK, & l'on retranchera de ce produit celui de BM par LI, pour avoir un ſecond reſte.

On diviſera le premier reſte par le ſecond, & le quotient ſera double du tems vrai BI ou BH. Ce que l'on peut exprimer par cette fraction

$$BH = \frac{1}{2}\left(\frac{BN^2 \times IK - BM^2 \times LI}{BN \times IK - BM \times LI}\right)$$

Enfin le tems BH étant ainſi trouvé, on dira: comme la différence des quarrés des vrais intervalles BI, DL, ou BH, DH, ou, ce qui revient au même, comme le produit de la ſomme par la différence de ces deux intervalles, eſt au quarré de BI ou de BH, ainſi la différence LI des deux hauteurs les plus éloignées, eſt à la quantité HI qu'il faut ajouter à la moindre hauteur, pour avoir la hauteur méridienne requiſe. Si les hauteurs ne ſont pas toutes trois du même côté, l'opération ſera la même.

Si les deux intervalles des tems BM, MN ſont égaux, on abrégera le calcul, en diſant, $2IK - LI : 2IK - \frac{1}{2}LI :: BM$ (moitié de BN): BH ou BI.

Exemple I.

Haut. obſervées.	Tems.	Différences des tems.	Différences des haut.
en B. 51° 17′	11h 2	BM, de B en C, 18′	IK de B en C, 91″
en C, 52 48	11 20	BN, de B en D, 36	LI de B en D, 146.
en D, 53 43	11 38		

BM étant exactement la moitié de BN, on dira : 2IK (182) — LI (146) c'est-à-dire, 36 : 2IK — ½LI, ou 109 :: BM (18) : BH ou BI = 54′ ½ en tems, qu'il faut ajouter au premier tems en B, 11^h 2′, pour avoir le tems du passage de l'Astre par le Méridien 11^h 56′ 30″.

BI ou BH étant = 54′ ½, on en retranchera BN = 36, pour avoir DL = 18′ ½, & l'on fera, comme le produit de la somme BI + DL = 73 | 1.863323
Par la différence BI — DL = BN = 36 | 1.556302

			3.419625
Complém. arithm.			6.580375
Est au quarré de BI, 54½			3.472792
Ainsi la plus grande différence LI des hauteurs, 146			2.164353
Est à la vraie différence HI, 165 =	2°	45′	2.217520
Qu'il faut ajouter à la moindre hauteur	51	17	
Pour avoir la hauteur méridienne	54	2	
Et son complément est la distance au Zénith	35	58	

Mr. l'Abbé de la Caille dans son Edition du Traité de Navigation par Mr. Bouguer a trouvé dans le même exemple la distance au Zénith 35° 59′ par une méthode dérivée de celle-ci. Car les deux *intervalles* étant égaux, il est évident que HI est égal au quarré de 4IK — LI divisé par le quadruple de 4IK moins 2LI ; c'est-à-dire, dans cet exemple HI est égal au quotient de 47524 par 288, comme Mr. l'Abbé de la Caille l'a trouvé *pag. 206.* Ce quotient n'est pas 164, mais 165 $\frac{1}{72}$ ainsi que nous l'avons trouvé.

Exemple 2.

Distances au Zénith.	Tems.	Diff. des tems.	Diff. des dist. au Zénith.
La plus grande en B, 62° 48′	12^h 35′		
L'intermédiaire en C, 62 1	12 7	de B en C = 28′	IK = 47′
La plus éloign. en D, 62 20	11 39	de B en D = 56	IL = 28

Les intervalles des tems étant égaux, on fera cette proportion ; 2IK — LI = (94 — 28 =) 66 : 2IK — ½ LI = (94 — 14 =) 80 :: le demi-intervalle 28 : BH ou BI = 34 moins $\frac{2}{33}$; ce qui étant retranché du tems B, 12^h 35′, on aura le tems du passage de l'Astre par le

Méridien $12^h\ 1'$. De BI = 34 ôtant BN = 28, on aura CK = 6 & l'on fera.

Comme la différence des quarrés de BI (1156) & de CK (36) : est au quarré de BI (1156) : : KI (47) : est à HI = $48\frac{1}{2}$; ou bien par la méthode de M^r. l'Abbé de la Caille, IK étant 47, & LI 28; on aura BI = au quarré de 4IK moins LI, (= 25600) divisé par le quadruple de 4IK moins 2LI, ou par 528. Le quotient est $48\frac{1}{2}$, & non pas 50. Retranchant ce nombre de minutes de la distance de B au Zénith, $62^\circ\ 48'$, on aura la distance méridienne au Zénith $61^\circ\ 59'\ 30''$.

Exemple 3.

Tems à la Montre.	Dist. au Zénith.		Différence des hauteurs.	des Tems.
à $10^h\ 47$	$48^\circ\ 31'$	B	de B en C, KI = 43	de B en C, BM = 23
11 10	47 48	C	de B en D, LI = 71	de B en D, BN = 51
11 38	47 20	D		

Les intervalles des tems n'étant pas égaux, il faut recourir à la règle générale, $BI = \frac{1}{2}\left(\frac{BN^2 \times IK - BM^2 \times LI}{BN \times IK - BM \times LI}\right)$ & en nombres = $\frac{1}{2}\left(\frac{51 \times 51 \times 43 - 23 \times 23 \times 71}{51 \times 43 - 23 \times 71}\right)$.

Le produit de 51 par 43 est 2193, premier terme du diviseur; ce même produit multiplié de nouveau par 51, donne le premier terme du dividende = 111843.

Le produit de 71 par 23, est 1633 second terme du diviseur; & ce même produit multiplié encore par 23, donne le second terme du dividende = 37559.

Faisant les soustractions, le dividende devient 74284, & le diviseur 560. Le quotient, double de BI est 132, 65. Donc BI = 66, 325 = $1^\circ\ 6'\ 19''\frac{1}{2}$, & DL = 15, 325.

La différence des quarrés de BI,	4399,006
Et de DL,	234,857
Est	4164,149

Cette différence est au quarré de BI, 4399.006, comme LI, 71 est à HI, 75' qu'il faut retrancher de la distance au Zénith en B, $48^\circ\ 31'$, pour avoir la distance méridienne de l'Astre au Zénith $47^\circ\ 16'$.

Exemple 4.

Fig. 27.

Tems à la Montre.	Distances au Zénith.	Intervalles des tems.	Différences des hauteurs.
$11^h\ 37'\frac{1}{2}$	en B, 51° 8′	de B en D, 47′ 10″	de B en D, LI = 16
11 $52\frac{1}{4}$	en C, 50 55	de D en C, 32 25	de D en C, LK = 29
12 $24\frac{2}{3}$	en D, 51 24	de B en C, 14 45	de B en C, IK = 13

$$BI = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{quarré de } 47',16 \times IK\,(=13) - \text{quarré de } 14',75 \times LI\,(=16)}{47',16 \times 13 - 14',75 \times 16}\right)$$

Le produit de 47, 16 par 13, est 613,08
Le produit de 14, 75 par 16, est 236

Leur différence, pour le diviseur 377,08

Le produit de 613,08 par 47,16, est 28912,8528
Le produit de 236 par 14, 75 est 3481

Leur différence pour le Dividende 25431,8528
La moitié 12715,9264
divisée par 377,08, donne BI = 33, 72
Otant le sinus verse BM = 14, 45
On aura CK = 19, 27
La somme de BI plus CK = 52, 99

Le produit de la somme de BI + CK, 52, 99	log.	1.724194
Par la différence 14,45	log.	1.159868
		2.884062
	Compl. arithm.	7.115938
Est au quarré de BI	double logar. de 33,72	3.055774
Comme la différence IK, 13		1.113943
Est à HI, 19,304		1.285655

Qu'il faut retrancher de la première distance au Zénith en B 51° 8′, pour avoir la distance méridienne 50° 48′ 42″.

Remarque.

Mr. Halley avoit emploié cette méthode en 1695 pour déterminer le moment du solstice. Nous l'avons exposée fort au long dans nos Mémoires de 1756, *pag.* 171. On a vu *pag.* 197 que cette méthode ne déterminoit pas avec assez de précision le moment du solstice, mais qu'elle donnoit fort

fort exactement la hauteur solstitiale. C'est pour cela que Mr. l'Abbé de la Caille ne l'a appliquée qu'à la hauteur méridienne. J'ai cru que le calcul qu'il propose, étoit un peu trop embarrassant, & qu'il étoit plus avantageux de chercher d'abord le tems du passage de l'Astre par le Méridien, & ensuite sa hauteur méridienne, pour en conclure la hauteur du Pole. Si l'on ne connoit pas la hauteur de l'Astre, le calcul deviendra plus compliqué. Mr. de Maupertuis le réduit à une équation du second degré.

PROBLEME XXII.

Trois hauteurs d'un Astre inconnu étant données, avec les deux intervalles de tems écoulé entre les Observations, trouver la déclinaison de l'Astre & la hauteur du pole?

SOient (fig. 29) les trois distances au Zénith ZA, ZB, ZC; les deux angles horaires donnés APB, APC. Mr. Euler a démontré que *la tangente de l'angle horaire* ZPA est égale à *une fraction dont le* Numérateur *est le produit du sinus verse de l'angle* APC *par la différence des cosinus de* AZ *&* BZ, *moins le produit du sinus verse de l'angle* APB *par la différence des cosinus de* AZ *&* CZ; *& dont le* Dénominateur *est le produit du sinus droit de l'angle* APB *par la différence des cosinus de* AZ *&* CZ, *moins le produit du sinus droit de l'angle* APC *par la différence des cosinus de* AZ *&* BZ. Fig. 29.

Pour trouver cette tangente par les logarithmes, on ajoutera le sinus de la demi-somme au sinus de la demi-différence des distances AZ & BZ, pour avoir la 1ere différence, qui est celle des cosinus de AZ & BZ, & à cette 1ere différence on ajoutera le double du sinus de la moitié de l'angle APC, pour avoir la 1ere partie du Numérateur.

On ajoutera ensuite à la même somme, ou première différence, le sinus de l'angle APC, pour avoir la 2e partie du Dénominateur.

On ajoutera de même le ſinus de la demi-ſomme au ſinus de la demi-différence des diſtances AZ & CZ, pour avoir la ſeconde différence; & à cette ſeconde différence on ajoutera le double du ſinus de la moitié de l'angle APB, pour avoir la ſeconde partie du Numérateur. A la même ſeconde différence on ajoutera le ſinus de l'angle APB, pour avoir la première partie du Dénominateur.

Enfin on cherchera dans la table des nombres ceux qui répondent à la première & à la ſeconde partie du Numérateur, & l'on prendra le logarithme du double de leur différence. On cherchera de même les nombres qui répondent à la première & à la ſeconde partie du Dénominateur, & l'on prendra le logarithme de leur différence; ce qui donnera le logarithme du Dénominateur, qu'il faudra ſouſtraire de celui du Numérateur; leur différence ſera la tangente de l'angle horaire ZPA.

Ayant ZPA, on trouvera ZPB, en ajoutant à ZPA l'angle donné APB; & pour trouver les diſtances AP & ZP, on ajoutera le ſinus de la demi-ſomme au ſinus de la demi-différence de AZ & BZ, comme auparavant, pour avoir le logarithme du Numérateur d'une petite fraction, & l'on ajoutera le ſinus de la demi-ſomme au ſinus de la demi-différence des angles horaires ZPA, ZPB, pour avoir le logarithme du Dénominateur de cette fraction, qui eſt égale à la demi-différence des coſinus de la ſomme & de la différence de AP & PZ. La demi-ſomme des coſinus de la ſomme & de la différence de AP & PZ eſt égale au coſinus de AZ, moins le produit du coſinus de ZPA par cette petite fraction. On aura donc les complémens AP de la déclinaiſon, & PZ de la hauteur du pole.

Exemple.

Distances au Zénith observées..	Angles horaires donnés.
AZ = 18° 45′	APB = 7° 52′
BZ = 21 26	APC = 20 36
CZ = 26 6	
	½ APC = 10 18
Somme AZ + BZ = 40 11	½ APB = 3 56
Differ. BZ — AZ = 2 41	

½ différence	1 20 30″	sinus	8.369482
½ somme	20 5 30	sinus	9.535956
1ere différence			7.905438
+ Double du sinus de ½ APC, 10° 18′			8.504746
1ere partie du Numérateur			6.410184
Sinus de APC, 20° 36′			9.546347
+ 1ere différence			7.905438
2e partie du Dénominateur			7.451785

Somme CZ + AZ = 44° 51′
Différ. CZ — AZ = 7 21

½ Somme	22 25 30″	sinus	9.581465
½ Différence	3 40 30	sinus	8.806837
2e différence			8.388302
+ Double du sinus de ½ APB, 3° 56′			7.672594
2e partie du Numérateur			6.060896
Sinus de APB, 7° 52′			9.136303
+ 2e différence			8.388302
1ere partie du Dénominateur			7.524605

Nombres

De la 1ere partie du Numérateur	,0002571485		
De la 2e partie du Numérateur	,0001150525		
Moitié du Numérateur	,0001420960		
Numérateur	,0002841920	logarith.	6.453612

1ere partie du Dénominateur ,003346601
2e partie du Dénominateur ,002829991

Dénominateur ,00051661 logarith. 6.713163
Log. du Numérateur , 6.453612

Tangente de ZPA 28° 48′ 56″ 9.740449

APB = 7° 52′ 0″
ZPA = 28 48 56

ZPB = 36 40 56
Somme = 65 29 52
Différence = 7 52 0

½ somme 32 44 56 sinus 9.733162
½ différence 3 56 0 sinus 8.836297

Dénominateur de la petite fraction 8.569459
Numérateur, ou 1ere différence 7.905438

Log. de la ½ diff. des cos. de PZ + AP & de PZ — AP = petite fraction 9.335979

Cos. de ZPA, 28° 48′ 56″ 9.942591 } Cos. de AZ *en nombres* 0,94693013
Petite fraction 9.335979 }

Somme 9.278570 *en nombres* 0,18991882

½ somme des cosinus de PZ + AP & de PZ — AP 0,75701131
½ differ. des cosi. de PZ + AP & de PZ — AP *en nombres* 0,21675893

Cosinus de PZ — AP, *en nombres* 0,97377024
Cosinus de PZ + AP, *en nombres* 0,54025238

Logarith. cos. PZ — AP, 13° 9′ 8″ 9.988456
Logarith. cos. PZ + AP, 57 17 57 9.732597

2PZ = 70 27 5
PZ = 35 13 32½ latit. 54° 46′ 27″ ½
2AP = 44 8 49
AP = 22 4 24½ déclin. 67 55 35 ½.

On peut également conclure que AP — PZ = 13° 9′ 8″
AP + PZ = 57 17 57

Ce qui donne AP = 35 13 32½
PZ = 22 4 24½

C'est l'équivoque attachée à la nature de ce Probléme. Il faut donc choisir un Astre dont la déclinaison différe

assez de la hauteur du pole, pour qu'on ne soit pas exposé à prendre l'une pour l'autre.

Pour s'assurer qu'on n'a point fait d'équivoque dans ce calcul, il faut prendre les trois côtés, AP, PZ & AZ du triangle APZ, ou BP, PZ, & BZ du triangle BPZ; ou enfin CP, PZ & CZ du triangle CPZ; & chercher les angles en P par le 1^{er} Cas des triangles obliquangles. Si ces angles reviennent les mêmes que les donnés, c'est marque qu'il n'y a pas eu d'équivoque. Ainsi dans cet Exemple,

AP =	22°	$4'$	$24''\frac{1}{2}$ = BP = CP,	son sinus	9.574951
PZ =	35	13	$32\frac{1}{2}$	son sinus	9.761024
AZ =	18	45	0		
Somme =	76	2	57		
$\frac{1}{2}$ somme =	38	1	$28\frac{1}{2}$		
— AP =	22	4	$24\frac{1}{2}$	Compl. arith. sinus	0.425049
1^{er}. reste =	15	57	4	Sinus du 1^{er} reste	9.439044
— PZ =	35	13	$32\frac{1}{2}$	Compl. arithm. sinus	0.238976
2^{d}. reste =	2	47	56	Sinus du 2^{d} reste	8.688690
				Somme	8.791759
Sinus de $\frac{1}{2}$ APZ =	14°	$24'$	$25''$		9.395879
APZ =	28	48	50, comme ci-devant à $6''$ près.		

BP =	22°	$4'$	$24''\frac{1}{2}$		
PZ =	35	13	$32\frac{1}{2}$		
BZ =	21	26	0		
Somme	78	43	57		
$\frac{1}{2}$ somme	39	21	$58\frac{1}{2}$		
— BP =	22	4	$24\frac{1}{2}$	Compl. arith. sinus	0.425049
1^{er}. reste =	17	17	34	Sinus du 1^{er} reste	9.473128
— PZ	35	13	$32\frac{1}{2}$	Compl. arith. sinus	0.238976
2^{d}. reste	4	8	26	Sinus du 2^{d}. reste	8.858558
				Somme	8.995711
Sinus de $\frac{1}{2}$ BPZ =	18°	$10'$	$27''$		9.497856
Donc BPZ =	36	40	54		
— APZ =	28	48	56		
BPA =	7	51	58,	comme on	

l'avoit supposé à $2''$ près.

On trouvera de même APC = 20° $36'$ 4 ou $5''$.

Pour rendre cette méthode plus sensible, il sera bon d'avoir devant les yeux les expressions ou formules algébriques suivantes.

1.° Tangente ZPA =

$$2\left\{\frac{\text{Sin.}^2\ \tfrac{1}{2}\,\text{APC} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{som.} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& BZ} - \text{sin.}^2\ \tfrac{1}{2}\,\text{APB} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{som.} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& CZ}}{\text{Sin.}^2\ \text{APB} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{som.} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& CZ} - \text{sin.}^2\ \text{APC} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{som.} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& BZ}}\right\}$$

2.° $\frac{1}{2}\left(\text{cos.}\ \overline{\text{AP}+\text{PZ}} - \text{cos.}\ \overline{\text{AP}+\text{PZ}}\right) =$

$$\frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{somme} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. AZ \& BZ}}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{somme} \times \text{sin}\ \tfrac{1}{2}\,\text{diff. ZPA \& ZPB}}$$

3.° $\frac{1}{2}\left(\text{cos.}\ \overline{\text{AP}+\text{PZ}} + \text{cos.}\ \overline{\text{AP}-\text{PZ}}\right) = \text{cos. AZ} - \text{cos. ZPA} \times \frac{\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{somme} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{differ. AZ \& BZ}}{\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{somme} \times \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{differ. ZPA \& ZPB}}$

On réduit les trois expressions précédentes par les logarithmes en cette manière.

1.° La tangente de ZPA a deux parties dans son Numérateur, & deux autres dans son Dénominateur.

Le logarithme de la 1ere partie du Numérateur est 2 log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}$ APC + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}-\text{AZ}}$.

Le logarithme de la 2e partie du Numérateur est 2 log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}$ APB + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}-\text{AZ}}$.

Prenez les nombres qui répondent à ces deux sommes logarithmiques, & doublez la différence de ces deux nombres; vous aurez le Numérateur de cette fraction.

Le logarithme de la 1ere partie du Dénominateur est 2 log. sin. APB + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}-\text{AZ}}$.

Le logarithme de la 2e partie du Dénominateur est 2 log. sin. APC + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}-\text{AZ}}$.

La différence des nombres qui répondent à ces deux sommes logarithmiques vous donnera le Dénominateur. Ensuite divisant le Numérateur par le Dénominateur, ou retranchant du logarithme du Numérateur celui du Dénominateur, vous aurez la tangente de l'angle horaire ZPA.

2.° La petite fraction est plus aisée à exprimer. Elle se réduit à log. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{BZ + AZ}$ + log. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{BZ - AZ}$, trouvé ci-devant, — logar. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{ZPB + ZPA}$ — logarith. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{ZPB - ZPA}$. Le nombre correspondant sera $\frac{1}{2}($*cos.* $\overline{AP + PZ}$ — *cos.* $\overline{AP - PZ}$), & ayant cherché le nombre qui répond à log. *cos.* APZ + log. de la fraction, on le retranchera du nombre qui répond au log. de *cos.* AZ. Le reste sera $\frac{1}{2}($ *cos.* $\overline{AP + PZ}$ + *cos.* $\overline{AP - PZ}$). Ainsi on aura la demi-somme & la demi-différence de ces deux arcs, & par conséquent la latitude & la déclinaison.

Si l'on connoit la déclinaison de l'Astre, le second calcul devient inutile, puisqu'on a dans le triangle ZPA, deux côtés AZ, AP, & l'angle opposé APZ.

Cette méthode n'exige pas, comme celle du Probléme précédent, que les trois hauteurs soient observées auprès du Méridien.

Ce Probléme est le 31ᵉ de l'Astronomie Nautique, où Mʳ *de Maupertuis* trouve la même expression pour la tangente de ZPA.

Mais pour le quarré xx du sinus de la déclinaison, nommant u & $\acute{u}$ les cosinus des deux angles horaires, h & h' les sinus des hauteurs correspondantes de l'Astre, & faisant le rayon $r = 1$, il trouve l'Equation suivante :

$$(u - \acute{u})^2 x^4 + \left.\begin{matrix} (h - h')^2 \\ -(h'u - h\acute{u})^2 \\ -(u - \acute{u})^2 \end{matrix}\right\} x^2 = -(h'u - h\acute{u})^2$$

Cette équation n'est pas fort difficile à resoudre par les logarithmes, si l'on fait réflexion que $u - \acute{u}$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles horaires APZ & BPZ,

Que $h - h'$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des distances au Zénith BZ, AZ,

Et que $h'u - h\acute{u}$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles dont $h'u$ & $h\acute{u}$ sont les cosinus.

Or dans notre exemple nous avons trouvé le log. de $\frac{1}{2}(u-\acute{u})=$	8.569459
Ajoutant le logarithme de 2	0.301030
Nous aurons le logarithme de $u-\acute{u}$	8.870489
Le double de ce logar. sera celui du quarré $(u-\acute{u})^2$	7.740978
De même nous avons trouvé le log. de $\frac{1}{2}(h-h')=$	7.905438
Ajoutons le logar. de 2,	0.301030
Nous aurons le logarithme de $h-h'$	8.206468
Dont le double est celui de $(h-h')^2$	6.412936
Le logarithme de h' (*cos.* de BZ, 21° 26′ 0″) est	9.968877
Celui de u (*cos.* de APZ 28 48 56)	9.942593
Donc $h'u$ (*cos.* de 35 21 16)	9.911470
Le logarithme de h (*Cos.* de AZ 18° 45′ 0″) est	9.976318
Celui de $\acute{u}$ (*cos.* de BPZ 36 40 56)	9.904153
Donc $h\acute{u}$ (*cos.* de 40 35 19)	9.880471
Somme des cos. trouvés $(h\acute{u}+h'u)$ 75° 56′ 35″	
Différence 5 14 3	
Demi-somme 37 58 17 ½ sinus	9.789066
Demi-différence 2 37 1 ½ sinus	8.659543
$\frac{1}{2}(h'u-h\acute{u})$	8.448609
+ logarithme 2	0.301030
$h'u-h\acute{u}$	8.749639
Le double de ce logarithme est celui de $(h'u-h\acute{u})^2$	7.499278

En nombres $(h'u-h\acute{u})^2 = ,0031570$
$(u-\acute{u})^2 = ,0055078$

Somme $= ,0086648$
$-(h-h')^2 = ,0002588$

Différence $= ,0084060$ Coëfficient du 2^d^ *terme*.

En substituant ces nombres, l'équation proposée devient $55078x^4 - 84060x^2 = -31570$; & $x^4 - \frac{84060}{55078}x^2 = -\frac{31570}{55078}$.
$x^4 - 1,5262x^2 = -,5732$.

En résolvant à l'ordinaire cette Equation on trouvera les deux valeurs de $x^2 = ,858599$ & $,667601$.

Extrayant de nouveau les racines par les logarithmes,

	$x^2 = ,858599$	logar.	9.9337858
	$x^2 = ,667601$	logar.	9.8245163
On trouve $x =$ finus de	67° 54′ 40″		9.9668929
$-x =$ finus de	54 47 31		9.9122581
On avoit trouvé par la 1ere méthode	67 55 35 ½	erreur — 0′ 55″ ½	
	54 46 27 ½	erreur + 1 4 ½	

PROBLEME XXIII.

Deux hauteurs d'un Aſtre dont la déclinaiſon eſt connue, étant données, avec le tems écoulé entre les Obſervations; trouver la hauteur du Pole, l'heure des Obſervations & l'Azimuth ? C'eſt le Probl. 22 de l'Aſtron. Naut. que l'on y réſout par une Equation du 2d degré.

SOit Z le zénith (fig. 30), P le pole, S le ſoleil ou une étoile dans la première obſervation, S' le même Aſtre dans la ſeconde. Il y a trois triangles ſphériques à réſoudre ; le premier eſt SPS' dont on a les côtés égaux SP, S'P, complément de la déclinaiſon, & l'angle SPS', intervalle du tems entre les Obſervations. On réduira ce triangle, par l'arc PA perpendiculaire à la baſe, à deux triangles rectangles égaux SPA, S'PA, dont on connoit les hypothénuſes SP, S'P, & les angles SPA, S'PA, qui ſont chacun la moitié de l'angle horaire SPS'. On aura donc l'autre angle S ou S', & la demi-baſe AS ou AS', par le 2d Cas des rectangles. Fig. 30.

Le ſecond triangle eſt SZS', dont on a les trois côtés SZ, S'Z, complémens des deux hauteurs, & SS' trouvé. On aura donc, par le 1er Cas des obliquangles, l'angle ZS'S, & par conſéquent ZS'P.

Le troiſième triangle eſt ZS'P, dont on a deux côtés ZS' & S'P, avec l'angle compris ZS'P; on aura par le 3e Cas, les angles P & Z, & la baſe ZP complément de la latitude.

Pour rendre cette méthode plus sensible, il sera bon d'avoir devant les yeux les expressions ou formules algébriques suivantes.

1.° Tangente ZPA =

$$2\left\{\frac{\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\,\text{APC}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{som.}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& BZ}-\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\,\text{APB}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{som.}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& CZ}}{\text{Sin.}^2\,\text{APB}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{som.}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& CZ}-\text{sin.}^2\,\text{APC}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{som.}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. de AZ \& BZ}}\right\}$$

2.° $\tfrac{1}{2}\,(\text{cos.}\,\overline{\text{AP}+\text{PZ}}-\text{cos.}\,\overline{\text{AP}+\text{PZ}}) =$

$$\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{somme}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. AZ \& BZ}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{somme}\times\text{sin}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. ZPA \& ZPB}}$$

3.° $\tfrac{1}{2}\,(\text{cos.}\,\overline{\text{AP}+\text{PZ}}+\text{cos.}\,\overline{\text{AP}-\text{PZ}}) = \text{cos. AZ} - \text{cos. ZPA}\times\dfrac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{somme}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{differ. AZ \& BZ}}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{somme}\times\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{differ. ZPA \& ZPB}}$

On réduit les trois expressions précédentes par les logarithmes en cette manière.

1.° La tangente de ZPA a deux parties dans son Numérateur, & deux autres dans son Dénominateur.

Le logarithme de la 1ere partie du Numérateur est 2 log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}$ APC + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}-\text{AZ}}$.

Le logarithme de la 2e partie du Numérateur est 2 log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}$ APB + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}-\text{AZ}}$.

Prenez les nombres qui répondent à ces deux sommes logarithmiques, & doublez la différence de ces deux nombres; vous aurez le Numérateur de cette fraction.

Le logarithme de la 1ere partie du Dénominateur est 2 log. sin. APB + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{CZ}-\text{AZ}}$.

Le logarithme de la 2e partie du Dénominateur est 2 log. sin. APC + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}+\text{AZ}}$ + log. $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{BZ}-\text{AZ}}$.

La différence des nombres qui répondent à ces deux sommes logarithmiques vous donnera le Dénominateur. Ensuite divisant le Numérateur par le Dénominateur, ou retranchant du logarithme du Numérateur celui du Dénominateur, vous aurez la tangente de l'angle horaire ZPA.

2.° La petite fraction est plus aisée à exprimer. Elle se réduit à log. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{BZ + AZ}$ + log. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{BZ - AZ}$, trouvé ci-devant, — logar. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{ZPB + ZPA}$ — logarith. *sin.* $\frac{1}{2}\overline{ZPB - ZPA}$. Le nombre correspondant sera $\frac{1}{2}$(*cos.* $\overline{AP + PZ}$ — *cos.* $\overline{AP - PZ}$), & ayant cherché le nombre qui répond à log. *cos.* APZ + log. de la fraction, on le retranchera du nombre qui répond au log. de *cos.* AZ. Le reste sera $\frac{1}{2}$(*cos.* $\overline{AP + PZ}$ + *cos.* $\overline{AP - PZ}$). Ainsi on aura la demi-somme & la demi-différence de ces deux arcs, & par conséquent la latitude & la déclinaison.

Si l'on connoit la déclinaison de l'Astre, le second calcul devient inutile, puisqu'on a dans le triangle ZPA, deux côtés AZ, AP, & l'angle opposé APZ.

Cette méthode n'exige pas, comme celle du Probléme précédent, que les trois hauteurs soient observées auprès du Méridien.

Ce Probléme est le 31^e^ de l'Astronomie Nautique, où M^r^ *de Maupertuis* trouve la même expression pour la tangente de ZPA.

Mais pour le quarré xx du sinus de la déclinaison, nommant u & $\acute{u}$ les cosinus des deux angles horaires, h & h' les sinus des hauteurs correspondantes de l'Astre, & faisant le rayon $r = 1$, il trouve l'Equation suivante :

$$(u - \acute{u})^2 x^4 + \left.\begin{matrix}(h - h')^2 \\ -(h'u - h\acute{u})^2 \\ -(u - \acute{u})^2\end{matrix}\right\} x^2 = -(h'u - h\acute{u})^2$$

Cette équation n'est pas fort difficile à resoudre par les logarithmes, si l'on fait réflexion que $u - \acute{u}$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles horaires APZ & BPZ,

Que $h - h'$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des distances au Zénith BZ, AZ,

Et que $h'u - h\acute{u}$ est le double produit du sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles dont $h'u$ & $h\acute{u}$ sont les cosinus.

Or dans notre exemple nous avons trouvé le log. de $\frac{1}{2}(u-\acute{u})=$	8.569459
Ajoutant le logarithme de 2	0.301030
Nous aurons le logarithme de $u-\acute{u}$	8.870489
Le double de ce logar. sera celui du quarré $(u-\acute{u})^2$	7.740978

De même nous avons trouvé le log. de $\frac{1}{2}(h-h')=$	7.905438
Ajoutons le logar. de 2,	0.301030
Nous aurons le logarithme de $h-h'$	8.206468
Dont le double est celui de $(h-h')^2$	6.412936

Le logarithme de h' (*cos.* de BZ,	21° 26′ 0″) est	9.968877
Celui de u (*cos.* de APZ	28 48 56)	9.942593
Donc $h'u$ (*cos.* de	35 21 16)	9.911470

Le logarithme de h (*Cos.* de AZ	18° 45′ 0″) est	9.976318
Celui de $\acute{u}$ (*cos.* de BPZ	36 40 56)	9.904153
Donc $h\acute{u}$ (*cos.* de	40 35 19)	9.880471

Somme des cos. trouvés $(h\acute{u}+h'u)$	75° 56′ 35″		
Différence	5 14 3		
Demi-somme	37 58 17 $\frac{1}{2}$	sinus	9.789066
Demi-différence	2 37 1 $\frac{1}{2}$	sinus	8.659543
	$\frac{1}{2}(h'u-h\acute{u})$		8.448609
	+ logarithme 2		0.301030
	$h'u-h\acute{u}$		8.749639
Le double de ce logarithme est celui de $(h'u-h\acute{u})^2$			7.499278

En nombres $(h'u-h\acute{u})^2=,0031570$

$(u-\acute{u})^2=,0055078$

Somme $=,0086648$

$-(h-h')^2=,0002588$

Différence $=,0084060$ Coéfficient du 2[d] terme.

En substituant ces nombres, l'équation proposée devient $55078x^4 - 84060x^2 = -31570$; & $x^4 - \frac{84060}{55078}x^2 = -\frac{31570}{55078}$.

$x^4 - 1,5262x^2 = -,5732$.

En résolvant à l'ordinaire cette Equation on trouvera les deux valeurs de $x^2=,858599$ & $,667601$.

Extrayant de nouveau les racines par les logarithmes,

	$x^2 = ,858599$	logar.	9.9337858
	$x^2 = ,667601$	logar.	9.8245163
On trouve $x =$ sinus de	67° 54′ 40″		9.9668929
$- x =$ sinus de	54 47 31		9.9122581
On avoit trouvé par la	67 55 35 ½	erreur — 0′ 55″ ½	
1ere méthode	54 46 27 ½	erreur + 1 4 ½	

PROBLEME XXIII.

Deux hauteurs d'un Astre dont la déclinaison est connue, étant données, avec le tems écoulé entre les Observations; trouver la hauteur du Pole, l'heure des Observations & l'Azimuth? C'est le Probl. 22 de l'Astron. Naut. que l'on y résout par une Equation du 2d degré.

SOit Z le zénith (fig. 30), P le pole, S le soleil ou une étoile dans la première observation, S' le même Astre dans la seconde. Il y a trois triangles sphériques à résoudre; le premier est SPS' dont on a les côtés égaux SP, S'P, complément de la déclinaison, & l'angle SPS', intervalle du tems entre les Observations. On réduira ce triangle, par l'arc PA perpendiculaire à la base, à deux triangles rectangles égaux SPA, S'PA, dont on connoit les hypothénuses SP, S'P, & les angles SPA, S'PA, qui sont chacun la moitié de l'angle horaire SPS'. On aura donc l'autre angle S ou S', & la demi-base AS ou AS', par le 2d Cas des rectangles. Fig. 30.

Le second triangle est SZS', dont on a les trois côtés SZ, S'Z, complémens des deux hauteurs, & SS' trouvé. On aura donc, par le 1er Cas des obliquangles, l'angle ZS'S, & par conséquent ZS'P.

Le troisième triangle est ZS'P, dont on a deux côtés ZS' & S'P, avec l'angle compris ZS'P; on aura par le 3e Cas, les angles P & Z, & la base ZP complément de la latitude.

Exemple.

Le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaison Nord, on a observé sa hauteur le matin, de 38° 18′ 46″; & au bout d'une heure & demie le même jour on l'a trouvée de 50° 24′ 50″. On demande la latitude, l'heure & l'Azimurh ?

1^er^ *Triangle* SPA, *rectangle en* A.

1. Le rayon est au sinus de la déclinaison 19° 39′ 10″	9.526752
Comme la tang. de 11° 15′, moitié de l'angle horaire SPS′	9.298662
Est à la cotang. de l'angle PSA 86° 10′ 21″, 8	8.825414

2. Le rayon est au cos. de la déclin.	19°	39′	10″	9.973935
Comme le sinus de SPA	11	15	0	9.290236
Au sinus de SA (moitié de SS′)	10	35	12,7	9.264171
Donc SS′ =	21	10	25,4	

2^d^ *Triangle* SS′Z. Par le 1^er^ Cas.

1^ere^ dist. au Zénith SZ,	51°	41′	14″,	Comp. de la 1^ere^ haut.	38°	78′	46″	
2^e^ dist. au Zénith S′Z,	39	35	10,	Comp. de la 2^e^ haut.	50	24	50	
La base trouvée SS′	21	10	25,4					
Somme	112	26	49,4					
Demi-somme	56	13	24,7					
Otez SZ	51	41	14	Compl. arith. sin. SZ				0.105330
1^er^ reste	4	32	10,7	Sinus du 1^er^ reste				8.898126
Otez SS′	21	10	25,4	Compl. arith. sin. SS′				0.442256
2^d^ reste	35	2	59,3	Sinus du 2^d^ reste				9.759130
				Somme				9.204842
Demi-somme, sinus de ½ S′SZ, 23° 35′ 56″,4								9.602421

S′SZ.	47	11	52, 8	
ASP ou S′SP	86	10	21, 8	, trouvé ci-devant.
ZSP, différence des deux =	38	58	29	

3^e^ *Triangle* ZSP. Par le 3^e^ Cas.

1. Le rayon : au cosinus de PSZ,	38° 58′ 29″		9.890658
:: La tang. de SP, cotang. de	19 39 10		0.447183
: A la tang. d'un arc M aigu	65 19 39		0.337841
D'où il faut ôter le côté SZ	51 41 14		
Pour avoir un autre arc N	13 38 25		
2. Le cosinus de M	65° 19′ 39″	Compl. arith.	0.379415
: Au cosinus de N	13 38 25		9.987575
:: Le sinus de la déclin.	19 39 10		9.526752
: Au sinus de la latitude	51 32 0		9.893742

On trouve aisément les deux autres angles SZP, SPZ par le 1^er^ Cas des obliquangles, qui donne 8^h^ 30′ pour le tems de la première Observation, & 10^h^ pour la seconde le matin. Le premier Azimuth 72° 12′ 54″, & le second 47° 38′ 25″, ou leurs supplémens.

Si l'on avoit ajouté les angles S'SP & S'SZ, on auroit trouvé une autre latitude 45° 43′ 12″, & la différence des Azimuths auroit fait distinguer la vraie de la fausse.

Lorsque les deux hauteurs du Soleil sont égales, l'une avant, l'autre après midi, le calcul de la latitude est beaucoup plus court. Car soit (fig. 31) P le pole, Z le Zénith, S le Soleil avant midi, S' après midi. On peut supposer que la déclinaison du Soleil ne varie pas sensiblement dans cet intervalle, surtout vers les solstices. Ainsi le Méridien PZA divisera en deux parties égales l'arc de grand cercle S'S, & l'angle P. Dans le triangle SPZ, ayant les deux côtés donnés SP, SZ, & l'angle SPZ opposé à SZ, on trouvera le complément PZ de la latitude par le 5^e^ Cas des obliquangles. Fig. 31.

Exemple 1.

Les deux hauteurs égales sont 20° 10′, la déclinaison Sud 19° 39′ 10″, l'intervalle entre les deux observations 4^h^ 23′ 16″. On demande la latitude Nord ?

Le demi-intervalle est $2^h\ 11'\ 38''$, qui valent $32^\circ\ 54'\ 30''$. C'est l'angle SPZ.

1. Le rayon : au cos. du ½ intervalle SPZ,	32°	54'	30"		9.924041
: : La cotang. de la déclinaison Sud	19	39	10		0.447183
: A la tang. d'un arc M obtus	113	2	38		0.371225
2. Le cos. de SP, sin. de la déclin.	19°	39'	10"	Compl. ar.	0.473248
: Au cos. de SZ, sin. de la hauteur	20	10	0		9.537507
: : Cos. de l'arc M	113	2	38		9.592661
: Au cos. d'un arc N aigu	66	20	37		9.603416
La différence de M & N est PZ =	46	42	1, & la lat. 43° 18'.		

Exemple 2.

Les deux hauteurs égales sont $38^\circ\ 18'\ 46''$, la déclinaison $19^\circ\ 39'\ 10''$ Nord ; le demi-intervalle entre les deux Observations $3^h\ 30'$ qui valent $52^\circ\ 30'$. Quelle est latitude Nord ?

1. Le rayon : au cos. du ½ intervalle SPZ,	52°	30'			9.784447
: La cotang. de la déclinaison Nord	19	39	10		0.447183
: A la tangente de M aigu	59	36	9		0.231630
2. Le cos. de SP, sin. de la déclin.	19°	39'	10"	Comp. ar.	0.473248
: Au cos. de SZ, sinus de la hauteur	38	18	46		9.792359
: : Le cosinus de M.	59	36	9		9.704147
: Au cosinus de N aigu	21	8	10		9.969754
M — N = PZ	38	27	59		
Complément de PZ = latitude	51	32	1		

Exemple 3.

Les deux hauteurs égales $19^\circ\ 37'$, la déclinaison Sud $15^\circ\ 16'$, le demi-intervalle $1^h\ 41'\ 47''$, qui valent $25^\circ\ 26'\ 45''$. Quelle est la latitude Nord ?

1. Le rayon : au cos. du ½ intervalle,	25°	26'	45"	9.955682
: : Tang. de SP, cotang. de la décl. Sud	15	16	0	0.563927
: A la tang. de M obtus	106	49	6	0.519609

2. Le sinus de la déclinaison	15° 16′	Compl. ar.	0.579530
: Au cos. de SZ, sin. de la hauteur	19 37		9.525984
: : Cosinus de M	106 49 6		9.461406
: Au cosinus de N aigu	68 21 6		9.566920
PZ = M − N =	38 28		
Latitude =	51 32		

PROBLEME XXIV.

Deux hauteurs du Soleil étant données avec sa déclinaison & la différence des Azimuths correspondans, trouver la latitude ?

NOus avons encore ici trois triangles à résoudre (fig. 30). Mais il nous faut commencer par SS'Z, dans lequel on connoit deux côtés SZ, S'Z, & l'angle compris Z. On trouvera les autres angles & la base par le 3e Cas des obliquangles. Fig. 30.

Dans le second triangle SPS', on a les trois côtés ; si la déclinaison a varié dans l'intervalle des deux observations, les côtés SP, S'P seront inégaux, & on le résoudra par le 1er Cas des obliquangles ; si elle n'a pas varié, le triangle sera isoscèle, & on le divisera en deux triangles égaux SAP, S'AP, rectangles en A, dont on a l'hypoténuse S'P, ou SP & un côté SA. On les résoudra par le 1er Cas des rectangles.

Le troisième triangle PS'Z ou PSZ se résoudra, comme dans l'exemple précédent.

Exemple.

Le Soleil ayant 19° 39′ 10″ de déclinaison Nord, on a trouvé sa hauteur le matin 38° 18′ 46″, & quelque tems après 50° 24′ 50″. La différence des Azimuths entre les deux observations a été 24° 34′ 29″. On demande la latitude Nord ?

1[er] *Triangle* SS'Z.

SZ. 1[ere] distance au Zénith	51°	41′	14″
S'Z. 2[e] distance au Zénith	39	35	10
Somme	91	16	24
Différence	12	6	4
½ somme	45	38	12
½ différence	6	3	2
½ SZS'	12	17	14 ½

1. Sinus demi-somme	45°	38′	12″	Compl. arithm.	0.145742
: Sinus demi-différence	6	3	2		9.022866
: : Cot. ½ SZS'	12	17	14 ½		0.661934
: Tang. ½ differ. des angles	34	5	42		9.830542

2. Cos. demi-somme	45°	38′	12″	Compl. arit.	0.155395
: Cos. demi-différence	6	3	2		9.997574
: : Cot. ½ SZS'	12	17	14 ½		0.661934
: Tang. demi-som. des angles	81	17	36		0.814903
J'en soustrais la ½ différence	34	5	42		
Pour avoir le plus petit ang. S'SZ	47	11	54		

Ensuite pour trouver la base SS'

1. Le rayon est au cosinus de SZS'	24°	34′	29″	9.958764
Comme la tang. de SZ, cot. de la 1[ere] hauteur	38	18	46	0.102310
Est à la tang. d'un arc M, aigu	49	0	56	0.061074
D'où il faut ôter S'Z	39	35	10	
Pour avoir le 2[d] arc N	9	25	46	

2. Le cos. de l'arc M	49°	0′	56″	Compl. arit.	0.183192
: Au cosinus de l'arc N	9	25	46		9.994092
: : Sinus de la 1[ere] hauteur	38	18	46		9.792359
: Au cosinus de SS'	21	10	26		9.969643
½ SS' = SA =	10	35	13		

2[d] *Triangle* SAP, *rectangle en* A.

Le rayon : cotang. SP, tang. de la déclin.	19°	39′	10″	9.552817
: : Tang. SA	10	35	13	9.271630
: Au cosinus de l'angle ASP	86	10	22	8.824447
De cet angle, ôtez S'SZ	47	11	54	
Vous aurez l'angle de position PSZ	38	58	28	

Le 3e triangle PSZ donne, comme dans l'exemple précédent, la latitude Nord 51° 32′, l'heure de la 1ere observation 8^h 30′ du matin, &c.

Si les deux hauteurs sont égales, le calcul est trop facile pour nous y arrêter.

PROBLEME XXV.

Ayant deux hauteurs d'un Astre dont on ne connoit pas la déclinaison, & ayant observé la différence des tems & des Azimuths correspondans, trouver la latitude du lieu & la déclinaison de l'Astre?

Exemple.

On a trouvé (fig. 30) la hauteur d'un Astre inconnu 38° 18′ 46″, & 1 heure & demie après cette hauteur a augmenté de 12° 6′ 4″, & son Azimnth a diminué de 24° 34′ 29″, on demande la latitude? Fig. 30.

1.° On calculera le triangle SZS′ comme dans le Problême précédent; ce qui donnera l'angle S′SZ = 47° 11′ 54″ & SS′ = 21° 10′ 26″.

2.° Dans le triangle SPA rectangle en A, on a l'angle SPA moitié de l'intervalle horaire SPS′, 11° 15′ & SA moitié de SS′ = 10° 35′ 13″. Donc par le 3e Cas des rectangles, on aura l'angle ASP & le complément SP de la déclinaison de l'Astre, en disant :

1. Le cosinus de SA	10° 35′ 13″.	Compl. arith.	0.007457
: Au rayon : : le cos. de SPA	11 15 0		9.991573
: Au sinus de l'angle ASP	86 10 22		9.999030
2. Le sinus de l'angle SPA	11° 15′ 0″	Compl. arith.	0.709764
: Au rayon :: le sinus de SA	10 35 13		9.264173
: Au sin. de SP, cos. de la déclin.	19 39 10		9.973937

De l'angle ASP	86° 10′ 22″
Otant l'angle S'SZ	47 11 54
On aura l'angle ZSP	38 58 28

3. Dans le triangle SZP, connoissant deux côtés SZ, SP, & l'angle compris ZSP, on trouvera l'autre côté ZP & les deux angles, comme dans le Probléme XXIII. La latitude sera 51° 32′ l'Azimuth 72° 12′ 54″.

PROBLEME XXVI.

N'ayant pris qu'une hauteur d'un Astre dont on connoit la déclinaison, & ayant observé le changement de son Azimuth pendant un tems donné depuis l'observation de sa hauteur, trouver la latitude du lieu, l'Azimuth & l'angle horaire pour le tems de l'observation?

Fig. 30. DAns le 1er triangle SPS' on a l'angle P & les deux côtés PS, PS'. On aura donc l'angle PSS', & le côté SS' par le 3e Cas des obliquangles.

Dans le second SZS' on a l'angle Z, qui est le changement de l'Azimuth, le côté ZS & la base SS'. On trouvera donc S'SZ, & par conséquent ZSP.

Enfin dans le triangle ZSP, on aura, deux côtés & l'angle compris. Ainsi on trouvera la latitude, l'angle horaire & l'Azimuth.

Exemple.

La déclinaison du Soleil étant 19° 39′ 10″ Nord, on a trouvé sa hauteur 50° 24′ 50″ du côté de l'Ouest, & au bout d'une heure & demie son Azimuth a augmenté de 24° 34′ 29″. On demande la latitude, l'Azimuth & l'heure de l'observation?

1°. Le 1er triangle donne, comme dans l'Exemple du Probl. XXIII. SS' = 21° 10′ 25″,4 PSS' = 86° 10′ 22″.

2°. Dans le 2d triangle, ayant SS', S'Z & l'ang. SZS', on dira:

1. Le

1. Le rayon : au cof. de S'Z, fin. de la haut.	50° 24′ 50″	9.886867
:: La tangente de l'angle Z	24 34 29	9.660203
: A la cotang. d'un arc *m* aigu	70 35 10	9.547070
2. La tangente de SS'	21° 10′ 25″,4	Com. ar. 0.411900
: A la tang. de S'Z, cotang. de la haut.	50 24 50	9.917434
:: Le cofinus de l'arc *m*	70 35 10	9.521648
: Au cofinus de *n* aigu	44 48 7	9.850982
La fomme $m + n =$ SS'Z =	115 23 17	
Ou la différence $m - n =$ SS'Z =	25 47 3, pour une autre lat.	

3.° Dans le triangle PS'Z, connoiffant deux côtés PS', S'Z & l'angle compris, on trouvera par le 3^e Cas la latitude, complément de ZP, 51° 32′ & les angles Z & P.

PROBLEME. XXVII.

La hauteur de deux Etoiles connues ayant été obfervée dans un même inftant, trouver la latitude, l'angle horaire & l'Azimuth ?

SOient S & S' les deux Etoiles, (fig. 30) S'Z la diftance de l'une au Zénith déterminée par un Obfervateur, dans le moment où un autre Obfervateur détermine la diftance SZ de l'autre. On connoit toujours le triangle SPS', qu'on peut calculer d'avance ; car on a les deux côtés S'P, SP, qui font les diftances de chaque Etoile au Pole, & l'angle compris S'PS, qui eft la différence des afcenfions droites des deux Etoiles. Donc on aura toujours la bafe SS' & les deux autres angles de ce triangle, par le 3^e Cas des obliquangles. Fig. 30

Dans le 2^d triangle SZS', on a les trois côtés. Ainfi on aura, par le 1^er Cas, les angles, & par conféquent l'angle de pofition ZSP, ou ZS'P.

Enfin le triangle ZSP, dans lequel on connoit deux côtés ZS, SP, & l'angle compris S, donnera la latitude, l'angle horaire & l'Azimuth.

Exemple 1.

Deux Obſervateurs ſe diſpoſent à obſerver dans le même tems la hauteur du grand Chien *Sirius*, & celle du petit Chien *Procyon*, lorſque la Lune ou le crépuſcule rendent l'horiſon viſible. Ils trouvent dans le Catalogue des Etoiles, que l'aſcenſion droite du grand Chien *étoit* en 1760, 98° 38′ 45″, & qu'elle croît toutes les années de 40″; ſa déclinaiſon Sud 16° 24′ 5″, & qu'elle croît annuellement de 3″. L'aſcenſion droite du petit Chien *Procyon* étoit en 1760, 111° 40′ 57″, croiſſant annuellement de 48″, ſa déclinaiſion Nord en 1760 étoit 5° 49′ 29″, & diminue annuellement de 7″.

Il faut avant toutes choſes réſoudre le triangle SPS', qui eſt commun à toutes les obſervations de ce genre.

L'aſcenſion droite de *Procyon* en 1764 par l'accroiſſement annuel de 48″	111° 44′ 9″
Celle de *Sirius* en 1764, par l'accroiſſement annuel de 40″	98 41 25
Leur différence SPS' ſera par conſéquent	13 2 44

La déclinaiſon Nord de *Procyon* ſera en 1764, de 5° 49′ 1″ & ſa diſtance S'P au pole Nord 84° 10′ 59″.

La déclinaiſon de *Sirius* en 1764, 16° 24′ 17″ Sud, & ſa diſtance SP au Pole Nord ſera 106° 24′ 17″.

Il faut trouver les angles S & S', & la baſe SS' de ce triangle fondamental en cette maniere.

SP =	106° 24′ 17″
S'P =	84 10 59
Somme	190 35 16
Différence	22 13 18
½ Somme	95 17 38
½ Différence	11 6 39
½ SPS'	6 31 22

1. Le sin. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés		Compl. arit.	0.001857
: Au sinus de leur $\frac{1}{2}$ différence			9.284898
: : Cotang. de $\frac{1}{2}$ SPS'			0.941808
: Tang. $\frac{1}{2}$ differ. des angles	59° 25′ 32″		0.228563
2. Le cosinus de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés		Comp. arithm.	1.034966
: Au cosinus de leur $\frac{1}{2}$ différence			9.991782
: : Cotangente de $\frac{1}{2}$ SPS'			0.941808
: A la tang. $\frac{1}{2}$ somme obtuse des angles	90° 36′ 57″		1.968556
$\frac{1}{2}$ différence	59 25 32		
Le plus grand SS'P =	150 2 29		
Le plus petit S'SP =	31 11 25		

Pour avoir la base SS'

1. Le rayon : au cos. de SPS'	13° 2′ 44″		9.988644
: : La tang. de l'un des côtés S'P	84 10 59		0.991932
: A la tang. d'un arc *m* aigu	84 1 48		0.980576
L'autre côté SP	106 24 17		
La différence *n*	22 22 29		
2. Le cosin. de l'arc *m*	84 1 48	Compl. ar.	0.982935
: Au cosin. de l'arc *n*	22 22 29		9.966007
: : Le cosin. du côté PS'	84 10 59		9.005826
: Au cosinus de la base SS'	25 41 54		9.954768

On peut vérifier cette distance avec l'Octant, en réunissant les deux Etoiles, & ayant égard à la réfraction.

Soit maintenant la distance au Zénith observée ZS' 37° complément de la hauteur de *Procyon*, & dans le même instant ZS, 60° complément de la hauteur de *Sirius*. Pour trouver la latitude, il faut 1° resoudre le triangle ZSS', dont on a les trois côtés, & chercher l'un des angles, par le premier cas en cette maniere.

Exemple 1.

Deux Obſervateurs ſe diſpoſent à obſerver dans le même tems la hauteur du grand Chien *Sirius*, & celle du petit Chien *Procyon*, lorſque la Lune ou le crépuſcule rendent l'horiſon viſible. Ils trouvent dans le Catalogue des Etoiles, que l'aſcenſion droite du grand Chien *étoit* en 1760, 98° 38′ 45″, & qu'elle croît toutes les années de 40″; ſa déclinaiſon Sud 16° 24′ 5″, & qu'elle croît annuellement de 3″. L'aſcenſion droite du petit Chien *Procyon* étoit en 1760, 111° 40′ 57″, croiſſant annuellement de 48″, ſa déclinaiſion Nord en 1760 étoit 5° 49′ 29″, & diminue annuellement de 7″.

Il faut avant toutes choſes réſoudre le triangle SPS', qui eſt commun à toutes les obſervations de ce genre.

L'aſcenſion droite de *Procyon* en 1764 par l'accroiſſement annuel de 48″	111° 44′ 9″
Celle de *Sirius* en 1764, par l'accroiſſement annuel de 40″	98 41 25
Leur différence SPS' ſera par conſéquent	13 2 44

La déclinaiſon Nord de *Procyon* ſera en 1764, de 5° 49′ 1″ & ſa diſtance S'P au pole Nord 84° 10′ 59″.

La déclinaiſon de *Sirius* en 1764, 16° 24′ 17″ Sud, & ſa diſtance SP au Pole Nord ſera 106° 24′ 17″.

Il faut trouver les angles S & S', & la baſe SS' de ce triangle fondamental en cette maniere.

SP =	106°	24′	17″
S'P =	84	10	59
Somme	190	35	16
Différence	22	13	18
½ Somme	95	17	38
½ Différence	11	6	39
½ SPS'	6	31	22

1. Le sin. de la ½ somme des côtés			Compl. arit.	0.001857
: Au sinus de leur ½ différence				9.384898
: : Cotang. de ½ SPS'				0.941808
: Tang. ½ differ. des angles	59° 25′ 32″			0.228563
2. Le cosinus de la ½ somme des côtés			Comp. arithm.	1.034966
: Au cosinus de leur ½ différence				9.991782
: : Cotangente de ½ SPS'				0.941808
: A la tang. ½ somme obtuse des angles	90° 36′ 57″			1.968556
½ différence	59 25 32			
Le plus grand SS'P =	150 2 29			
Le plus petit S'SP =	31 11 25			

Pour avoir la base SS'

1. Le rayon : au cos. de SPS'	13° 2′ 44″		9.988644
: : La tang. de l'un des côtés S'P	84 10 59		0.991932
: A la tang. d'un arc *m* aigu	84 1 48		0.980576
L'autre côté SP	106 24 17		
La différence *n*	22 22 29		
2. Le cosin. de l'arc *m*	84 1 48	Compl. ar.	0.982935
: Au cosin. de l'arc *n*	22 22 29		9.966007
: : Le cosin. du côté PS'	84 10 59		9.005826
: Au cosinus de la base SS'	25 41 54		9.954768

On peut vérifier cette distance avec l'Octant, en réunissant les deux Etoiles, & ayant égard à la réfraction.

Soit maintenant la distance au Zénith observée ZS' 37° complément de la hauteur de *Procyon*, & dans le même instant ZS, 60° complément de la hauteur de *Sirius*. Pour trouver la latitude, il faut 1° resoudre le triangle ZSS', dont on a les trois côtés, & chercher l'un des angles, par le premier cas en cette maniere.

SS'	25°	41'	54"		
SZ	60	0	0		
S'Z	37	0	0		
Somme	122	41	54		
½ somme	61	20	57		
— SS'	25	41	54	Compl. arith. du sinus de SS'	0.361878
1^er^ reste	35	39	3	Sinus du 1^er^ reste,	9.765552
— SZ	60	0	0	Compl. arith. du sinus de SZ	0.062469
2^d^ reste	1	20	57	Sinus du 2^d^ reste,	8.371903
				Somme	8.562802

½ somme sinus de la moitié de S'SZ 11° 1' 14" 9.281401

donc S'SZ = 22 2 28

On a trouvé S'SP = 31 11 25

La différence = ZSP = 9 8 57

2°. Le triangle ZSP, par le 3^e^ Cas des obliquangles.

1. Le rayon : au cos. de ZSP	9°	8'	57"		9.994439
: : La tangente de ZS	60	0	0		0.238561
: A la tangente d'un arc M *aigu*	59	40	53		0.233000
SP	106	24	17		
Différence N	46	43	24		
2. Le cosinus de M	59°	40'	53"	Comp. arith.	0.296874
: Au cosinus de N	46	43	24		9.836021
: : Le cosinus de ZS	60	0	0		9.698970
: Au cos. de PS, sin. de la latit.	42	45	53		9.831865

Je laisse au lecteur à calculer les deux autres angles Z & P.

Exemple 2.

La distance de *Sirius* au Zénith a été trouvée de 38°, celle de *Procyon* dans le même tems de 61° 18'. On demande la latitude, l'angle horaire & l'Azimuth ?

SS' =	25°	41'	54"	Dist. constante des 2 Etoiles, calculée ci-dev.	
S'Z =	38	0	0	Observée	
SZ =	61	18	0	Observée en même tems.	
Somme	124	59	54		
½ somme	62	29	57		
— SZ =	61	18	0	Compl. arith. du sin. de SZ	0.056928
1er reste =	1	11	57	Sinus du 1er reste	8.320725
— SS' =	25	41	54	Comp. arithm. du sin. de SS'	0.362878
2d reste =	36	48	3	Sinus du 2d reste	9.777452
				Somme	8.517983
½ somme, sinus de ½ S'SZ,	10°	27'	36"		9.258991
S'SZ =	20	55	12		
S'SP =	31	11	25	trouvée ci-devant	
Donc ZSP =	10	16	13		

Pour trouver la latitude

1. Le rayon : au cos. de ZSP	10°	16'	13"		9.992985
: : La tang. de SZ	61	18	0		0.261629
: A la tang. d'un arc M *aigu*	60	54	30		0.254614
L'autre côté SP	106	24	17		
Différence, arc N	45	29	47		
2. Le cos. de l'arc M	60	54	30	Compl. arith.	0.313178
: Au cosin. de l'arc N	45	29	47		9.845690
: : Le cosin. de SZ	61	18	0		9.681443
: Au sinus de la latitude	43	48	52	Nord	9.840311

Cette méthode a un grand avantage sur les autres, en ce qu'elle est indépendante du mouvement du Vaisseau.

PROBLEME XXVIII.

Ayant pris trois hauteurs d'une Etoile avec la différence des Azimuths, trouver sa déclinaison & la hauteur du Pole ?

LEs trois hauteurs donnent les trois distances au Zénith (fig. 32) AZ, A'Z, A''Z ; & la différence des Azimuths donne les trois angles AZA', AZA'', A'ZA''. Fig. 32.

On aura donc ces trois triangles par le 3ᵉ. Cas des obliquangles, ou du moins les trois bases, & l'un des angles A, ou A′, ou A″. On aura donc aussi les cordes des arcs AA′, A′A″, AA″, qui formeront un triangle rectiligne AA′A″. Inscrivez ce triangle dans un cercle
Fig. 33. (fig. 33); ce cercle représentera le parallèle de la déclinaison de cette Etoile.

Divisez les cordes AA′, A′A″ en deux parties égales en B & D; l'angle BCD supplément de A′, est la moitié de ACA″, qui est égal à l'angle sphérique APA″ (fig. 32). Le rayon CA de ce petit cercle est le cosinus de la déclinaison de l'Etoile. Le sinus de l'angle BCD, moitié de l'angle ACA″, est à la moitié de la corde AA″, comme le rayon est au demi-diamètre AC, cosinus de la déclinaison.

Par conséquent dans l'un des triangles sphériques APA″, ayant deux côtés égaux AP, & A″P, on trouvera les angles en le divisant en deux triangles rectangles égaux, par le 1ᵉʳ. Cas des triangles rectangles. Donc en retranchant ZA″A′ ou ZA″A de PA″A′, ou de PA″A, on aura l'un des angles de position ZA″P; enfin dans le triangle ZA″P ayant cet angle avec les deux côtés ZA″, PA″, on aura le complément ZP de la latitude, l'angle horaire P, & l'angle azimuthal ou son supplément Z.

Exemple.

Les trois distances de l'Etoile inconnue au Zénith sont AZ = 39° 44′ 54″, A′Z = 45° 51′ 3″, & A″Z = 54° 26′ 46″. Les différences des azimuths sont AZA′ = 20° 8′ 29″, A′ZA″ = 15° 57′ 25″, & par conséquent AZA″ = 36° 5′ 54″. On demande la déclinaison de l'Etoile, la latitude du lieu, l'azimuth de l'Etoile, l'angle horaire, & par conséquent son ascension droite, si l'heure du Soleil est connue.

Triangle AZA'

1. Le rayon : au cof. de AZA',	20° 8' 29"	9.971594
: : La tangente de A'Z	45 51 3	0.012900
: A la tang. d'un arc M *aigu*	44 2 36	9.985494
Otez AZ	39 44 54	
Refte N	4 17 42	
2. Le cofinus de M	44 2 36 Comp. arit.	0.143384
: Au cofinus de A'Z	45 51 3	9.842939
: : Le cofinus de N	4 17 42	9.998778
: Au cofinus de AA'	14 55 20	9.985101

Triangle A'ZA"

1. Le rayon : au cofin. de A'ZA",	15° 57' 25"	9.982935
: : La tangente de A'Z	45 51 3	0.012900
: A la tangente de M *aigu*	44 43 29	9.995835
A"Z	54 26 46	
Différence N =	9 43 17	
2. Le cofinus de M	44 43 29 Comp. arit.	0.148439
: Au cofinus de A'Z	45 51 3	9.842939
: : Le cofinus de N	9 43 17	9.993718
: Au cofinus de A'A"	14 55 30	9.985096

Triangle AZA"

1. Le rayon : au cof. de AZA",	36° 5' 54"	9.907415
: : La tangente de AZ	39 44 54	9.919936
: A la tangente de M, *aigu*	33 54 0	9.827351
A"Z	54 26 46	
Différence N	20 32 46	
2. Le cofinus de M	33 54 0 Compl. arit.	0.080916
: Au cofinus de AZ	39 44 54	9.885847
: : Le cofinus de N	20 32 46	9.971457
: Au cofinus de AA"	29 50 31	9.938220

Triangle rectiligne AA'A", fig. 33.

La corde d'un arc eft double du finus de la moitié de cet arc ; donc en prenant les finus logarithmiques de

la moitié des arcs trouvés, & leur ajoutant le logarithme de 2, on aura les logarithmes de leurs cordes.

½ AA″ = 14° 55′ 15″½ son sinus	9.410754
Logarithme de 2	0.301030
Logarithme de la corde AA″	9.711784
½ AA′ = 7° 27′ 40″ son sinus	9.113453
Logarithme de 2	0.301030
Logarithme de la corde AA′	9.414483
½ A′A″ = 7° 27′ 45″ son sinus	9.113533
Logarithme de 2	0.301030
Logarithme de la corde A′A″	9.414563

Valeurs de ces cordes en nombres naturels.

AA″ =	0,51497		
AA′ =	0,25971		
A′A″ =	0,25975		
Somme	1,03443		
½ somme	0,517215		
— AA′ =	0,25971	Compl. arithm.	0.585517
1^er reste =	0,257505	Log. du 1^er reste	9.410786
— A′A″ =	0,25975	Compl. arithm.	0.585437
2^d reste =	0,257465	Log. du 2^d reste	9.410718
		Somme	9.992458

½ somme, sinus de ½ AA′A″, 82° 27′ 40″ 9.996229

Donc AA′A″ = 164 55 20

Son supplément BCD = 15 4 40

Le sinus de l'angle BCD	15° 4′ 40″	Comp. arith.	0.584810
Est au rayon, comme la demi-corde AA″, sinus de ½ AA″			9.410754
Est au cos. de la déclinaison de l'Etoile	8° 10′ 30″		9.995564
Sa distance au Pole PA″ =	81 49 30		

Triangle sphérique isoscèle APA″, *partagé en deux rectangles égaux.*

Le rayon : à la cotang. de PA″,	81° 49′ 30″	9.157326
: : La tangente de ½ AA″.	14 55 15 ½	9.425650
: Au cosinus de AA″P	87 48 22	8.582976

Triangle AZA"

Le ſinus de AA"	29° 50′ 31″	Compl. arith.	0.303112
: Au ſinus de AZA"	36 5 54		9.770242
: : Le ſinus de AZ	39 44 54		9.805784
: Au ſinus de AA"Z	49 12 25		9.879138
Qu'il faut ôter de AA"P	87 48 22		
Pour avoir ZA"P	38 35 57		

Triangle ZA"P

1. Le rayon : au coſin. de ZA"P	38° 35′ 57″		9.891945
: : La tangente de ZA"	54 26 46		0.145868
: A la tangente d'un arc M, *aigu*	47 33 25		0.038813
L'autre côté PA"	81 49 30		
Différence N =	34 16 5		
2. Le coſinus de M	47° 33′ 28″	Comp. arith.	0.170788
: Au coſinus de ZA"	54 26 46		9.764526
: : Le coſinus de N	34 16 5		9.917197
: Au coſ. de ZP, ſinus de la lat.	45 24 8		9.852511

L'angle horaire & l'Azimuth ſe trouvent comme dans les autres Problémes.

PROBLEME XXIX.

Ayant obſervé trois Etoiles connues dans un même Almicantarath inconnu, avec la différence des angles horaires, trouver la latitude & la vraie hauteur des Etoiles ?

CE Probléme ſe réſoud de la même maniere que le précédent, en prenant le Zénith pour le Pole, & le Pole pour le Zénith.

Exemple.

Les trois diſtances au Pole ſont (fig. 34) PA = 39° 44′ 54″, PA' = 45° 51′ 3″, PA" = 54° 26′ 46″. Les dif- Fig. 34.

férences des angles horaires APA' $= 20^\circ\ 8'\ 29''$, A'PA'' $=$ $15^\circ\ 57'\ 25''$; APA'' $= 36^\circ\ 5'\ 54''$. On demande la hauteur commune, ou son complément AZ, & la distance PZ du Pole au Zénith ?

On trouvera par les mêmes calculs la hauteur commune, $8^\circ\ 10'\ 30''$ & la latitude $45^\circ\ 24'\ 8''$.

PROBLEME XXX.

Les hauteurs de deux Astres étant données, avec leurs déclinaisons & leurs ascensions droites & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure & la hauteur du Pole ?

Fig. 35. LEs déclinaisons des Astres A & A' (fig. 35) donnent leurs distances au Pole, AP, A'P, le tems écoulé entre les Observations, ayant égard aux ascensions droites, donne l'angle horaire APA'. On aura donc dans le triangle APA', deux côtés & l'angle compris. Ainsi par le 3[e] Cas, on trouvera les autres angles & la base. Les deux hauteurs observées donnent les deux distances au Zénith AZ, A'Z. On a donc les trois côtés du triangle AZA', & par le 1[er] Cas, on trouvera l'un des angles A ou A'. Sa différence avec l'angle correspondant du triangle APA', sera l'un des angles de position ZAP, ou ZA'P ; & dans le triangle ZAP, ou ZA'P, ayant deux côtés & l'angle compris, on aura la distance ZP du Zénith au pole, & les angles AZP, APZ, ou A'ZP, A'PZ. On aura donc l'heure par l'ascension droite du Soleil & d'un des deux Astres, & l'angle Azimuthal.

Exemple.

Soit A *Aldebaran*, A' *Procyon* ; AP, $73^\circ\ 59'\ 30''$ complément de la déclinaison d'*Aldebaran*, A'P $84^\circ\ 11'$, complément de celle de *Procyon*, AZ la distance d'*Aldebaran* au Zénith $20^\circ\ 0'\ 0''$, A'Z celle de *Procyon* 81°

55′ 41″, l'angle horaire entre les deux observations, ayant égard à la différence des ascensions droites, est 4h 15′ 8″, qui valent 63° 47′. On demande l'heure, l'Azimuth, & la latitude?

A'P =	84°	11′	0″
AP =	73	59	30
Somme	158	10	30
Differ.	10	11	30
½ somme	79	5	15
½ differ.	5	5	45
½ APA'	31	53	30

Triangle APA'.

1. Le sin. de la ½ somme des côtés		Compl. arith.	0.007925
: au sinus de leur ½ différence			8.948520
:: La cotang. de ½ APA'			0.206040
: A la tang. de la ½ différence des angles	8° 16′ 17″		9.162485
2. Le cos. de la ½ somme des côtés,		Compl. arith.	0.722826
: Au cos. de leur ½ différence			9.998280
:: La cotang. de ½ APA'			0.206040
: A la tang. de la ½ somme des angles	83° 15′ 19″		0.927146
½ différence	8 16 17		
Le plus grand angle A'AP	91 31 36		
Le plus petit AA'P	74 59 2		

Pour trouver AA'

1. Le rayon : au cosinus de APA',	63° 47′ 0″	9.645193
:: La tangente de PA	73 59 30	0.542265
: A la tangente de M, *aigu*	56 59 54	0.187458
PA'	84 11 0	
Différence N	27 11 6	

2. Le cosinus de M	56° 59′ 54″	Compl. arith.	0.263872
: Au cosinus de PA	73 59 30		9.440558
:: Le cosinus de N	27 11 6		9.949163
: Au cosinus de AA'	63 13 51		9.653593

Triangle ZAA', *dont on a les trois côtés.*

ZA' =	81° 55' 41"		
ZA =	20 0 0		
AA' =	63 13 51		
Somme	165 9 32		
½ somme	82 34 46		
— AA' =	63 13 51	Compl. arithm. du ſinus de AA'	0.049233
1^er^ reſte	19 20 55	Sinus du 1^er^ reſte	9.520241
— ZA' =	81 55 41	Compl. arit. du ſinus de ZA'	0.004324
2^d^ reſte	0 39 5	Sinus du 2^d^ reſte	8.055708
		Somme	7.629506
½ ſomme, ſinus de ½ AA'Z,	3° 44' 33"		8.814753
Donc AA'Z =	7 29 6		
AA'P =	74 59 2		
Différence, ZA'P =	67 29 56		

Triangle ZA'P, *dont on a deux côtés & l'angle compris.*

1. Le rayon : au coſin. de ZA'P,	67° 29' 56"	9.582860
: : La tang. de A'P	84 11 0	0.991953
: A la tangente de M, *aigu*	75 5 40	0.574813
ZA'	81 55 41	
Différence N =	6 50 1	

2. Le coſinus de M	75° 5' 40"	Compl. arit.	0.589685
: Au coſinus de A'P	84 11 0		9.005805
: : Le coſinus de N	6 50 1		9.996904
: Au ſinus de la latitude	23 1 44		9.592394

Si l'on cherche l'angle horaire & l'Azimuth, on trouvera A'PZ = 83° 41' & A'ZP = 87° 5'.

REMARQUE.

L'Auteur d'une excellente piéce intitulée *Horolepſe Nautique*, imprimée dans le recueil des prix de l'Acad. des Sciences en 1747, donne la ſolution de ce Probléme par une équation du 2^d^ degré, qui renferme onze produits de quatre dimenſions, & cependant il ne ſuppoſe

qu'une ſeule ſituation des deux Aſtres. Il en eſt, dit cet Auteur, bien d'autres poſſibles ; car les deux Aſtres peuvent être ſuppoſés tous deux au-deſſous de l'équateur, ou au-deſſous du cercle de ſix heures ; l'un peut être au-deſſus de ces deux cercles, & l'autre au-deſſous de l'un des deux ; l'un peut être d'une part, & l'autre de l'autre part du Méridien. Outre cela, l'équation du ſecond degré indique deux latitudes différentes, ce qui peut embarraſſer un Marin. On ne trouve pas cet inconvénient dans les régles qne nous avons tirées de la Trigonométrie ſphérique : En voici quelques applications.

Corollaire 1.

On peut emploier deux hauteurs du même Aſtre, au lieu des hanteurs de deux Aſtres différens. Dans ce cas le triangle APA' (fig. 35) devenant iſoſcéle, il faut le partager en deux triangles rectangles égaux, par le moyen d'un arc perpendiculaire à la baſe ; ce qui rend le calcul de ce triangle plus court. Fig 35.

Corollaire 2.

Lorſque c'eſt le Soleil ou une Planéte dont on a obſervé les hauteurs, ſi on veut avoir égard au changement de déclinaiſon que l'Aſtre a pu ſouffrir dans l'intervalle des deux Obſervations, on prendra PA' plus grand ou plus petit que PA, ſelon la différence des déclinaiſons, & le calcul ſera le même.

Corollaire 3.

Si l'Aſtre dont on a obſervé les deux hauteurs eſt dans l'équateur, l'arc AA' ſera égal à l'angle horaire APA', & l'angle PA'A ſera de 90 degrés. On n'aura donc à calculer que le triangle ZAA' par les trois côtés donnés, & le triangle ZA'P. C'eſt le Probl. 24 de l'Aſtron. Nautique.

Corollaire 4.

Si l'on a le tems écoulé entre l'obſervation de la hauteur d'un Aſtre & le moment de ſon coucher, ou de ſon lever (ce qui eſt le cas du Probl. 23. de l'Aſtronomie Nautique) on peut encore trouver la hauteur du Pole & l'heure des Obſervations, en faiſant ZA' = 90° & dans ce cas on réſoudra le triangle ZA'A par le 6ᵉ Cas des triangles rectangles, en prenant pour les angles les ſupplémens des côtés oppoſés, & réciproquement ; ce qui fournit cette analogie : le ſinus de AA' eſt au rayon, comme le coſinus de ZA eſt au coſinus de ZA'A.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″ Nord, on a obſervé ſa hauteur 10° 16′ environ à 6 heures, & il s'eſt couché une heure après. On demande la latitude Nord ?

PA = PA' = 70° 20′ 50.″ ZA = 79° 44′ 0.″ ZA′ = 90.°

1. Le rayon : au ſinus de PA,	70° 20′ 50″		9.973935
:: Le ſinus de ½ APA'	7 30 0		9.115698
: Au ſinus de ½ AA'	7 3 39		9.089633
Donc AA' =	14 7 18		
2. Le rayon : au coſ. de PA,	70° 20′ 50″		9.526752
:: La tangente de ½ APA'	7 30 0		9.119429
: A la cotangente de PA'A	87 27 53		8.646181
3. Le ſinus de AA'	14° 7′ 18″	Compl. arith.	0.612643
: Au rayon :: le coſ. de ZA	79 44 0		9.250980
: Au coſinus de ZA'A	43 4 17		9.863623
AA'P =	87 27 53		
Donc ZA'P =	44 23 36		
4. Le rayon : au coſinus de ZA'P			9.854035
:: Le ſinus de PA	70° 20′ 50″		9.973935
: Au coſ. de ZP, ſinus de la lat.	42 17 37		9.827970

On suppose qu'on ait eu égard à la réfraction horisontale. Nous avons averti ci-devant pag. 137 qu'il falloit observer le coucher ou le lever du Soleil, lorsque le bord inférieur de son disque paroit élevé au dessus de l'horison, à la vue simple, d'environ la moitié de son diamètre apparent; parce que son diamètre est à peu près égal à la quantité de la réfraction horisontale.

PROBLEME XXXI.

Etant donnée la hauteur d'un Astre connu A, *l'angle* AZA' *de la différence de son Azimuth avec celui d'un autre Astre connu* A', *& le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure, la hauteur du Pole & l'angle Azimuthal?*

DAns le triangle APA', on connoit les deux côtés AP, A'P, par la déclinaison des Astres, & l'angle compris APA' par le tems & par la différence des ascensions droites. On aura donc les autres angles & la base AA', par le 3^e Cas des obliquangles. Fig. 35.

Dans le triangle AZA', on a par la hauteur observée le côté AZ; par la différence des Azimuths l'angle AZA', & par le 1^{er} calcul le côté AA' opposé à cet angle. On aura donc par le 5^e Cas des obliquangles, les angles A & A', & le côté ZA. Donc dans le triangle ZA'P, ayant deux côtés & l'angle compris, ou si l'on ne veut pas chercher ZA', ayant pareillement dans le triangle ZAP deux côtés & l'angle compris, on aura ZP & les angles P & Z.

Exemple.

Soit A, *Aldebaran*, A' *Procyon*; AP sera $= 73^\circ\ 59'\ 30''$ & A'P $= 84^\circ\ 11'\ 0''$. Soit APA' de $4^h\ 15'\ 8''$, par la différence des tems & des ascensions droites, & en degrés $63^\circ\ 47'\ 0''$. Soit la distance AZ *d'Aldebaran* au Zénith, $20^\circ\ 0'\ 0''$, la différence AZA' des Azimuths 19°

La différence des deux afcenfions droites étant 33° 8′, & l'Etoile *Sirius* du grand Chien étant plus orientale qu'*Aldebaran*, elle étoit en *a*' lorfque *Aldebaran* étoit en A, de manière que l'angle AP*a*' eft de 33° 8′ ; & lorfque cette étoile eft arrivée en A', l'angle *a*'PA' a été de 3 heures, qui valent 45 degrés. Il faut donc fouftraire de 45° la différence 33° 8′ des afcenfions droites, pour avoir l'angle APA' = 11° 52′ ; & par le 3ᵉ Cas des obliquangles, on dira :

PA' =	106° 24′ 0″
PA =	73 59 30
Somme	180 23 30
Differ.	32 24 30
½ fomme	90 11 45
½ differ.	16 12 15
½ APA' =	5 56 0

1. Le fin. de la ½ fomme des côtés	Compl. arith.	0.000005
: Au finus de leur ½ differ.	16° 12′ 15″	9.445699
: : La cotang. de ½ APA'	5 56 0	0.983267
: A la tang. de la ½ diff. des angles	69 34 25	0.428969
2. Le cof. de la ½ fomme des côtés	Comp. arit.	2.466237
: Au cof. de leur ½ differ.	16° 12′ 15″	9.982395
: : La cotang. de ½ APA'	5 56 0	0.983267
: A la tang. de la ½ fomme *obtufe* des angles	90 1 16	3.431899
½ différence	69 34 25	
Le plus grand angle A'AP =	159 35 41	
Son fupplément ZAP =	20 24 19	
Le moindre AA'P =	20 26 51	

Triangle AZP

Où l'on a deux côtés, AP = 73° 59′ 30″. ZP = 42° 0′ 0″, complément de la latitude & l'angle oppofé ZAP = 20° 24′ 19″. Donc par le 5ᵉ Cas,

1. Le rayon : au cofinus du côté AP,	73° 59′ 30″	9.440558
: : La tangente de l'angle ZAP	20 24 19	9.570546
: A la cotang. d'un angle *m aigu*	84 8 33	9.011104

2. La tang. de l'autre côté ZP,	42° 0′ 0″	comp. arit.	0.045563
A la tangente de AP	73 59 30		0.542265
: Le cosinus de *m*	84 8 33		9.008833
: Au cosinus de *n*	66 43 50		9.596661
ZPA = *m* — *n*	17 24 43, ou *m*+*n*=150° 52′ 23″		
3. Le sinus de ZP	42° 0′ 0″	Comp. arit.	0.174489
: Au sinus de ZAP	20 24 19		9.542400
:: Le sinus de AP	73 59 30		9.982823
: Au sinus de AZP	30 3 24		9.699712
Ou de son supplément	149 56 36		

Ce Probléme est le 26 de l'*Astronomie Nautique.* On l'y résout par une équation du 2[d] degré & pour un seul Cas. Si la différence des ascensions droites étoit nulle, ou de 180°, les deux Astres paroitroient en même tems dans le Méridien. C'est le cas du Probléme 27 de l'*Astron. Naut.* où l'on enseigne à trouver l'heure de la nuit indépendamment de la hauteur du Pole, par l'observation de deux Astres dans un même vertical; & il est vrai que s'ils ont la même ascension droite, ils seront au Méridien, lorsqu'ils paroitront dans le même vertical, & l'on aura l'heure par la différence entre leur ascension droite & celle du Soleil. M[r]. *de Maupertuis* ajoute que cette observation se peut faire facilement à la Mer, parce qu'elle n'a besoin que d'un fil à plomb. Il n'est pas fort aisé sur un Navire de viser à deux Etoiles par un fil chargé d'un plomb.

PROBLEME XXXIII.

L'heure du passage de deux Astres connus par le même vertical, étant donnée, trouver la hauteur du Pole, l'angle Azimuthal & la hauteur des Astres?

C'Est l'inverse du Probléme précédent. Le triangle APA' se calculera de la même manière; & dans ZAP, ayant les deux angles A & P, & le côté compris, Fig. 37.

52′ 50.″ On demande l'angle horaire & la latitude?

On trouvera, comme dans le Probl. XXX, AA'P = 74° 59′ 2″, AA' = 63° 13′ 51.″ A'AP = 91 31 36.

Et dans le triangle AZA', on dira :

1. Le rayon : au cosinus de AZ,	20° 0′ 0″		9.972986
:: La tangente de l'angle AZA'	19 52 50		9.558242
: A la cotang. d'un arc *m aigu*	71 13 55		9.531228
2. La tangente de AA'	63° 13′ 51″	Compl. arit.	9.702817
: A la tangente de AZ	20 0 0		9.561066
:: Le cosinus de l'arc *m*	71 13 55		9.507502
: Au cosin. d'un arc *n aigu*	86 36 48		8.771395

ZAA' = *m* + *n*	157 50 43,	ou *n* — *m* =	15 22 53
— A'AP =	91 31 36		91 31 36
Donc ZAP =	66 19 7	ou =	76 8 43

Le rayon : au cos. de ZAP,	66° 19′ 7″		9.603848
:: La tangente de AP	73 59 30		0.542265
: A la tangente de M, *aigu*	54 27 41		0.146113
— ZA =	20 0 0		
Différence N =	34 27 41		
Le cosinus de M	54° 27′ 41″	Compl. arith.	0.235636
: Au cosinus de AP	73 59 30		9.440558
:: Le cosinus de N	34 27 41		9.916195
: Sinus de la latitude	23 1 42		9.592389

L'Auteur de *l'Horolepse Nautique* dit que si l'on vouloit résoudre ce Probléme directement, on tomberoit dans une équation du 4^e^ degré. Il a recours à une méthode indirecte, qui le conduit à une équation du 2^d^ degré; laquelle exigeant une extraction de racine quarrée, indique un calcul numérique pénible. Ce calcul, ajoute-t-il, est beaucoup plus long & plus difficile que celui que la régle de Trigonométrie sphérique prescrit. Elle

Elle est donc préférable dans la pratique. Le désavantage de l'Algébre dans tous ces cas consiste en ce que saisissant son objet d'un seul coup, elle parvient à une formule compliquée, qui indique plusieurs opérations numériques, dont quelques-unes ne peuvent pas être exécutées directement par les Logarithmes; au lieu que la Trigonométrie dans les mêmes cas, divise l'objet proposé en deux parties qu'elle fait chercher l'une après l'autre, en sorte qu'elle n'a besoin pour chacune, que d'une Régle de trois simple & pratiquable par Logarithmes.

PROBLEME XXXII.

La hauteur du Pole étant donnée, & deux Astres connus A *&* A' *étant vus dans un même vertical, trouver l'heure de l'Observation & l'angle Azimuthal?*

SI dans le moment où l'Etoile A (fig. 36) est dans l'Azimuth ZAA', l'autre Etoile A' est encore en *a'*, l'angle AP*a'* sera la différence de leurs ascensions droites, & l'angle *a'*PA' sera l'angle qui mesure le tems que l'Etoile A' employe à venir dans le vertical ZAA' après la première Etoile A. On aura donc par ce moyen l'angle APA', & par conséquent les angles A & A'. Donc dans le triangle ZPA, ayant deux côtés ZP, AP & l'angle ZAP, on aura l'angle horaire ZPA, & l'angle Azimuthal Z. Donc on aura l'heure du Soleil par son ascension droite. Fig. 36.

Exemple.

La latitude étant 48° 0′ Nord, on a observé le passage d'*Aldebaran* par un vertical, son ascension droite étant 65° 33′, & sa distance PA au Pole 73° 59′ 30″. *Sirius* a traversé le même vertical 3 heures après, son ascension droite étant 98° 41′, & sa distance PA' au même Pole, 106° 24′. On demande l'heure de l'Observation?

La différence des deux ascensions droites étant 33° 8′, & l'Etoile *Sirius* du grand Chien étant plus orientale qu'*Aldebaran*, elle étoit en *a'* lorsque *Aldebaran* étoit en A, de manière que l'angle AP*a'* est de 33° 8′; & lorsque cette étoile est arrivée en A', l'angle *a'*PA' a été de 3 heures, qui valent 45 degrés. Il faut donc soustraire de 45° la différence 33° 8′ des ascensions droites, pour avoir l'angle APA' = 11° 52′; & par le 3ᵉ Cas des obliquangles, on dira:

PA' =	106° 24′ 0″
PA =	73 59 30
Somme	180 23 30
Différ.	32 24 30
½ somme	90 11 45
½ differ.	16 12 15
½ APA' =	5 56 0

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arith.	0.000005
: Au sinus de leur ½ differ.	16° 12′ 15″	9.445699
: : La cotang. de ½ APA'	5 56 0	0.983267
: A la tang. de la ½ diff. des angles	69 34 25	0.428969
2. Le cos. de la ½ somme des côtés	Comp. arit.	2.466237
: Au cos. de leur ½ differ.	16° 12′ 15″	9.982395
: : La cotang. de ½ APA'	5 56 0	0.983267
: A la tang. de la ½ somme *obtuse* des angles	90 1 16	3.431899
½ différence	69 34 25	
Le plus grand angle A'AP =	159 35 41	
Son supplément ZAP =	20 24 19	
Le moindre AA'P =	20 26 51	

Triangle AZP

Où l'on a deux côtés, AP = 73° 59′ 30″. ZP = 42° 0′ 0″, complément de la latitude & l'angle opposé ZAP = 20° 24′ 19″. Donc par le 5ᵉ Cas,

1. Le rayon : au cosinus du côté AP,	73° 59′ 30″	9.440558
: : La tangente de l'angle ZAP	20 24 19	9.570546
: A la cotang. d'un angle *m aigu*	84 8 33	9.011104

2. La tang. de l'autre côté ZP,	42° 0′ 0″	comp. arit.	0.045563
: A la tangente de AP	73 59 30		0.542265
: : Le cosinus de *m*	84 8 33		9.008833
: Au cosinus de *n*	66 43 50		9.596661
ZPA = *m* — *n*	17 24 43, ou *m* + *n* = 150° 52′ 23″		
3. Le sinus de ZP	41° 0′ 0″	Comp. arit.	0.174489
: Au sinus de ZAP	20 24 19		9.542400
: : Le sinus de AP	73 59 30		9.982823
: Au sinus de AZP	30 3 24		9.699712
Ou de son supplément	149 56 36		

Ce Probléme est le 26 de l'*Astronomie Nautique.* On l'y résout par une équation du 2[d] degré & pour un seul Cas. Si la différence des ascensions droites étoit nulle, ou de 180°, les deux Astres paroitroient en même tems dans le Méridien. C'est le cas du Probléme 27 de l'*Astron. Naut.* où l'on enseigne à trouver l'heure de la nuit indépendamment de la hauteur du Pole, par l'observation de deux Astres dans un même vertical ; & il est vrai que s'ils ont la même ascension droite, ils seront au Méridien, lorsqu'ils paroitront dans le même vertical, & l'on aura l'heure par la différence entre leur ascension droite & celle du Soleil. M[r]. *de Maupertuis* ajoute que cette observation se peut faire facilement à la Mer, parce qu'elle n'a besoin que d'un fil à plomb. Il n'est pas fort aisé sur un Navire de viser à deux Etoiles par un fil chargé d'un plomb.

PROBLEME XXXIII.

L'heure du passage de deux Astres connus par le même vertical, étant donnée, trouver la hauteur du Pole, l'angle Azimuthal & la hauteur des Astres ?

C'Est l'inverse du Probléme précédent. Le triangle APA' se calculera de la même manière ; & dans ZAP, ayant les deux angles A & P, & le côté compris, Fig. 37.

M ij

on aura l'autre angle & le complément ZP de la hauteur du Pole.

Exemple.

A huit heures du soir on a vu passer *Aldebaran* par un vertical inconnu, & à onze heures *Sirius* a passé par le même vertical, l'ascension droite du Soleil étant 288° 8′ 17″. On demande la latitude, l'angle Azimuthal & la hauteur de l'Etoile ?

Les huit heures après midi réduites en degrés valent	120°
Ajoutez à cet angle horaire du Soleil, son ascension droite	288 8′ 17″
De la somme	408 8 17
Retranchez l'ascension droite d'*Aldebaran*	65 33 0
reste	342 35 17
Le complément de ce reste à 360° sera l'angle horaire ZPA =	17 24 43
Mais on a trouvé dans le Probléme précédent ZAP =	20 24 19

Donc on aura par le 4ᵉ Cas des obliquangles,

ZAP =	20° 24′ 19″
ZPA =	17 24 43
Somme	37 49 2
Différence	2 59 36
½ somme	18 54 31
½ différence	1 29 48
½ AP =	36 59 45

1. Le sinus de la ½ somme	18° 54′ 31″	Comp. arit. 0.489375
: Au sinus de la ½ différence	1 29 48	8.416953
: : La tang. de ½ AP	36 59 45	9.877049
: A la tang. de la ½ differ. des côtés	3 28 30	8.783377

2. Le cosinus de la ½ somme	18° 54′ 31″	Comp. arit.	0.024092
: Au cosinus de la ½ différence	1 29 48		9.999851
: : La tang. de ½ AP	36 59 45		9.877049
: A la tang. de la ½ somme des côtés	38 29 30		9.900992
½ différence	3 28 30		
Le plus grand côté ZP	41 58 0		
Le moindre ZA =	35 1 0		

Ce qui donne la latitude 48° 2′ & la hauteur *d'Aldebaran* 54° 59′.

Pour trouver l'angle Azimuthal Z, je dis :

1. Le rayon : au cosinus de AP,	73° 59′ 30″	9.440558
: : La tangente de ZAP	20 24 19	9.570545
: A la cotang. de *m aigu*	84 8 33	9.011103
ZPA =	17 24 43	
Donc *n* =	66 43 50	

2. Le sinus de *m*	84° 8′ 33″	Comp. arit.	0,002274
: Au sinus de *n*	66 43 50		9.963153
: : Le cosinus de ZAP	20 24 19		9.971855
: Au cosinus de l'angle Z *obtus*	149 56 36		9.937282

On peut se tromper aisément d'une seconde de tems dans l'observation de l'heure, & l'erreur d'une seconde de tems vaut 15″ de degré, qui peuvent influer beaucoup sur la latitude. Mais si l'on observe les deux Astres dans le premier vertical, on verra que l'erreur du tems y influe moins sur la latitude, que dans tout autre vertical. Ainsi il vaut mieux choisir deux Etoiles en deça de l'équateur, & tacher de les observer dans le premier vertical. Celles qui sont sous l'équateur ne traversent le premier vertical, que lorsqu'elles sont sous l'horison.

PROBLEME XXXIV.

La hauteur d'un Aſtre connu étant donnée, avec le tems écoulé entre l'obſervation de ſa hauteur & le paſſage d'un autre Aſtre connu par le même vertical, trouver la latitude, l'angle Azimuthal & l'heure ?

Fig. 36. ON trouvera comme dans le Probl. XXXII. l'angle A, & ayant encore les deux côtés, AP complément de la déclinaiſon, AZ complément de la hauteur, on trouvera le reſte.

Exemple.

La diſtance d'*Aldebaran* au Zénith a été trouvée 35° 1′ 0″ dans un vertical inconnu; & trois heures après, *Sirius* a traverſé le même vertical. On demande la latitude & les angles Azimuthal & horaire ?

On a trouvé dans le Probl. XXXII. l'angle ZAP = 20° 24′ 19″. Donc par le 3ᵉ Cas des obliquangles.

1. Le rayon : au coſinus de ZAP,	20° 24′ 19″	9.971855
: : La tangente de AP	73 59 30	0.542265
: A la tangente de M, *aigu*	72 58 49	0.514120
AZ =	35 1 0	
Différence N =	37 57 49	

2. Le coſinus de M	72° 58′ 49″	Compl. arit. 0.533576
: Au coſinus de AP	73 59 30	9.440558
: : Le coſinus de N	37 57 49	9.896747
: Au ſinus de la latitude	47 58 20	9.870881

On trouvera les angles Z & P par les ſinus & coſinus de la demi-ſomme & de la demi-différence des côtés AZ & AP; & l'on aura, comme ci-devant PZA = 149° 56′ 36″, & ZPA = 17° 24′ 43″.

PROBLEME XXXV.

L'angle Azimuthal étant donné avec le tems du passage de deux Astres par le même vertical, trouver la latitude, l'heure & la hauteur des Astres?

On trouvera, comme dans le Probl. XXXII. les angles A & A', & par le moyen des angles connus A & Z, & du côté AP, on cherchera ZP, ZPA, & ZA par le 6[e] Cas.

Exemple.

L'angle Azimuthal de *Sirius* & *Aldebaran* est 149° 56′ 36″, l'intervalle de leurs passages par cet Azimuth est 3 heures. On demande l'angle horaire ZPA, la latitude & la hauteur de ces Etoiles? Fig. 36 & 37.

On trouvera, comme ci-devant, ZAP = 20° 24′ 19″. ZA'P = 20° 26′ 51″ & par le 6[e] Cas.

Le sinus de l'angle Z	149° 56′ 36″	Compl. arit.	0.300287
: Au sinus du côté AP	73 59 30		9.982823
: : Le sinus de l'angle A	20 24 19		9.542400
: Au cosinus de la latitude	48 0 0		9.825510

On trouvera le complément ZA de la hauteur = 35° 1′ 0″. ZA' = 69° 28′ 30″; & l'angle ZPA = 17° 24′ 30″.

PROBLEME XXXVI.

La hauteur du Pole étant connue, & la différence des hauteurs de deux Astres connus dans un même vertical, trouver l'heure, l'angle Azimuthal & la hauteur des Astres?

On aura dans le triangle APA' les trois côtés, & on trouvera les trois angles par le 1[er] Cas; & connoissant ZP, AP ou A'P, & les angles A & A', on trou-

vera les angles horaires, l'angle Z, & ZA ou ZA', par le 5^e^ Cas.

Exemple.

La différence des hauteurs d'*Aldebaran* & de *Sirius* est AA' = 34° 27′ 30″; latitude Nord 48°. On demande l'Azimuth, les hauteurs & l'heure.

Dans le triangle APA', on a AP = 73° 59′ 30″. A'P = 106° 24′ 0″, AA' = 34° 27′ 30″.

Par le 1^er^ Cas, on trouvera les angles APA' = 11° 52′ 0″. A'AP = 159° 35′ 32″ & son supplément ZAP = 20° 24′ 28″.

Ensuite on résoudra par le 5^e^ Cas, le triangle ZAP, comme dans le Probl. XXXII. & l'on aura l'angle Azimuthal Z = 149° 56′ 22″ & ZPA = 17° 24′ 46″. Fig. 36 & 37.

PROBLEME XXXVII.

La différence des hauteurs de deux Astres connus étant donnée, avec l'angle Azimuthal commun, trouver la latitude, l'angle horaire & la hauteur des deux Astres?

Exemple.

La différence des hauteurs d'*Aldebaran* & *Sirius* est 34° 27′ 30″, le supplément AZP de l'angle Azimuthal est 149° 56′ 30″. On demande la latitude, &c.

On trouvera, comme dans le Probléme précédent, les angles ZAP = 20° 24′ 28″. APA′ = 11° 52′ 4″, AA'P = 20° 26′ 55″.

Ensuite on résoudra, comme dans le Probléme XXXV, le triangle AZP, par le 6^e^ Cas des obliquangles pour avoir ZP = 42° complément de la latitude. On trouvera encore par le 5^e^ Cas l'angle ZPA = 17° 24′ 43″, comme dans le Probl. XXXII., & enfin ZA = 35° 2′ 42″.

PROBLEME XXXVIII.

La hauteur du Pole étant donnée, & deux Aſtres connus étant vus dans un même Almicantarath inconnu, trouver l'heure, la hauteur des Aſtres & l'angle Azimuthal?

SOient (fig. 38) A & A' les deux Aſtres à diſtances égales & inconnues du Zénith Z. Leurs déclinaiſons & aſcenſions droites, & l'intervalle des obſervations, s'ils ne paroiſſent pas dans le même inſtant à la même hauteur, donneront tout le triangle APA', comme dans les Problémes précédens. Soit N le milieu du grand cercle AA' prolongé vers *p*; & I le Pole de ce grand cercle. Le quart de cercle IN paſſera par le Zénith. L'angle IA'P eſt complément de PA'*p*, puiſque IA'*p* eſt droit, & PA'*p* eſt ſupplément de PA'A. A'N étant la meſure de l'angle NIA', on aura cet angle; & ayant PA', PA'I, & A'I de 90°, on trouvera PI & PIA', & par conſéquent PIZ. On aura auſſi IZ complément de ZN. Dans le triangle rectangle ZNA', on a ZN & NA'. On trouvera donc ZA' & NA'Z. Enfin ayant ZA' = ZA, PA & PZ, on aura l'angle horaire ZPA, & le ſupplément AZP de l'angle azimuthal. Fig. 38.

Exemple.

La latitude étant 43° 18', on a vu dans le même inſtant *Aldebaran* & *Sirius* à la même hauteur inconnue. On demande l'heure, la hauteur & l'angle azimuthal?

L'aſcenſion droite de *Sirius* =	98°	41'
L'aſcenſion droite d'*Aldebaran* =	65	33
La différence APA' =	33	8
½ APA' =	16	34

La diſtance de *Sirius* au pole Nord = 106° 24' = PA

La diſtance de *Aldebaran* au pole Nord = 73 59 30" = PA'

vera les angles horaires, l'angle Z, & ZA ou ZA', par le 5[e] Cas.

Exemple.

La différence des hauteurs d'*Aldebaran* & de *Sirius* est AA' = 34° 27′ 30″; latitude Nord 48°. On demande l'Azimuth, les hauteurs & l'heure.

Dans le triangle APA', on a AP = 73° 59′ 30″. A'P = 106° 24′ 0″, AA' = 34° 27′ 30″.

Par le 1[er] Cas, on trouvera les angles APA' = 11° 52′ 0″. A'AP = 159° 35′ 32″ & son supplément ZAP = 20° 24′ 28″.

Ensuite on résoudra par le 5[e] Cas, le triangle ZAP, comme dans le Probl. XXXII. & l'on aura l'angle Azimuthal Z = 149° 56′ 22″ & ZPA = 17° 24′ 46″.

PROBLEME XXXVII.

La différence des hauteurs de deux Astres connus étant donnée, avec l'angle Azimuthal commun, trouver la latitude, l'angle horaire & la hauteur des deux Astres ?

Exemple.

La différence des hauteurs d'*Aldebaran* & *Sirius* est 34° 27′ 30″, le supplément AZP de l'angle Azimuthal est 149° 56′ 30″. On demande la latitude, &c.

On trouvera, comme dans le Probléme précédent, les angles ZAP = 20° 24′ 28″. APA′ = 11° 52′ 4″, AA'P = 20° 26′ 55″.

Ensuite on résoudra, comme dans le Probléme XXXV, le triangle AZP, par le 6[e] Cas des obliquangles pour avoir ZP = 42° complément de la latitude. On trouvera encore par le 5[e] Cas l'angle ZPA = 17° 24′ 43″, comme dans le Probl. XXXII., & enfin ZA = 35° 2′ 42″.

PROBLEME XXXVIII.

La hauteur du Pole étant donnée, & deux Aſtres connus étant vus dans un même Almicantarath inconnu, trouver l'heure, la hauteur des Aſtres & l'angle Azimuthal?

SOient (fig. 38) A & A' les deux Aſtres à diſtances égales & inconnues du Zénith Z. Leurs déclinaiſons & aſcenſions droites, & l'intervalle des obſervations, s'ils ne paroiſſent pas dans le même inſtant à la même hauteur, donneront tout le triangle APA', comme dans les Problémes précédens. Soit N le milieu du grand cercle AA' prolongé vers *p*; & I le Pole de ce grand cercle. Le quart de cercle IN paſſera par le Zénith. L'angle IA'P eſt complément de PA'*p*, puiſque IA'*p* eſt droit, & PA'*p* eſt ſupplément de PA'A. A'N étant la meſure de l'angle NIA', on aura cet angle; & ayant PA', PA'I, & A'I de 90°, on trouvera PI & PIA', & par conſéquent PIZ. On aura auſſi IZ complément de ZN. Dans le triangle rectangle ZNA', on a ZN & NA'. On trouvera donc ZA' & NA'Z. Enfin ayant ZA' = ZA, PA & PZ, on aura l'angle horaire ZPA, & le ſupplément AZP de l'angle azimuthal. Fig. 38.

Exemple.

La latitude étant 43° 18', on a vu dans le même inſtant *Aldebaran* & *Sirius* à la même hauteur inconnue. On demande l'heure, la hauteur & l'angle azimuthal?

L'aſcenſion droite de *Sirius* =	98°	41'
L'aſcenſion droite d'*Aldebaran* =	65	33
La différence APA' =	33	8
½ APA' =	16	34

La diſtance de *Sirius* au pole Nord = 106° 24' = PA

La diſtance de *Aldebaran* au pole Nord = 73 59 30" = PA'

Triangle APA'.

Par le 3e Cas des obliquangles, comme dans le Probléme XXXII.

1. Le sin. de la ½ somme des côtés PA, PA',	90° 11′ 45″	C.ar.	0.000003
: Au sinus de leur ½ différence	16 12 15		9.445699
:: La cotang. de ½ APA'	16 34 0		0.526543
: A la tang. de la ½ différence des angles	43 10 13		9.972245

2. Le cos. de la ½ somme des côtés,	90° 11′ 45″	Comp. arit.	2.466237
: Au cos. de leur ½ différence	16 12 15		9.982395
:: La cotang. de ½ APA'	16 34 0		0.526543
: A la tang. de la ½ som. *obtuse* des ang.	90 3 39		2.975175
½ différence	43 10 13		
Le plus grand angle AA'P =	133° 13′ 52″		
Le moindre A'AP =	46 53 26		
Complément de AA'P	43 13 52 = PA'I		

On trouvera aussi AA' = 46° 1′ 40″. NA' = 23° 0′ 50″ = NIA'.

Triangle PIA'.

L'on a PA' = 73° 59′ 30″, IA' = 90°, PA'I = 43° 13′ 52″. On dira donc, en changeant les angles en côtés, par le 4e Cas des rectangles.

1. Le rayon : au cosinus de PA'I,	43° 13′ 52″	9.862487
:: Le sinus de PA'	73 59 30	9.982823
: Au cos. de PI *aigu*	45 32 44	9.845310

2. Le rayon : au cos. de PA'I	43° 13′ 52″	9.835654
:: La tangente de PA'	73 59 30	0.542265
: A la tangente de PIA', *aigu*	67 16 21	0.377919
Ajoutez à cet angle AIN	23 0 50	
Vous aurez l'angle PIZ =	90 17 11 PZ = 46° 42′.	

Triangle PZI, *dont on a* PZ, PI & PIZ.

1. Le rayon : au cos. de PIZ	90° 17′ 11″	7.698830
:: La tang. de PI	45 32 44	0.008271
: A la tang. de M *obtus*	179 42 29	7.707101

2. Le cosin. de PI	45 32 44	Compl. ar.	0.154690
: Au cosin. de PZ	46 42 0		9.836209
: : Le cosin. de M	179 42 29		9.999994
: Au cosinus de N *obtus*	168 18 26		9.990893
IZ = M — N =	11 24 3		
Son complément ZN =	78 35 57		

Triangle ZNA' par le 5^e Cas des rectangles.

Le rayon : au cos. de NA'	23° 0′ 50″	9.963981
: : Le cos. ZN	78 35 57	9.295944
: Au cosinus de ZA', ou ZA, *aigu*	79 31 2	9.259925

Triangle ZPA', par le 1er Cas des obliquangles.

ZA' = 79° 31′ 2″
ZP = 46 42
PA' = 73 59 30

Somme	200 12 32				
½ somme	100 6 16				
— ZP	46 42 0	Compl. arit. sinus ZP	0.138004		
1er reste	53 24 16	Sinus du 1er reste	9.904642		
— PA'	73 59 30	Compl. arith. sinus PA'	0.017177		
2^d reste	26 6 46	Sinus du 2^d reste	9.643590		
		Somme	9.703413		
½ somme, sinus de ½ ZPA'	45° 17′ 40″		9.851706		
Angle horaire ZPA' =	90 35 20				

Ayant l'angle horaire, on trouvera l'heure du Soleil, par la différence de son ascension droite & de celle de l'Etoile.

PROBLEME XXXIX.

Deux Astres étant vus en même tems dans un même Almicantarath inconnu, & l'heure étant donnée, trouver la latitude, l'angle Azimuthal & la hauteur des Astres?

C'Est l'inverse du Problême précédent. On commencera par résoudre le triangle APA' (fig. 38) pour avoir Fig. 38.

les angles A & A' & la demi-base NA'. Ensuite on résoudra les triangles PIA', PIZ; PZA'.

Exemple.

Aldebaran & *Sirius* ont paru en même tems dans le même Almicantarath inconnu ; l'angle horaire ZPA' s'est trouvé de 90° 35′ 20″ par la différence des *ascensions* droites. On demande la latitude, l'azimuth & la hauteur des Astres A & A'.

On trouvera, comme dans le Probl. précédent, AA'P = 133° 13′ 52″. A'AP = 46° 53′ 26″. PA'I = 43° 13′ 52″. NA' = 23° 0′ 50″. PI = 45° 32′ 44″. PIA' 67° 16′ 21″. PIZ = 90° 17′ 11″. Et dans le triangle PIA', ayant IA' de 90°, PI & PA', on trouvera IPA' par le 6^e Cas des rectangles.

Le rayon : à la cotang. de PA',	73° 59′ 30″	9.457735
: : La cotangente de PI	45 32 44	9.991729
: Au cosinus de IPA', obtus	106 20 57	9.449464
Otez en l'angle donné A'PZ	90 35 20	
Reste ZPI =	15 45 37	

Dans le triangle ZPI, on a deux angles, P & I, & le côté compris PI. Donc par le 4^e Cas.

PIZ =	90° 17′ 11″
ZPI =	15 45 37
Somme	106 2 48
Différence	74 31 34
½ somme	53 1 24
½ différence	37 15 47
½ PI =	22 46 22

1. Le sin. de la ½ somme des angles	Compl. arit.	0.097518
: Au sinus de leur ½ différence		9.782096
: : La tangente de ½ PI		9.623045
: A la tang. de la ½ differ. des côtés 17° 38′ 58″.		9.502659

$\frac{1}{2}$. Le cos. de la $\frac{1}{2}$ somme des angles		Compl. arit.	0.220772
: Au cosinus de leur $\frac{1}{2}$ différence			9.900839
: : La tangente de $\frac{1}{2}$ PI			9.623045
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés	29° 3′ 2″		9.744656
$\frac{1}{2}$ difference	17 38 58		
Le plus grand côté PZ =	46 42 0		
Latitude	43 18 0		

PROBLEME XL.

Deux Astres connus étant vus en même tems dans un même Almicantarath inconnu, & connoissant l'angle compris entre leurs Azimuths dans ce même instant, trouver l'heure & la latitude?

On résoudra, comme dans les deux Problémes précédens, le triangle APA' dont on a deux côtés & l'angle compris, & ensuite le triangle PIA'. Après quoi, dans le triangle IZA', on connoit l'angle ZIA' mesuré par NA', l'angle IZA' supplément de NZA', moitié de l'angle donné AZA', & IA' de 90°. Ainsi on trouvera ZA' & ZA'I complément de ZA'N; & retranchant ZA'N de PA'N, on aura ZA'P. Enfin dans le triangle ZA'P, connoissant deux côtés ZA', A'P & l'angle compris, on aura tout le reste. Fig. 38.

Exemple.

Aldebaran & *Sirius* étant en même tems dans le même Almicantarath, la différence AZA' de leurs azimuths a été de 46° 50′ 10″. On demande l'heure & la latitude?

Le triangle APA' donne, comme ci-devant, AA'P = 133° 13′ 52″. A'AP = 46° 53′ 26″. PA'I = 43° 13′ 52″. NA' = 23° 0′ 50″. PI = 45° 32′ 44″. PIZ = 90° 17′ 11″.

Dans le triangle ZIA', nous avons IA' = 90°, ZIA' = 23° 0′ 50″ & IZA' supplément de NZA' 23° 25′ 5″. Donc en changeant les angles en côtés, on aura par le 1er Cas des rectangles.

1. Le sinus de IZA'	156° 34′ 55″	Comp. ar.	0.400731
: Au rayon : : le sin. de ZIA'	23 0 50		9.592126
: Au sinus de ZA'	79 38 12		9.992857
2. Le cosinus de ZIA'	23° 0′ 50″	Comp. ar.	0.036019
: Au rayon : : le cosinus de IZA',	156 34 55		9.962667
: Au cosinus de ZA'I	4 27 17		9.998686
Complément ZA'N =	85 32 43		
PA'N =	133 13 52		
PA'Z =	47 41 9		

Triangle ZA'P, *où l'on a deux côtés & l'angle compris.*

PA' =	73° 59′ 30″
ZA' =	79 38 12
Somme	153 37 42
Différence	5 38 42
$\frac{1}{2}$ Somme	76 48 51
$\frac{1}{2}$ Différence	2 49 21
$\frac{1}{2}$ PA'Z	23 50 34 $\frac{1}{2}$

1. Le sin. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés		Comp. arit.	0.011664
: Au sin. de leur $\frac{1}{2}$ différence			8.692335
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ PA'Z			0.354619
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ différence des angles	6° 31′ 43″		9.058568
2. Le cos. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés		Compl. arit.	0.641856
: Au cosinus de leur $\frac{1}{2}$ différence			9.999475
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ PA'Z			0.354619
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ somme des angles	84° 14′ 11″		0.995958
$\frac{1}{2}$ différence	6 31 43		
Le plus grand angle A'PZ	90 45 54		
Le moindre A'ZP	77 42 28		
3. Le rayon : au cos. de PA'Z	47° 41′ 9″		9.828141
: : La tangente de PA'	73 59 30		0.542265
: A la tangente de M *aigu*	66 55 2		0.370406
ZA'	79 38 12		
N =	12 43 10		

4. Le cosinus de M.	66° 55′ 2″	Compl. arit.	0.406647
: Au cosinus de N	12 43 10		9.989209
: : Le cosinus de PA'	73 59 30		9.440558
: Au sinus de la latitude	43 19 32		9.836414

REMARQUE.

DAns ces trois derniers Problémes, si l'on ne peut pas observer les deux Astres en même tems dans le même Almicantarath, on prendra la différence des tems & des ascensions droites pour chaque observation, comme dans le Probl. XXXII, pour avoir l'angle horaire APA'.

Si les deux Astres se levent ou se couchent en même tems, ou si l'on a le tems écoulé entre leur lever & leur coucher, la solution du Probléme sera la même; & elle sera indépendante de la réfraction horisontale, parce qu'on pourra prendre l'horison de la Mer pour un Almicantarath. On pourra même par ce moyen trouver la réfraction horisontale & l'abbaissement de l'horison de la Mer.

Il est vrai que les Etoiles même les plus brillantes disparoissent ordinairement avant que d'être sous l'horison. Mais on peut prendre l'intervalle entre le lever ou le coucher du Soleil & celui de la Lune, de Venus ou de Jupiter, si l'on a leurs déclinaisons & leurs ascensions droites.

Si l'on observe deux Etoiles de la même grandeur au moment où elles disparoissent avant leur coucher, ou lorsqu'on commence à les voir après leur lever, elles seront dans le même Almicantarath à fort peu près, sur tout si le tems est bien serein de part & d'autre; & la différence des tems jointe à la différence de leurs azimuths, donnera l'heure & la latitude.

PROBLEME XLI.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois ou quatre Etoiles, & l'intervalle de tems où les deux premières ſe trouvent dans un même vertical & où les deux autres ſe trouvent dans un autre même vertical; trouver l'heure, l'Azimuth & la latitude?

Fig. 39. SOient (fig. 39) A, A′, A″, A‴ les quatre Etoiles (ou que A & A″ ne ſoient, ſi l'on veut, qu'une même Etoile) ſoit Z le zénith, P le pole. Les deux plus orientales A, A' ſe trouvent dans le vertical ZAA' ou en même tems, ou peu de tems l'une après l'autre. Si elles ſont en même tems dans ce vertical, l'angle horaire APA' ſera la différence de leurs aſcenſions droites. Si la plus orientale A n'arrive à ce vertical que quelque tems après la précédente A', il faudra convertir ce tems en degrés, & ſouſtraire de cet angle la différence des aſcenſions droites, pour avoir l'angle APA'. Il en eſt de même des deux autres Etoiles A″, A‴ par rapport à leur vertical commun.

Par le moyen des déclinaiſons on connoit les côtés de ces angles horaires; & par le 3ᵉ Cas on aura les baſes A A′, A A″, A″A‴, & les angles A, A′, A″, A‴, ou leurs ſupplémens, comme PAZ. Cet angle étant ajouté à PAA″ donnera ZAA″; PA″Z étant retranché de PA″A, donnera ZA″A. On aura donc dans le triangle ZAA″, deux angles A & A″, & le côté compris AA″. Donc par le 4ᵉ Cas, on aura l'un des côtés ZA ou ZA″; & enfin dans le triangle ZAP ou ZA″P, ayant deux côtés ZA & AP, & l'angle compris ZAP, on trouvera l'angle horaire ZPA, l'azimuth ou ſon ſupplément PZA, & le complément ZP de la latitude.

Exemple, en ne prenant que trois Etoiles (fig. 40.)

Les trois Etoiles ſont *Procyon*, *Sirius* & *Rigel*. Leurs aſcenſions droites & leurs diſtances au Pole Nord, ſont

Aſcenſions

	Ascensions droites.	*Dist. au Pole Nord.*
De *Procyon* A	111° 44′	84° 11′ = PA
De *Sirius* A′	98 41	106 24 = PA′
De *Rigel* A″	75 48	98 29 = PA″

Procyon A & *Sirius* A′ passent en même tems par le même vertical ZAA′, & *Rigel* A″ se trouve alors dans un autre vertical ZA″a′; mais *Sirius* A′ ne vient à ce second vertical en a′ que 2ʰ 24′ 54″ ⅓ après cet instant; ensorte que l'angle parcouru A′Pa′ est 36° 13′ 35″. On demande l'angle horaire ZPA, la latitude, &c.

Triangle APA′

dont on a

APA′ = 13° 3′ differ. des asc. dr. ½ APA′ = 6° 31′ 30″ ½

PA′ =	106° 24′
PA =	84 11
Somme	190 35
Différence	22 13
½ somme	95 17 30″
½ différence	11 6 30

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.001855
: Au sin. de leur ½ différence		9.284802
: : La cot. de ½ APA′		0.941659
: A la tang. de la ½ differ. des angles 59° 24′ 41″		0.228316
2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	1.035148
: Au cosin. de leur ½ différence		9.991786
: : La cotang. de ½ APA′		0.941659
: A la tang. de la ½ somme *obtuse* des angles	90° 36′ 57″	1.968593
½ différence	59 24 41	

A′AP =	150 1 38
Supplément PAZ =	29 58 22
PA′Z =	31 12 16

PROBLEME XLI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois ou quatre Etoiles, & l'intervalle de tems où les deux premières se trouvent dans un même vertical & où les deux autres se trouvent dans un autre même vertical; trouver l'heure, l'Azimuth & la latitude?

Fig. 39. SOient (fig. 39) A, A', A'', A''' les quatre Etoiles (ou que A & A'' ne soient, si l'on veut, qu'une même Etoile) soit Z le zénith, P le pole. Les deux plus orientales A, A' se trouvent dans le vertical ZAA' ou en même tems, ou peu de tems l'une après l'autre. Si elles sont en même tems dans ce vertical, l'angle horaire APA' sera la différence de leurs ascensions droites. Si la plus orientale A n'arrive à ce vertical que quelque tems après la précédente A', il faudra convertir ce tems en degrés, & soustraire de cet angle la différence des ascensions droites, pour avoir l'angle APA'. Il en est de même des deux autres Etoiles A'', A''' par rapport à leur vertical commun.

Par le moyen des déclinaisons on connoit les côtés de ces angles horaires; & par le 3e Cas on aura les bases A A', A A'', A''A''', & les angles A, A', A'', A''', ou leurs supplémens, comme PAZ. Cet angle étant ajouté à PAA'' donnera ZAA''; PA''Z étant retranché de PA''A, donnera ZA''A. On aura donc dans le triangle ZAA'', deux angles A & A'', & le côté compris AA''. Donc par le 4e Cas, on aura l'un des côtés ZA ou ZA''; & enfin dans le triangle ZAP ou ZA''P, ayant deux côtés ZA & AP, & l'angle compris ZAP, on trouvera l'angle horaire ZPA, l'azimuth ou son supplément PZA, & le complément ZP de la latitude.

Exemple, en ne prenant que trois Etoiles (fig. 40.)

Les trois Etoiles sont *Procyon*, *Sirius* & *Rigel*. Leurs ascensions droites & leurs distances au Pole Nord, sont

Ascensions

	Ascensions droites.	Dist. au Pole Nord.
De *Procyon* A	111° 44′	84° 11′ = PA
De *Sirius* A′	98 41	106 24 = PA′
De *Rigel* A″	75 48	98 29 = PA″

Procyon A & *Sirius* A′ passent en même tems par le même vertical ZAA′, & *Rigel* A″ se trouve alors dans un autre vertical ZA″a′; mais *Sirius* A′ ne vient à ce second vertical en *a*′ que 2ʰ 24′ 54″ ⅓ après cet instant; ensorte que l'angle parcouru A′P*a*′ est 36° 13′ 35″. On demande l'angle horaire ZPA, la latitude, &c.

Triangle APA′

dont on a

APA′ = 13° 3′ differ. des asc. dr. ½ APA′ = 6° 31′ 30″.

PA′ =	106° 24′
PA =	84 11
Somme	190 35
Différence	22 13
½ somme	95 17 30″
½ différence	11 6 30

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.001855
: Au sin. de leur ½ différence		9.284802
:: La cot. de ½ APA′		0.941659
: A la tang. de la ½ differ. des angles 59° 24′ 41″		0.228316
2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	1.035148
: Au cosin. de leur ½ différence		9.991786
:: La cotang. de ½ APA′		0.941659
: A la tang. de la ½ somme *obtuse* des angles	90° 36′ 57″	1.968593
½ différence	59 24 41	
A′AP =	150 1 38	
Supplément PAZ =	29 58 22	
PA′Z =	31 12 16	

Triangle PA"*a'*, *où l'on a deux côtés* PA", P*a'*, & *l'angle* A"P*a'*.

PA" =	98°	29'	0"
P*a'* =	106	24	0
Somme	204	53	0
Différ.	7	55	0
½ somme	102	26	30
½ differ.	3	57	30
A'P*a'* =	36	13	35
—A'PA" =	22	53	0
A"P*a'* =	13	20	35
½ A"PA' =	6	40	17½

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.010311
: Au sinus de leur ½ différence		8.839044
: : La cotang. de ½ A"P*a'*		0.931929
: A la tang. de la ½ differ. des angles	31° 8' 49"	9.781294
2. Le cos. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.666663
: Au cosin. de leur ½ differ.		9.998963
: : La cotang. de ½ A"P*a'*		0.931929
: A la tang. de la ½ somme des angles *obtuse*	91° 26' 49"	1.597555
½ différence	31 8 49	
PA"*a'*	122 35 38	
Son supplément PA"Z =	57 24 22	
P*a'*Z =	60 18 0	

Triangle isoscèle A'P*a'* *partagé en deux rectangles égaux.*

½ A'P*a'* = 18° 6' 47" ½, &. par le 2^d Cas des rectangles.

1. Le rayon : au sinus de PA'	106° 24'	9.981961
: : Le sinus de ½ A'P*a'*	18 6 47" ½	9.492614
: Au cos. de ½ A'*a'* *aigu*	17 21 8	9.474575

2. Le rayon : au cos. de P*a*'	106° 24′ 0″	9.450775
: : La tangente de ½ A'P*a*'	18 6 47 ½	9.514688
: A la cotang. de P*a*'A',	84 43 24	8.965463
— P*a*'Z	60 18 0	
Z*a*'A' =	24 25 24	
PA'*a*'	84 43 24	
+ PA'Z	31 12 16	
ZA'*a*'	115 55 40	

Triangle ZA'*a*' par le 4^e^ Cas.

ZA'*a*' =	115° 55′ 40″
Z*a*'A' =	24 25 24
Somme =	140 21 4
Différence	91 30 16
½ somme	70 10 32
½ différence	45 45 8
½ A'*a*' =	17 21 8

1. Le sin. de la ½ somme des angles	Compl. arit.	0.026533
: Au sinus de leur ½ différence		9.855112
: : La tangente de ½ A'*a*'		9.494802
: A la tang. de la ½ differ. des côtés	13° 23′ 0″	9.376447
2. Le cos. de la ½ somme des angles	Compl. arit.	0.469622
: Au cos. de leur ½ différence		9.843708
: : La tangente de ½ A'*a*'		9.494802
: A la tang. de la ½ somme des côtés	32″ 44′ 10″	9.808132
½ différence	13 23 0	
Z*a*' =	46 7 10	
ZA' =	19 21 10	

Triangle Z*a*'P

P*a*' =	106° 24′ 0″
Z*a*' =	46 7 10
Somme	152 31 10
Différence	60 16 50
½ somme	76 15 35
½ différence	30 8 25

Za'P =	60 18 0		
½ Za'P =	30 9 0		
1. Le ſinus de la ½ ſomme des côtés		Comp. arit.	0.012616
: Au ſinus de leur ½ différence			9.700806
: : La cotang. de ½ Za'P			0.235939
: A la tang. de la ½ differ. des angles	41° 40′ 0″		9.949355
2. Le coſ. de la ½ ſomme des côtés		Compl. arit.	0.614298
: Au coſinus de leur ½ difference			9.936915
: : La cotang. de ½ Za'P			0.235939
: A la tang. de la ½ ſomme des angles	80° 56′ 9″		0.787152
½ différence	41 40 0		
Le plus grand angle PZa'	122 36 9		
Le moindre ZPa'	39 16 9		
3. Le rayon : au coſinus de Za'P	60° 18' 0″		9.695007
: : La tangente de Za'	46 7 10		0.016975
: A la tangente de M *aigu*	27 15 29		9.711982
Pa' =	106 24 0		
Différence N =	79 8 31		
4. Le coſinus de M	27° 15′ 29″	Comp. arit.	0.051121
: Au coſinus de N	79 8 31		9.275027
: : Le coſinus de Za'	46 7 10		9.840832
: Au ſinus de la latitude	8 26 47		9.166980

REMARQUE.

L'Auteur de l'*Eſſai d'horolepſe Nautique* dit avec raiſon que ce Probléme eſt une extenſion du 30ᵉ de l'*Aſtronomie Nautique*, où l'on ne ſuppoſe que trois Aſtres, & qu'il n'exige pas un autre calcul. Enſuite il le réſout algébriquement, comme l'a fait Mʳ. de Maupertuis, & il avoue que ſa formule demande une grande attention aux circonſtances des obſervations, pour donner des ſignes convenables à chacun des neuf termes dont elle eſt compoſée. J'ai ſuppoſé, dit-il, que ces quatre Aſtres étoient non-ſeulement au-deſſus de l'équateur, mais auſſi au-deſſus du cercle de ſix heures, que le ſinus *t* étoit ou-

tre cela plus grand que t' & θ plus grand que θ''; & enfin que le sinus p appartenoit à un angle aigu : & après tout cela, il reste encore lieu à trois différences de circonstances (dont la premiere est la seule à laquelle on ait eu égard dans l'Astronomie Nautique). Il n'est pas particulier à la Trigonométrie, ajoute-t-il, de donner *des régles dont l'origine peut n'être guères présente à l'esprit d'une partie de ceux qui s'ingérent de les pratiquer, & dont l'application est souvent ambiguë pour certains génies.* Heureux le genre humain, s'il y avoit des arts dont les préceptes pussent être *contenus dans quelques lignes*, & ne laissassent lieu à aucune méprise dans l'application.

Ces réflexions ont trait à la Préface de l'Astronomie nautique.

On pourroit, dit-il encore, ne supposer que trois Astres, comme l'a fait Mr. de Maupertuis, mais en prenant quatre Etoiles, les deux passages de ces deux paires à deux verticaux peuvent se rencontrer au même instant, ou à des instans si voisins, que le déplacement du Vaisseau dans leur intervalle soit de très-petite conséquence.

Ce Probléme, selon Mr. de Maupertuis, peut être d'une grande utilité sur Terre & sur Mer, parce qu'il n'y a point d'observation plus facile ni plus sûre, que celle du passage des Astres par un vertical, & qu'on évite ici entièrement l'effet de la réfraction, qui apporte tant de troubles aux autres observations.

Les Marins ne seront pas sans doute de l'avis de Mr. de Maupertuis sur cette prétendue facilité. Il leur est très-difficile d'observer le passage de deux Astres par un vertical, & encore plus d'attendre que l'un des deux passe par le vertical où l'on a vu passer le troisième. Le Probléme suivant leur sera beaucoup plus utile.

PROBLEME XLII.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre Etoiles, A, A′, A″, A‴, & le tems écoulé entre le moment où les deux premières se trouvent dans le même Almicantarath, & celui où les deux autres se trouvent dans un autre même Almicantarath, trouver l'heure de l'une des observations, l'Azimuth, la hauteur des Etoiles & la latitude?

Fig. 41. ON aura d'abord (fig. 41) les deux triangles APA′, A″PA‴, dont on connoit les côtés autour de l'angle P connu. Soient I & I' les poles des deux grands cercles AA', A"A"'. Ce que nous dirons du premier doit s'entendre du second.

L'angle PA'I est complément de l'angle connu AA'P. On a donc dans le triangle PA'I, un angle A', & les côtés A'P & IA' de 90°. Donc on aura la base PI, & les angles IPA', PIA'; & ajoutant à celui-ci, A'IN mesuré par la moitié A'N de A'A, on aura PIN. On trouvera par un calcul semblable, PI', & les angles PI'A"' & I'PA"'; & retranchant de I'PA"', l'angle connu par observation A'PA"', on aura I'PA', qu'il faut retrancher de IPA', pour avoir IPI'; ayant cet angle avec les deux côtés IP, I'P, on aura tout le triangle IPI'. Retranchant de PII', l'angle trouvé PIZ, & ajoutant à PI'I l'autre angle trouvé PI'Z, on aura deux angles & le côté compris dans le triangle ZII'. Donc on aura les deux autres côtés IZ, I'Z, & leurs complémens ZN, ZN'.

Dans le triangle rectangle ZNA', ayant deux côtés ZN, NA', on trouvera l'hypothénuse ZA, & l'angle ZA'N; & par conséquent ZA'P, en retranchant ZA'N de NA'P.

Enfin dans le triangle ZA'P, on a deux côtés, ZA', PA' & l'angle compris ZA'P. On aura donc la base ZP & les deux angles A'ZP, A'PZ.

Exemple.

Soient { PA = 106° 24′ 8″ PA' = 84° 11′ 0″
l'angle APA' = 58° 56′ 20″.
PA″ = 106° 24′ 0″ PA‴ = 98° 29′ 0″
l'angle A'PA" = 6° 4′ 0″.

& l'angle A"PA"' = 8° 39′ 20″ les diſtances au Zénith ZA, ZA', & ZA", ZA"' étant inconnues, & reſpectivement égales.

Triangle APA'

où l'on a	PA =	106° 24′ 0″
	PA' =	84 11 0
	Somme	190 35 0
	Différence	22 13 0
	½ ſomme	95 17 30
	½ différence	11 6 30
	APA' =	58 56 20
	½ APA' =	29 28 10

1. Le ſinus de la ½ ſomme des côtés	Compl. arit.	0.001855
: Au ſinus de leur ½ différence		9.284802
: : La cotang. de ½ APA'		0.247898
: A la tang. de la ½ differ. des angles	18° 54′ 7″	9.534555
2. Le coſ. de la ½ ſomme des côtés	Compl. arit.	1.035148
: Au coſinus de leur ½ différence		9.991786
: : La cotang. de ½ APA'		0.247898
: A la tang. de la ½ ſom. *obtuſe* des angl.	93° 2′ 24″	1.274832
½ différence	18 54 7	
PA'A =	111 56 31	
PAA' =	74 8 17	
Compl. IA'P =	21 54 7	
3. Le rayon : au coſ. de APA'	58° 56′ 20″	9.712609
: : La tang. de PA'	84 11 0	0.991953
: A la tangente de M *aigu*	78 49 52	0.704562
PA =	106 24 0	
Différence N =	27 34 8	

4. Le cosinus de M	78° 49′ 52″	Comp. ar.	0.712867
: Au cosinus de N	27 34 8		9.947657
: : Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de AA'	62 22 3		9.666329
NA' = NIA' =	31 11 1 ½		

Triangle A''PA'''

où l'on a PA'' = 106° 24′ 0″
PA''' = 98 29 0

Somme 204 53 0
Différence 7 55 0

½ somme 102 26 30
½ differ. 3 57 30

A'' PA''' = 8 39 20
½ A''PA''' = 4 19 40

1. Le sinus de la ½ somme des côtés		Compl. arith.	0.010321
: Au sinus de leur ½ différence			8.839044
: : La cotang. de ½ A''PA'''			1.121031
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43° 2′ 53″		9.970396
2. Le cos. de la ½ somme des côtés		Compl. arit.	0.666663
: Au cosinus de leur ½ différence			9.998963
: : La cotang. de ½ A''PA'''			1.121031
: A la tang. de la ½ som. *obtuse* des angles	90° 56′ 9″		1.786657
½ différence	43 2 53		
PA'''A'' =	133 59 2		
Compl PA'''I =	43 59 2		
PA''A''' =	47 53 16		
3. Le rayon : au cosinus de A''PA'''	8° 39′ 20″		9.995015
: : La tang. de PA''	106 24 0		0.531186
: A la tangente de M *obtus*	106 34 43		0.526211
PA''' =	98 29 0		
Différence N =	8 5 43		
4. Le cosinus de M	106° 34′ 43″	Compl. arith.	0.544651
: Au cosinus de N	8 5 43		9.995651
: : Le cosinus de PA''	106 24 0		9.450775
: Au cosinus de A''A'''	11 34 27		9.991078
N'A'' = N'I'A''' =	5 47 13 ½		

Triangle IPA'

Dont on a IA' = 90° PA' 84° 11' PA'I = 21° 56' 31''. Il faut le transformer en un triangle ſupplémental (fig. 42) dont l'angle P' ſupplément de IA' eſt de 90°, le côté B ſupplément de l'angle A', eſt de 158° 3' 29'' & l'angle *p* ſupplément de PA' eſt de 95° 49'. Donc par le 4ᵉ Cas des rectangles. Fig. 42.

1. Le rayon : à la cotang. de B	158° 3' 29''	0.394858
: : Le coſinus de *p*	95 49	9.005805
: A la cotang. de H, ſupplément de IPA',	104 7 16	9.400663

H eſt aigu, parce que B eſt comme *p* ; donc IPA' ſon ſupplément eſt obtus. *b* eſt obtus comme *p*, & ſon ſupplément PI aigu.

P'' eſt obtus, & ſon ſupplément I aigu.

2. Le rayon : au coſinus de B	158° 3' 29''	9.967336
: : Le ſinus de *p*	95 49	9.997758
: Au coſinus de *b*, ſupplément de PI =	22 39 55	9.965094

3. Le rayon : au ſinus de B	158° 3 29''	9.572484
: : La tang. de *p*	95 49	0.991953
: A la tang. de P'' ſupplément de PIA'' =	74 45 1	0.564437
+ A'IN =	31 11 1 ½	
PIZ =	105 56 2 ½	

On réſoudra de même le triangle PA'''I', dont on a I'A''' = 90° PA''' = 98° 29' 0'' PA'''I' = 43° 59' 2'' ; & l'on aura PI' = 44° 37' 53''. Fig. 41.

PI'A''' =	102° 7' 20''
+ A'''IN =	5 47 13 ½
PI'Z =	107 54 33 ½

I'PA''' =	81° 18′ 35″
− A'PA''' =	14 43 20
I'PA' =	66 35 15
IPA' =	104 8 55
IPI' =	37 33 40
A'PA'' =	6° 4′ 0″
+ A''PA''' =	8 39 20
A'PA''' =	14 43 20

Triangle IPI'

où l'on a

PI' =	44° 37′ 53″
PI =	22 39 55
Somme	67 17 48
Différence	21 57 58
$\frac{1}{2}$ ſomme	33 38 54
$\frac{1}{2}$ differ.	10 58 59
IPI' =	37 33 40
$\frac{1}{2}$ IPI' =	18 46 50

1. Le ſinus de la $\frac{1}{2}$ ſomme des côtés	Compl. arit.	0.256417
: Au ſinus de leur $\frac{1}{2}$ différence		9.279937
:: La cotang. de $\frac{1}{2}$ IPI'		0.468458
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ differ. des angles	45° 19′ 5″	0.004812
2. Le coſinus de la $\frac{1}{2}$ ſomme des côtés	Compl. arit.	0.079640
: Au coſinus de leur $\frac{1}{2}$ différence		9.991971
:: La cotangente de $\frac{1}{2}$ IPI'		0.468458
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ ſomme des angles	73° 54′ 53″	0.540069
$\frac{1}{2}$ différence	45 19 5	

PII' =	119 13 58
− PIZ =	105 56 2 $\frac{1}{2}$
I'IZ =	13 17 55 $\frac{1}{2}$
PI'I =	28 35 48
+ PI'Z =	107 54 33 $\frac{1}{2}$
II'Z =	136 30 21 $\frac{1}{2}$

3. Le rayon : au cosinus de IPI'	37° 33' 40"		9.899111
: : La tangente de PI	22 39 55		9.620757
: A la tang. de M	18 18 58		9.519868
PI'	44 37 53		
Différence N =	26 18 55		
4. Le cosinus de M.	18° 18' 18"	Compl. arit.	0.022581
: Au cosinus de N	26 18 55		9.952486
: : Le cosinus de PI	22 39 55		9.965094
: Au cosinus de II'	29 23 30		9.940161

Triangle ZII'

où l'on a

II'Z =	136° 30' 21" ½
I'IZ =	13 17 55 ½
Somme	149 48 17
Differ.	123 12 26
½ somme	74 54 8 ½
½ differ.	61 36 13
II' =	29 23 30
½ II' =	14 41 45

1. Le sin. de la ½ somme des angles	Compl. arit.	0.015256
: Au sinus de leur ½ différence		9.944324
: : La tangente de ½ II'		9.418744
: A la tangente de la ½ differ. des côtés	13° 8' 39"	9.368324
2. Le cosinus de la ½ somme des angles	Compl. arit.	0.584247
: Au cosinus de leur ½ différence		9.677213
: : La tangente de ½ II'		9.418744
: A la tang. de la ½ somme des côtés	25° 35' 15"	9.680204
½ differ.	13 8 39	
Le plus grand côté IZ =	38 43 54	
Le plus petit I'Z =	11 26 36	
ZN complément. de IZ =	51 16 6	
ZN' complément de I'Z =	78 33 24	

Triangle ZNA' rectangle en N,

Où nous avons ZN = 51° 16' 6". NA' = 31° 11'

1″ ½. Donc nous aurons l'hypothénuse ZA', par le 5ᵉ Cas des rectangles, & l'angle ZA'N.

1. Le rayon : au cosinus de ZN	51° 16′ 6″	9.796348
: : Le cosinus de NA'	31 11 1 ½	9.932226
: Au cosinus de ZA'	57 22 30	9.728574

2. Le rayon : au sinus de NA'	31° 11′ 1″ ½	9.714149
: : La cotang. de ZN	51 16 6	9.904206
: A la cotangente de ZA'N	67 26 50	9.618355
NA'P =	111 56 31	
ZA'P =	44 29 41	

[*Triangle* ZA'P, où l'on a deux côtés & l'angle compris.

PA' =	84° 11′ 0″
ZA' =	57 22 30
Somme	141 33 30
Différence	26 48 30
½ somme	70 46 45
½ différence	13 24 15
½ ZA'P =	22 14 50 ½

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.024910
: Au sinus de leur ½ différence		9.365148
: : La cotangente de ½ ZA'P		0.388216
: A la tang. de la ½ differ. des angles	30° 58′ 15″	9.778274

2. Le cos. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.482527
: Au cosinus de leur ½ différence		9.988005
: : La cotangente de ½ ZA'P		0.388216
: A la tang. de la ½ somme des angles	82° 7′ 6″	0.858748
½ différence	30 58 15	
PZA' =	113 5 21	supplém. de l'azimuth.
ZPA' =	51 8 51	angle horaire.

3. Le rayon : au cosin. de ZA'P,	44° 29′ 41″	9.853281
: : La tangente de PA'	84 11 0	0.991953
: A la tang. de M	81 52 21	0.845234
ZA' =	57 22 30	
Différence N =	24 29 51	

4. Le cosinus de M	81° 52′ 21″	Comp. arit.	0.849623
: Au cosinus de N	24 29 51		9.959031
:: Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de PZ, ou sin. de la lat.	40 43 4		9.814469

Trois Etoiles suffisent, comme dans le Probléme précédent, & pour abréger le calcul, il faut faire passer les trois étoiles par le même Almicantarath & observer la différence des tems. Après quoi on aura recours au Probléme XXIX. pour trouver l'heure & la latitude. Dans ce Probléme on n'est nullement exposé aux erreurs de la réfraction. Si le calcul paroit long par la Trigonométrie, la solution algébrique est bien plus rebutante. Deux Astres suffisent, si on les observe avant & après leur passage par le Méridien.

PROBLEME XLIII.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre Etoiles, & le tems écoulé entre les momens où deux se trouvent dans un même vertical & deux autres dans un même Almicantarath, trouver l'heure, l'angle Azimuthal, la latitude & la hauteur des Etoiles ?

On trouvera par les méthodes précédentes, les triangles APA', PIA' (fig. 43) & l'on aura les angles PIZ, IPA', PIA'. Le triangle A''PA''' donnera l'angle A''' ; & le triangle IPA''', dont on connoit IP, PA''' avec l'angle IPA''' composé de IPA' & de A'PA''', donne IA'''P, & par conséquent IA''Z & IA'''. Ayant donc IA''', ZIA'', & IA'''Z, on aura ZA''' & IZ, complément de ZN. Enfin dans le triangle ZA''P, ayant deux côtés & l'angle compris, on aura le reste. Fig. 43.

L'Auteur de l'*Horolepse Nautique* a résolu ce Probléme par une équation très-compliquée. Il dit que trois Astres peuvent suffire absolument, parce que celui qne l'on observe dans un même vertical avec un second, peut se ren-

1″ ½. Donc nous aurons l'hypothénuse ZA', par le 5ᵉ Cas des rectangles, & l'angle ZA'N.

1. Le rayon : au cosinus de ZN	51° 16′ 6″	9.796348
: : Le cosinus de NA'	31 11 1 ½	9.932226
: Au cosinus de ZA'	57 22 30	9.728574
2. Le rayon : au sinus de NA'	31° 11′ 1″ ½	9.714149
: : La cotang. de ZN	51 16 6	9.904206
: A la cotangente de ZA'N	67 26 50	9.618355
NA'P =	111 56 31	
ZA'P =	44 29 41	

[*Triangle* ZA'P, où l'on a deux côtés & l'angle compris.

PA' =	84° 11′ 0″
ZA' =	57 22 30
Somme	141 33 30
Différence	26 48 30
½ somme	70 46 45
½ différence	13 24 15
½ ZA'P =	22 14 50 ½

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.024910
: Au sinus de leur ½ différence		9.365148
: : La cotangente de ½ ZA'P		0.388216
: A la tang. de la ½ differ. des angles	30° 58′ 15″	9.778274
2. Le cos. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.482527
: Au cosinus de leur ½ différence		9.988005
: : La cotangente de ½ ZA'P		0.388216
: A la tang. de la ½ somme des angles	82° 7′ 6″	0.858748
½ différence	30 58 15	
PZA' =	113 5 21 suppléм. de l'azimuth.	
ZPA' =	51 8 51 angle horaire.	

3. Le rayon : au cosin. de ZA'P,	44° 29′ 41″	9.853281
: : La tangente de PA'	84 11 0	0.991953
: A la tang. de M	81 52 21	0.845234
ZA' =	57 22 30	
Différence N =	24 29 51	

4. Le cosinus de M	81° 52′ 21″	Comp. arit.	0.849623
: Au cosinus de N	24 29 51		9.959031
:: Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de PZ, ou sin. de la lat.	40 43 4		9.814469

Trois Etoiles suffisent, comme dans le Probléme précédent, & pour abréger le calcul, il faut faire passer les trois étoiles par le même Almicantarath & observer la différence des tems. Après quoi on aura recours au Probléme XXIX. pour trouver l'heure & la latitude. Dans ce Probléme on n'est nullement exposé aux erreurs de la réfraction. Si le calcul paroit long par la Trigonométrie, la solution algébrique est bien plus rebutante. Deux Astres suffisent, si on les observe avant & après leur passage par le Méridien.

PROBLEME XLIII.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre Etoiles, & le tems écoulé entre les momens où deux se trouvent dans un même vertical & deux autres dans un même Almicantarath, trouver l'heure, l'angle Azimuthal, la latitude & la hauteur des Etoiles ?

ON trouvera par les méthodes précédentes, les triangles APA', PIA' (fig. 43) & l'on aura les angles PIZ, IPA', PIA'. Le triangle A''PA''' donnera l'angle A'''; & le triangle IPA''', dont on connoit IP, PA''' avec l'angle IPA''' composé de IPA' & de A'PA''', donne IA'''P, & par conséquent IA'''Z & IA'''. Ayant donc IA''', ZIA''', & IA'''Z, on aura ZA''' & IZ, complément de ZN. Enfin dans le triangle ZA'''P, ayant deux côtés & l'angle compris, on aura le reste. Fig. 43.

L'Auteur de l'*Horolepse Nautique* a résolu ce Probléme par une équation très-compliquée. Il dit que trois Astres peuvent suffire absolument, parce que celui qne l'on observe dans un même vertical avec un second, peut se ren-

contrer dans un même Almicantarath avec un troisième au même instant, ou dans un tems peu éloigné. Il auroit du dire que deux suffisent, en les observant d'abord dans le même vertical, & ensuite le second dans le même Almicantarath où étoit le premier dans la 1ère observation, & ayant égard à la différence des tems, comme on le voit dans cet exemple.

Exemple.

Fig. 44. Soient (fig. 44) A & A' deux Etoiles dont la différence en ascension droite $= 8^\circ 39' 20''$, la distance de la première au Pole $= 106^\circ 24'$; celle de la 2e $= 84^\circ 11'$. Qu'elles soient d'abord l'une & l'autre en même tems dans le même vertical AA"Z, tandisque la 1e A est dans l'Almicantarath AA'; que la 2e A' ne parvienne au même Almicantarath que 2^h après, qui valent 30°. On demande la latitude, &c.

On a $PA = 106^\circ 24'$ $PA' = PA'' = 84^\circ 11'$; l'angle APA", différence des ascensions droites $= 8^\circ 39' 20''$; APA', tems écoulé entre les deux observations $= 30^\circ$.

On résoudra d'abord les triangles APA', APA", comme dans le Probl. précédent.

1. Le sin. de la ½ somme des côtés AP, A'P	95°	17'	30" C. ar.	0.001855
: Au sinus de leur ½ différence	11	6	30	9.284801
: : La cotangente de ½ APA'	15	0	0	0.571947
: A la tang. de la ½ différence des angles	35	50	1	9.858604

2. Le cosinus de la ½ somme	95°	17'	30"	Comp. arit. 1.035148
: Au cosinus de la ½ différence	11	6	30	9.991786
: : La cotangente de ½ APA'	15	0	0	0.571947
: A la tang. de la ½ somme des angles	88	33	26	1.598881
½ différence	35	50	1	

PA'A $=$ 124 23 27 comp. $34^\circ 23' 27''$ = PA'I
PAA' $=$ 52 43 25 37 16 35 = PAI

3. Le rayon : au cosinus de APA'	30° 0' 0"		9.937531
: : La tangente de PA'	84 11 0		0.991953
: A la tangente de M *aigu*	83 17 28		0.929484
PA =	106 24 0		
Différence N =	23 6 32.		

4. Le cosinus de M	83° 17' 28"	Compl. arit.	0.932464
: Au cosinus de N	23 6 32		9.963676
: : Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de AA'	37 4 14		9.901945
NIA' = NIA =	18 32 7 = ½ AA' = ZIA.		

Triangle PAA",

Dont on a PA = 106° 24'. PA" = 84° 11' & APA" = 8° 39' 20".
On trouvera, par le 3^e Cas des obliquangles, PAA" ou PAZ = 20 57 14
PAI = 37 16 35
Donc ZAI = 16 19 21

Triangle ZAI,

Où l'on a ZAI = 16° 19' 21", ZIA = 18° 32' 7" & IA = 90°. Donc par le 5^e Cas des rectangles.

Le rayon : au sinus de ZAP	16° 19' 21"	9.448773
: : La cotang. de ZIA	18 32 7	0.474592
: A la cotang. de ZA, ou tang. de la haut.	39 58 18	9.923365

Triangle AZP,

Où l'on a ZA = 50° 1' 42". PA = 106° 24' 0". ZAP = 20° 57' 14".

1. Le rayon : au cosinus de ZAP,	20° 57' 14"	9.970286
: : La tangente de PA	106 24 0	0.531186
: A la tang. de M *obtus*	107 29 33	0.501472
ZA =	50 1 42	
Differ. N =	57 27 51	

2. Le cosinus de M	72° 30′ 27″	Comp. arit.	0.522039
: Au cosinus de N	57 27 51		9.730643
:: Le cosinus de PA	106 24 0		9.450775
:: Au sinus de la latitude	30 20 39		9.703457

3. Le sin. de la ½ somme des côtés ZA, PA	Comp. arit.	0.009254
: Au sinus de leur ½ différence		9.674248
:: La cotangente de ½ ZAP		0.733009
: A la tang. de la ½ differ. des angles 69° 1′ 49″		0.416511

4. Le cosinus de la ½ somme des côtés		Compl. arit.	0.689719
: Au cosinus de leur ½ différence			9.945183
:: La cotangente de ½ ZAP			0.733009
: A la tangente de la ½ somme des angles	87° 32′ 44″		1.367911
½ Différence	69 1 49		
AZP =	156 34 33	suppl. de l'azimuth.	
Angle horaire APZ =	18 30 55		

PROBLEME XLIV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, A, A', A" (fig. 45) *& le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical & celui où l'on a observé la hauteur du troisième, trouver la hauteur du Pole, & les angles* Z *&* P ?

Fig. 45.

DAns le triangle APA' les déclinaisons & la différence APA' des ascensions droites donnent les angles A & A'; Dans le triangle A'PA", si l'on ajoute à la différence des ascensions droites *a*'PA" des étoiles A' & A", l'intervalle du tems A'P*a*', on aura l'angle A'PA"; & par conséquent ayant les deux côtés A'P, A"P, on aura la base A'A", & l'angle PA'A", qu'on ajoutera à PA'Z, pour avoir l'angle ZA'A"; & ayant cet angle & deux côtés, A'A" & ZA" du triangle ZA'A", on aura le 3e côté ZA' & les angles. Enfin dans ZA'P on a deux côtés, ZA', PA' & l'angle compris A'. On aura donc le reste.

Exemple.

Exemple.

Soient A' *Sirius*, & A *Procyon* dans le même vertical ZAA'. Quatre minutes après on a observé la hauteur de *Rigel* A'' de 23° 41' 50''. Ainsi on a PA = 84° 11'. PA' = 106° 24'. PA'' = 98° 29' & par les différences des ascensions droites, APA' = 13° 3'. *a*'PA'' = 22° 53'; à quoi ajoutant la différence des tems A'P*a*' = 1°, on a l'angle A'PA'' = 23° 53'. ZA'' = 66° 18' 10''. On demande la latitude &c.

Le triangle APA', comme dans le Probl. XLI. donne A'AP = 150° 1' 38''. PA'Z = 31° 12' 16''.

Dans le triangle A'PA'', nous avons par le 3e Cas.

PA' =	106° 24'
PA'' =	98 29
Somme	204 53
Différence	7 55
½ somme	102 26 30''
½ différence	3 57 30
A'PA'' =	23 53
½ A'PA'' =	11 56 30''

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Comp. ar.	0.010321
: Au sin. de leur ½ différence		8.839044
: : La cotang. de ½ A'PA''		0.674705
: A la tang. de la ½ differ. des angles	18° 28' 56''	9.524070

2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	Comp. arith.	0.666663
: Au cosin. de leur ½ différence		9.998963
: : La cotang. de ½ A'PA''		0.674705
: A la tang. de la ½ somme des angles *obtus*	92° 36' 55''	1.340331

½ somme des angles	92° 36' 55''
½ différence	18 28 56
PA''A' =	111 5 51
PA'A'' =	74 7 59
+ PA'Z =	31 12 16
ZA'A'' =	105 20 15

O

3. Le rayon : au cos. de A'PA"	23° 53' 0"		9.961123
: : La tangente de PA'	106 24 0		0.531186
: A la tang. de M *obtus*	107 50 32		0.492309
PA" =	98 29 0		
Differ. N =	9 21 32		

4. Le cosinus de M	107° 50' 32"	Comp. arith.	0.513716
: Au cosinus de N	9 21 32		9.994180
: : Le cosinus de PA'	106 24 0		9.450775
: Au cosinus de A'A"	24 36 6		9.958671

Triangle ZA'A",

Dont on a deux côtés, ZA" = 66° 18' 10". A'A" = 24° 36' 6" & l'angle opposé ZA'A" = 105° 20' 15".

1. Le rayon : au cosin. de A'A"	24° 36' 6"		9.958671
: : La tang. de ZA'A"	105 20 15		0.561817
: A la cotang. de *m obtus*,	163 12 50		0.520488

2. La tang. de ZA"	66° 18' 10"	Comp. arith.	9.642377
: A la tang. de A'A"	24 36 6		9.660743
: : Le cosin. de *m*	163 12 50		9.981089
: Au cosinus de *n*, *obtus*	101 5 35		9.284209
m — *n* = ZA"A' =	62 7 15		
PA"A' =	111 5 51		
ZA"P =	48 58 36		

Triangle ZA"P,

Dont on a ZA" = 66° 18' 10". PA" = 98° 29'. ZA"P = 48° 58' 36".

1. Le rayon : au cosin. de ZA"P	48° 58' 36"		9.817127
: : La tang. de ZA"	66 18 10		0.357623
: A la tang. de M *aigu*	56 13 42		0.174750
PA" =	98 29 0		
Différence N =	42 15 18		

2. Le cosinus de M	56° 13′ 42″	Comp. ar.	0.255004
: Au cosinus de N	42 15 18		9.869325
: : Le cosinus de ZA″	66 18 10		9.604122
: Au sinus de la latitude	32 21 8		9.728451

PROBLEME XLV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même Almicantarath inconnu, & celui où l'on a observé la hauteur du troisième, trouver les angles P & Z *& la hauteur du Pole ?*

ON aura (fig. 46) comme dans les Problémes précédens, tout le triangle PAA', & ensuite PIA' & A'PA". Par ce moyen on aura dans les triangles A'IA" & ZIA", deux côtés & l'angle compris. Donc on trouvera les angles ZA"I & ZA"P ; & dans ce dernier triangle, ayant l'angle ZA"P & les côtés ZA", A"P, on aura le reste. Fig. 46.

Exemple.

Soient les distances des trois Etoiles au pole, PA = 106° 24′, PA' = 84° 11′, PA" = 98° 29′. Les angles APA' = 58° 56′ 20″, A'PA" = 14° 43′ 20″. Le complément de la hauteur de la 3ᵉ Etoile ZA" = 86° 16′. On demande la latitude & les angles P & Z.

1°. Le triangle APA' donnera, comme dans le Probl. XLII, PAA' = 74° 10′ 42″. PA'A = 111° 54′ 6″ & son complément IA'P = 21° 54′ 6″. AA' = 62° 22′ 3″.

2°. Le triangle IPA' donnera les angles IPA' = 104° 8′ 55″. PIA' = 74° 43′ 30″. PIZ = 105° 54′ 31″ $\frac{1}{2}$ & le côté PI = 22° 37′ 27″.

3°. Dans le triangle A'PA" on connoit l'angle A'PA" = 14° 43′ 20″ & deux côtés.

PA' =	84°	11'	0"
PA" =	98	29	0
Somme	182	40	0
Differ.	14	18	0
½ somme	91	20	0
½ differ.	7	9	0
½ A'PA" =	7	21	40

1. Le sin. de la ½ somme des côtés		Compl. arit.	0.000118
: Au sin. de leur ½ différence			9.095056
:: La cotangente de ½ A'PA"			0.888780
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43° 56' 30"		9.983954

2. Le cosin. de la ½ somme des côtés		Comp. arith.	1.633223
: Au cosinus de leur ½ différence			9.996610
:: La cotang. de ½ A'PA"			0.888780
: A la tang. de la ½ somme des angles *obtus*,		90° 10' 25"	2.518613
	½ différence	43 56 30	
	PA"A' =	46 13 55	
	PA'A" =	134 6 55	
	PA'I =	21 54 6	
	IA'A" =	156 1 1	

3. Le rayon : au cosin. de A'PA"	14° 43' 20"		9.985502
:: La tang. de PA'	84 11 0		0.991953
: A la tang. de l'arc M aigu	83 59 14		0.977455
PA" =	98 29 0		
Différence N =	14 29 46		

4. Le cosinus de M	83° 59' 14"	Comp. arit.	0.979845
: Au cosinus de N	14 29 46		9.985949
:: Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de A'A"	20 29 45		9.971599

4°. Triangle A"IA', où l'on a IA' = 90°. A'A" = 20° 29' 45" & IA'A" = 156° 1' 1". Donc par le 3e Cas des rectangles,

1. Le rayon : à la cotang. de IA'A"	156° 1' 1"	0.351762
:: Le cosinus de A'A"	20 29 45	9.971599
: A la cotang. de IA"A' *aigu*	25 24 18	0.323361

2. Le rayon : au cosin. de IA'A"	156° 1' 1"	9.960787
: : Le sinus de A'A"	20 29 45	9.544241
: Au cosinus de IA" *obtus*	108 39 27	9.505028

3. Le rayon : au sinus de IA'A"	156° 1' 1"	9.609024
: : La tangente de A'A"	20 29 45	9.572641
: A la tangente de A'IA" *aigu*	8 38 22	9.181665

PIA' =	74° 43' 30"
PIZ =	105 54 31 ½
A'IZ =	31 11 1 ½
A'IA" =	8 38 22
ZIA" =	39 49 23 ½

5°. Triangle ZIA", où l'on a IA" = 108° 39' 27". ZA" = 86° 16' & ZIA" = 39° 49' 23" ½. Donc par le 5^e^ Cas.

1. Le rayon : au cosin. de IA"	108° 39' 27"	9.505028
: : La tang. de ZIA"	39 49 23 ½	9.921090
: A la cotangente de *m obtus*	104 56 11	9.426118

2. La tangente de ZA"	86° 11' 0"	Comp. arit.	8.814589
: A la tangente de IA"	108 39 27		0.471527
: : le cosinus de *m*	104 56 11		9.411192
: Au cosinus de *n aigu*	60 7 34		8.697308
ZA"I = *m* ± *n* =	44 48 37		

PA"A' =	46° 13' 55"
— IA"A' =	25 24 18
PA"I =	20 49 37
+ ZA"I =	44 48 37
PA"Z =	65 38 14

6°. Triangle PA"Z, où l'on a PA" = 98° 29'. ZA" = 86° 16', & PA"Z = 65° 38' 14".

1. Le rayon ; au cosin. de PA"Z	65° 38' 14"	9.615437
: : La tangente de ZA"	86 16 0	1.185411
: A la tangente de M *aigu*	81 0 41	0.800848
PA" =	98 29 0	
Différence N =	17 28 19	

2. Le cosinus de M	81° 0′ 41″	Comp. arit.	0.806213
: Au cosinus de N	17 28 19		9.979486
: : Le cosinus de ZA″	86 16 0		8.813667
: Au sinus de la latitude	23 25 25		9.599366

PROBLEME XLVI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & l'angle compris entre le vertical où les deux premiers se trouvent en même tems & le vertical où se trouve le troisième, trouver l'heure & la latitude ?

Exemple.

Fig. 47. On a vu *Rigel* & *Aldebaran* dans le même vertical ZAA′ (fig. 47) & en même tems *Sirius* dans un vertical ZA″, qui forme avec ZAA′ un angle de 50°. On demande la latitude.

Triangle APA′

A, *Aldebaran*, PA =	73° 59′ 30″	Son ascens. droite	65° 33′ 0″
A′, *Rigel*, PA′ =	98 29 0	Ascens. droite	75 48 0
Somme	172 28 30	Différence APA′	10 15 0
Différence	24 29 30	½ APA′ =	5 7 30
½ somme	86 14 15		
½ différence	12 14 45		

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	86° 14′ 15″	Comp. ar.	0.000937
: Au sinus de leur ½ différence	12 14 45		9.326554
: : La cotang. de ½ APA′	5 7 30		1.047268
: A la tang. de la ½ differ. des angles	67 7 25		0.374759
2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	86° 14′ 15″	Comp. ar.	1.182958
: Au cosin. de leur ½ différence	12 14 45		9.990004
: : La cotang. de ½ APA′	5 7 30		1.047268
: A la tang. de la ½ somme des angles	89 39 18		2.220230
½ différence	67 7 25		
Le plus grand angle PAA′ =	156 46 43		
Le moindre PA′A =	22 31 53 = PA′Z.		

Triangle A"PA'

A", *Sirius*, PA" = 106° 24′ 0″ Son asc. droite 98° 41′ 0″
A', *Rigel*, PA' = 98 29 0 Ascens. droite 75 48 0

Somme 204 53 0 Différence 22 53 0 = A"PA'
Differ. 7 55 0 $\frac{1}{2}$ A"PA' 11 26 30

$\frac{1}{2}$ somme 102 26 30
$\frac{1}{2}$ differ. 3 57 30

1. Le sinus de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés 102° 26′ 30″ Com. ar. 0.010321
: Au sinus de leur $\frac{1}{2}$ différence 3 57 30 8.839044
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ A"PA' 11 26 30 0.693806

: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ differ. des angles 19 15 11 9.543171

2. Le cos. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés 102° 26′ 30″ Comp. ar. 0.666663
: Au cosin. de leur $\frac{1}{2}$ différence 3 57 30 9.998963
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ A"PA' 11 26 30 0.693806

: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ somme *obtuse* des ang. 92 30 10 1.359432
$\frac{1}{2}$ différence 19 15 11

Le plus grand PA'A" = 111 45 21
— PA'Z = 22 31 53

ZA'A" = 89 13 28

3. Le rayon : au cosin. de A"PA' 22° 53′ 9.964400
: : La tang. de PA' 98 29 0.826366

: A la tang. de M *obtus* 99 11 46″ 0.790766
PA" = 106 24 0

Différence N = 7 12 14

4. Le cosinus de M 99° 11′ 46″ Compl. ar. 0.796385
: Au cosinus de PA' 98 29 0 9.168856
: : Le cosinus de N 7 12 14 9.996558

: Au cosinus de A'A" 23 40 51 9.961799

Triangle A"ZA'

Où l'on a A"ZA' = 50°. ZA'A" = 89° 13′ 28″. A'A" = 23° 40′ 51″.

1. Le rayon : au cosin. de ZA'A" 89° 13′ 28″ 8.131477
: : La tangente de A'A" 23 40 51 9.642039

: A la tangente de M *aigu* 0 20 24 7.773516

2. La tangente de A''ZA'	50° 0' 0''	Comp. ar.	9.923813
: A la tangente de ZA'A''	89 13 28		1.868484
: : Le sinus de M	0 20 24		7.773354
: Au sinus de N	21 34 55		9.565651
ZA' = M + N =	21 55 19		

Triangle ZA'P

Où l'on a PA'Z = 22° 31' 53''. ZA' = 21° 55' 19''. PA' = 98° 29'.

1. Le rayon : au cosin. de PA'Z	22° 31' 53''		9.965517
: : La tangente de PA'	98 29 0		0.826366
: A la tangente de M *obtus*	99 10 22		0.791883
ZA' =	21 55 19		
Différence N =	77 15 3		
2. Le cosinus de M	99° 10' 22''	Comp. ar.	0.797479
Au cosinus de N	77 15 3		9.343769
: : Le cosinus de PA'	98 29 0		9.168856
: Au sinus de la latitude	11 47 3		9.310104

PROBLEME XLVII.

Les passages de deux Etoiles par le Méridien, par deux verticaux & par deux Almicantaraths inconnus, mais constants, étant donnés ; trouver la déclinaison de ces Etoiles & la hauteur du Pole ?

C'Est le 40e & dernier Probléme de l'Astronomie Naut. Mr. de Maupertuis en fait un très-grand cas. Il en attribue avec raison la solution à Mr. Mayer ; mais il prétend que ce sçavant l'a plutôt indiquée que donnée, & il en substitue une autre déduite de ses formules, qu'il avoue être très compliquée. Voici celle de Mr. Mayer.

Elle se réduit à trois propositions, que nous allons rapporter & dont on peut voir la démonstration dans le 5e Volume, des Mémoires de Petersbourg pag. 30, 32 & 35.

Soient (fig. 48) p & q les deux Etoiles, pl le parallèle de la première, qf celui de la seconde; qu'on les fasse passer successivement l'une & l'autre par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, la première en p & en m, la seconde en q & en n, & par les deux verticaux inconnus ZK, Zl, la première en K & en l, la seconde en g & en f, en observant les distances de chaque Etoile au Méridien dans chacun de ces passages. Fig. 48.

1e. Proposition. La tangente de la déclinaison de l'Etoile q ou g, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile p ou K, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux verticaux inconnus ZgK, Zfl, comme $\frac{\text{sin. ZP}g}{\text{sin. KP}g} - \frac{\text{sin. ZP}f}{\text{sin.}f\text{P}l} : \frac{\text{sin. ZPK}}{\text{sin. KP}g} - \frac{\text{sin. ZP}l}{\text{sin.}f\text{P}l}$.

2e. Proposition. Le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, comme la différence des cosinus de ZPm & ZPp, est à la différence des cosinus de ZPn & ZPq.

3e. Proposition. Ces cosinus ayant un rapport connu, par ex. $:: a : b$, aussi bien que les tangentes $:: m : n$; le sinus de Pq sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{b\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$, & par conséquent le cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, ou sinus de Pp sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{a\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{bb\,nn}{aa\,mm}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$. Ce qu'on peut aisément soumettre au calcul logarithmique, comme on le verra dans l'exemple.

Pour y mettre plus de clarté, nous diviserons le Probléme en trois parties conformément aux trois Propositions de M. Mayer,

I. PARTIE.

Ayant fait paſſer deux Etoiles inconnues par deux verticaux inconnus, & connoiſſant leur diſtance au Méridien dans le tems de leurs paſſages par ces deux verticaux; trouver le rapport des tangentes de leurs déclinaiſons ?

Soient les deux verticaux ZgK, Zfl; la tangente de la déclinaiſon de l'Etoile g ou f, eſt à la tangente de la déclinaiſon de l'Etoile K ou l, comme la différence des fractions $\frac{\text{ſin. ZP}g}{\text{ſin. KP}g} - \frac{\text{ſin. ZP}f}{\text{ſin.}\, f\text{P}l} : \frac{\text{ſin. ZPK}}{\text{ſin. KP}g} - \frac{\text{ſin. ZP}l}{\text{ſin.}\, f\text{P}l}$; ou comme la différence des produits ſin. ZP$g \times$ ſin. fPl — ſin. ZP$f \times$ ſin. KPg : ſin. ZPK $\times$ ſin. fPl — ſin. ZP$l \times$ ſin. KPg, par la 1[e]. Propoſ. de M. Mayer ; & nommant m & n ces différences, on aura $m : n$: : la tangente de la déclinaiſon de l'Etoile g eſt à celle de la déclinaiſon de l'étoile K.

Exemple.

Soient pour le Vertical ZgK		Pour le Vertical Z fl	
Les angles horaires. ZPK =	48° 0′ 0″	Angles horaires. ZPl =	30° 0′ 0″
ZPg =	41 43 40,7	ZPf =	25 28 15
Donc KPg =	6 16 19,3	Donc lPf =	4 31 45
Sinus de ZPg =	9.8232099	Sinus ZP f =	9.6335205
— ſinus KPg =	9.0384176	— ſinus fPl =	8.8974433
Log. 1[e] fraction =	0.7847923	Log. 2[e] fraction =	0.7360772
Sinus ZPK =	9.8710735	Sinus ZP l =	9.6989700
— ſinus KPg =	9.0384176	— ſinus fP l =	8.8974433
Log. 3[e] fraction =	0.8326559	Log. 4[e] fraction	0.8015267

Valeurs en nombres naturels.

1[e] fraction =	6,0924545	3[e] fraction =	6,8023015
— 2[e] fraction =	5,4460000	— 4[e] fraction =	6,3317929
m =	0,6464545	n =	0,4705086

Logarithme m =	9.8105379
Logarithme n =	9.6725676
Logarithme $\frac{m}{n}$ =	0.1379703

II. PARTIE.

Ayant fait paſſer les deux mêmes Etoiles par deux Almicantaraths inconnus, & connoiſſant les angles horaires à chaque paſſage, trouver le rapport des coſinus de leurs déclinaiſons ?

Multipliez le ſinus de la demi-ſomme par le ſinus de la demi-différence des angles horaires de chaque Etoile dans ſon paſſage par les deux Almicantaraths, & dites : comme le produit qui convient à la 1e Etoile eſt au produit qui convient à la 2e, ainſi le coſinus de la déclinaiſon de la 2e Etoile, eſt au coſinus de la déclinaiſon de la 1e. C'eſt un corollaire de la 2e Propoſ. de M. Mayer.

Exemple.

Ayant fait paſſer les deux mêmes Etoiles par les Almicantaraths CD & AB, on a trouvé les angles horaires ſuivans :

ZPp =	63° 39′ 7″,4		
ZPm =	49 41 23		
Somme =	113 20 30,4		
Differ. =	13 57 44,4		
½ ſomme =	56 40 15,2	Sinus	9.9219613
½ différence =	6 58 52,2	Sinus	9.0847302
	Logarithme a =		9.0066915
ZPq =	68° 26′ 26″,3		
ZPn =	54 44 20		
Somme =	123 10 46,3		
Differ. =	13 42 6,3		
½ ſomme =	61 35 23,15	Sinus	9.9442663
½ differ. =	6 51 3,15	Sinus	9.0765881
	Logarithme b =		9.0208544

I. PARTIE.

Ayant fait passer deux Etoiles inconnues par deux verticaux inconnus, & connoissant leur distance au Méridien dans le tems de leurs passages par ces deux verticaux; trouver le rapport des tangentes de leurs déclinaisons ?

Soient les deux verticaux Z*g*K, Z*fl*; la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* ou *f*, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile K ou *l*, comme la différence des fractions $\frac{\sin. ZPg}{\sin. KPg} - \frac{\sin. ZPf}{\sin. fPl} : \frac{\sin. ZPK}{\sin. KPg} - \frac{\sin. ZPl}{\sin. fPl}$; ou comme la différence des produits $\sin. ZPg \times \sin. fPl - \sin. ZPf \times \sin. KPg : \sin. ZPK \times \sin. fPl - \sin. ZPl \times \sin. KPg$, par la 1[e]. Propos. de M. Mayer; & nommant *m* & *n* ces différences, on aura $m : n$:: la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* est à celle de la déclinaison de l'étoile K.

Exemple.

Soient pour le Vertical Z*g*K		Pour le Vertical Z *fl*	
Les angles horaires. { ZPK =	48° 0′ 0″	Angles horaires. { ZP*l* =	30° 0′ 0″
{ ZP*g* =	41 43 40,7	{ ZP*f* =	25 28 15
Donc KP*g* =	6 16 19,3	Donc *l*P*f* =	4 31 45
Sinus de ZP*g* =	9.8232099	Sinus ZP*f* =	9.6335205
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P*l* =	8.8974433
Log. 1[e] fraction =	0.7847923	Log. 2[e] fraction =	0.7360772
Sinus ZPK =	9.8710735	Sinus ZP *l* =	9.6989700
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P *l* =	8.8974433
Log. 3[e] fraction =	0.8326559	Log. 4[e] fraction	0.8015267

Valeurs en nombres naturels.

1[e] fraction =	6,0924545	3[e] fraction =	6,8023015
— 2[e] fraction =	5,4460000	— 4[e] fraction =	6,3317929
m =	0,6464545	*n* =	0,4705086

Logarithme *m* =	9.8105379
Logarithme *n* =	9.6725676
Logarithme $\frac{m}{n}$ =	0.1379703

II. PARTIE.

Ayant fait paſſer les deux mêmes Etoiles par deux Almicantaraths inconnus, & connoiſſant les angles horaires à chaque paſſage, trouver le rapport des coſinus de leurs déclinaiſons ?

Multipliez le ſinus de la demi-ſomme par le ſinus de la demi-différence des angles horaires de chaque Etoile dans ſon paſſage par les deux Almicantaraths, & dites : comme le produit qui convient à la 1e Etoile eſt au produit qui convient à la 2e, ainſi le coſinus de la déclinaiſon de la 2e Etoile, eſt au coſinus de la déclinaiſon de la 1e. C'eſt un corollaire de la 2e Propoſ. de M. Mayer.

Exemple.

Ayant fait paſſer les deux mêmes Etoiles par les Almicantaraths CD & AB, on a trouvé les angles horaires ſuivans :

ZP*p* =	63° 39′ 7″,4		
ZP*m* =	49 41 23		
Somme =	113 20 30,4		
Differ. =	13 57 44,4		
½ ſomme =	56 40 15,2	Sinus	9.9219613
½ différence =	6 58 52,2	Sinus	9.0847302
	Logarithme *a* =		9.0066915
ZP*q* =	68° 26′ 26″,3		
ZP*n* =	54 44 20		
Somme =	123 10 46,3		
Differ. =	13 42 6,3		
½ ſomme =	61 35 23,15	Sinus	9.9442663
½ differ. =	6 51 3,15	Sinus	9.0765881
	Logarithme *b* =		9.0208544

III. PARTIE.

Le quarré du cosinus de l'Etoile q étant (par la 3[e] Propos. de M. Mayer $= \frac{aa\,mm - bb\,nn}{bb\,(mm - nn)} = \frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}$, & toutes ces valeurs étant à présent connues, il n'y a plus qu'à les substituer dans la formule.

Logarithme m =	9.8105379			
+ Logarithme a =	9.0066915			
Logarithme am =	8.8172294			
Logarith. $aamm$ =	7.6344588			
Logarithme b =	9.0208544			
+ Logarith. n =	9.6725676		Nombres naturels.	
Logarithme bn =	8.6934220		$\frac{aa\,mm}{bb\,nn}$ =	1,768539
Logarith. $bb\,nn$ =	7.3868440		$\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1$ =	0,768539
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn}$ =	0.2476148		$\frac{mm}{nn}$ =	1,887733
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1$ =	9.8856659		$\frac{mm}{nn} - 1$ =	0,887733
− Log. $\frac{mm}{nn} - 1$ =	9.9482824			
Reste =	9.9373835			

La moitié est la rac. = 9.9686917 cosinus de 21° 29′ 43″ $\frac{1}{3}$ déclinaison de l'Etoile q.

La déclinaison de la 1[e] Etoile étant ainsi trouvée, on a ces deux analogies, pour trouver celle de la 2[e]. 1.° Par les cosinus, $a : b$:: le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p. 2.° Par les tangentes, $m : n$:: la tangente de la déclinaison de l'Etoile q : est a celle de la déclinaison de l'Etoile p.

1. Par les cosinus.

a Compl. arithm.	0.9933085	
: b	9.0208544	
: : cos. 21° 29′ 43″ $\frac{1}{3}$	9.9686917	
: cos. 15 59 38 $\frac{1}{2}$	9.9828546	déclinaison de l'Etoile p.

2. Par les tangentes.

m	Compl. arithm.	0.1894621
: n		9.6725676
: : tang.	21° 29′ 43″ $\frac{1}{4}$	9.5952944
: tang.	15 59 38 $\frac{1}{4}$	9.4573241

On peut auſſi trouver directement le coſinus de la déclinaiſon de la ſeconde Etoile p, ſans ſuppoſer counue celle de la 1ᵉ q, en ſubſtituant les valeurs ci-devant trouvées, dans la formule $\sqrt{\frac{1 - \frac{bbnn}{aamm}}{1 - \frac{nn}{mm}}}$.

Connoiſſant les déclinaiſons des deux Etoiles, & leurs angles horaires, on pourra trouver la hauteur du pole en quatre manières différentes, par les méthodes des Problémes précédens, ou bien par les analogies ſuivantes, qui ſont plus expéditives que celles des Problémes XXXIII & XXXIX.

1. Analogie.

Par l'un des deux Verticaux.

Prenez la différence entre le produit de la tangente de déclinaiſon d'une Etoile par le ſinus de l'angle horaire de l'autre étoile à ce vertical, & le produit de la tangente de déclinaiſon de la 2ᵉ Etoile par le ſinus de l'angle horaire de la 1ᵉ au même Vertical, & dites : comme cette différence eſt au quarré du rayon, ainſi le ſinus de la différence des deux angles horaires eſt à la cotangente de la hauteur du pole.

Si les déclinaiſons ſont de différente eſpèce, l'une Nord & l'autre Sud, il faudra ajouter les deux produits, & prendre leur ſomme au lieu de leur différence.

Exemple 1.

Pour le Vertical Z*g*K.

La déclin. Nord de l'Etoile *g* eſt	21° 29′ 43″	ſa tangente	9.5952944
L'angl.horaire ZPK de l'Etoile K	48 0 0	ſon ſinus	9.8710735
Logarithme du 1er produit			9.4663679
La déclinaiſon Nord de l'Etoile K	15° 59′ 38″	ſa tang.	9.4573241
L'angle horaire ZP*g* de l'Etoile *g*	41 43 40,7	ſon ſin.	9.8232099
Logarithme du 2d produit			9.2805340

Nombres naturels. { 1er produit = , 29266304
2d produit = , 19078053
Différence = , 10188251

Comme cette différence , 10188251		Logarithme	9.0080996
Eſt au quarré du rayon		Compl.. arit.	0.9919004
Ainſi le ſin.de la differ.*g*PK des angles hor.	6° 16′ 19″,3		9.0384176
Eſt à la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303180

Exemple 2.

Pour le Vertical Z*fl*.

La décl. Nord de l'Etoile *f*	21° 29′ 43″	ſa tang.	9.5952944
Angle horaire ZP*l* de l'Etoile *l*	30 0 0	ſon ſinus	9.6989700
Logarithme du 1er produit			9.2942644
Décl. Nord de l'Etoile *l*	15° 59′ 38″	ſa tang.	9.4573241
Angle horaire ZP*f* de l'Etoile *f*	25 28 15	ſon ſinus	9.6335205
Logarithme du 2d produit			9.0908446

Nombres naturels { 1er produit = , 19600845
2d produit = , 12326636
Différence = , 07364209

Comme cette différence , 07364209		Logarithme	8.8671259
: Au quarré du rayon		Compl. arith.	1.1328741
:: Le ſinus de la differ. *l*P*f* des angles hor.	4° 31′ 45″		8.8974433
: A la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303174

2. Analogie

Par l'un des deux Almicantaraths.

Multipliez le cosinus de la déclinaison de chaque Etoile, par le cosinus de son angle horaire dans son passage par l'Almicantarath, & prenez la différence de ces deux produits. Ajoutez au sinus de la demi-somme celui de la demi-différence des complémens de déclinaison des deux Etoiles, & le logarithme du nombre 2, pour avoir la différence des sinus des déclinaisons en logarithmes ; & dites : comme la différence des premiers produits est à la différence des sinus des déclinaisons, ainsi le rayon est à la cotangente de la hauteur du Pole.

Exemple I.

Pour l'Almicantarath supérieur AB.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *m* inférieure	9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*m* 49° 41′ 23″	9.8108550
Logarithme du 1er produit	9.7937096
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *n* supérieure	9.9686917
Cosinus de son angle horaire ZP*n* 54° 44′ 20″	9.7614042
Logarithme du 2d produit	9.7300959

Nombres naturels.	1er produit =, 62188429	
	2d produit =, 53715037	
	Différence =, 08473392	Logar. 8.9280573.

Complém. de la déclin. de l'Etoile *m*	74° 0′ 21″ 2/3	
De l'Etoile *n*	68 30 16 2/3	
Somme	142 30 38 1/3	
Différence	5 30 5	
Sinus de la 1/2 somme	71° 15′ 19″ 1/6	9.9763316
+ sinus de la 1/2 differ.	2 45 2 1/2	8.6811528
+ Logarithme de 2		0.3010300
Différence des sinus		8.9585144

La différence des produits	8.9280573 Comp. ar.	1.0719427
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons		8.9585144
: A la cotangente de la hauteur du Pole 42° 59′ 53″		0.0304571

Exemple 2.

Pour l'Almicantarath inférieur CD.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *p* ou *m*	9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*p* 63° 39′ 7″.4	9.6472080
Logarithme du 1^er^ produit	9.6300626
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *q* ou *n*	9.9686917
Cosin. de son angle horaire ZP*q* 68° 26′ 26″,3	9.5652159
Logarithme du 2^d^ produit	9.5339076

Nombres naturels. { 1^er^ produit = ,42664099
2^d^ produit = , 34190669
Différence = , 0847343 logar. 8.9280592

La différence des produits 8.9280592	Compl. arit.	1.0719408
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons		8.9585144
: A la cotang. de la hauteur du Pole	42° 59′ 34″	0.0304552

Ces petites différences des deux latitudes trouvées viennent de quelques défauts dans les angles horaires supposés.

REMARQUE.

CEtte méthode a plusieurs avantages. 1.° Elle est à l'abri des réfractions qui troublent si fort les autres méthodes. 2.° Elle ne dépend en aucune maniere de la division des Instrumens, toujours suspecte ; puisqu'on peut avoir le tems par une bonne pendule, & par des hauteurs égales avant & après midi, sans connoître ces hauteurs. 3.° Elle fournit quatre manieres différentes de déterminer la latitude ; en sorte que si l'on ne trouve pas la même latitude par ces quatre méthodes, on est assuré que l'on a fait quelque erreur dans quelqu'une des huit observations ; & si les différences ne sont pas d'une minute, on a la vraie latitude à quelques secondes près, en prenant un milieu entre les quatre résultats. 4.° Cette méthode ne dépend ni de l'ascension droite ni de la déclinaison des deux Etoiles ; elle les donne immédiatement. 5.°

Elle

Elle peut ſervir à déterminer exactement & ſans parallaxe la poſition de la Lune, des Planétes & des Comètes. 6°. Elle eſt pourtant en partie impraticable à la Mer, où l'on ne peut pas obſerver le paſſage des Etoiles par deux Azimuths, & où d'ailleurs on connoit aſſez la déclinaiſon dee Etoiles ſans la chercher par cette méthode: Auſſi nous ne l'avons développee que pour n'omettre aucun des Problémes de M. de Maupertuis qui peuvent ſe réſoudre par le calcul logarithmique, & pour ne pas borner à la Mer l'utilité de cet ouvrage. On peut néanmoins à la Mer employer utilement une partie de cette méthode, qui eſt de faire paſſer deux Etoiles connues par deux Almicantaraths inconnus, ou deux hauteurs égales, obſervant leurs angles horaires à chaque paſſage, & déterminer la latitude du lieu par les deux dernières analogies dont nous avons donné le modéle; les deux réſultats ſe ſerviront réciproquement de preuve, ou ſe compenſeront, en prenant un milieu, s'il y a de la différence.

CHAPITRE V.

Correction des erreurs qui résultent des Observations, dans le calcul des Problémes Astronomiques, avec la maniére de déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.

Fig. 23 LE calcul des Problémes Astronomiques se réduit presque toujours à un triangle sphérique AZP, (fig. 23) où l'on a un côté constant AP que l'on connoît par les Tables. Il en faut excepter le cas où l'on cherche la déclinaison d'un Astre ; le côté AP n'est pas constant alors, mais on a d'autres quantités connues & constantes. On en suppose toujours deux, & l'on fait varier les autres, pour sçavoir à quelle erreur on s'expose par le défaut des Observations. Voici les Regles de ces variations, que M^r. *Cotes* a démontrées, en les supposant très-petites, & que j'applique à ce triangle.

1^e. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est invariable, avec l'un des angles adjacents* A *ou* P.

1. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, est à celle du côté opposé à cet angle, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté invariable. Par exemple, si AP & l'angle A sont invariables, la variation du côté AZ, est à celle de ZP, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z. De même, si AP & l'angle P sont invariables, la variation de ZP est à celle de AZ, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z.

2. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle de l'angle opposé à ce côté, comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle cons-

tant. Par exemple, l'angle A & le côté AP étant invariables, la variation de l'autre angle P adjacent au côté AP, eſt à celle de l'angle Z oppoſé au côté AP, comme le rayon eſt au coſinus du côté PZ oppoſé à l'angle conſtant A.

3. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, eſt à celle du côté oppoſé à l'angle invariable, comme la tangente de l'angle oppoſè au côte invariable, eſt au ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant. Ainſi l'angle A & le côté AP étant conſtants, la variation de l'autre angle P eſt à celle du côté PZ oppoſé à l'angle conſtant, comme la tangente de l'angle Z eſt au ſinus du côté PZ.

4. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle conſtant, eſt à celle de l'angle oppoſé au côté invariable; comme la tangante du côté oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté invariable.

5. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, eſt à celle de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, comme le ſinus de l'angle oppoſé au côté invariable, eſt au ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant. Ainſi l'angle A & le côté AP ſubſiſtans, la variations, de l'autre angle P eſt à celle du côté AZ, comme le ſinus de l'angle Z eſt au ſinus du côté PZ.

6. La variation de l'angle oppoſé au côté invariable, eſt à celle du côté oppoſé à l'angle invariable, comme la tangente de cet angle eſt à la tangente de ce côté. Ainſi A & AP étant conſtans, la variation de l'angle Z eſt à celle de PZ, comme la tangente de l'angle Z eſt à la rangente de PZ.

2e. Regle.

Lorſque l'un des côtés AP *eſt variable, avec l'angle* Z *qui lui eſt oppoſé.*

1. La variation de l'un des deux autres angles eſt à celle du côté oppoſé à cet angle, comme la tangente de cet angle eſt à la tangente de ce côté. Par exemple Z &

AP subsistans, la variation de l'angle P est à celle du côté AZ, comme la tangente de l'angle P est à la tangente du côté AZ.

2. Les variations des deux autres côtés sont entr'elles, comme les cosinus des angles opposés à ces côtés.

3. Les variations des deux autres angles sont entr'elles, comme les cosinus des côtés qui leur sont opposés.

4. La variation de l'un des deux autres côtés est à celle de l'angle compris par ce côté & par le côté invariable, comme le produit de la tangente par le cosinus de ce côté, est au produit de la tangente de l'angle opposé à ce côté, par le cosinus du 3[e] côté. Par exemple Z & AP étant invariables, la variation du côté AZ est à celle de l'angle A compris entre AP & AZ, comme le produit de la tangente du côté AZ par le cosinus du même côté, est au produit de la tangente de l'angle P par le cosinus du 3[e] côté PZ.

3[e] Regle.

Lorsque deux côtés sont invariables, comme AP *&* PZ.

1. La variation de l'angle compris par ces deux côtés, est à celle de l'un des deux autres angles, comme le produit du rayon par le sinus du côté opposé au premier angle, est au produit du sinus du côté opposé au second angle par le cosinus du troisième angle. Ainsi dans le cas des deux côtés constans AP & PZ, la variation de l'angle P compris entre ces deux côtés, est à celle de l'angle A, comme le produit du rayon par le sinus du côté AZ opposé à l'angle P, est au produit du sinus du côté PZ opposé à l'angle A par le cosinus du 3[e] angle Z.

2. La variation du même angle compris par ces deux côtés est à celle du côté opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un des deux côtés par le sinus de l'autre angle adjacent à ce côté. Ainsi AP & PZ étant constans, la variation de l'angle P est à celle du

côté opposé AZ, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de PZ par le sinus de l'angle Z, ou, au produit du sinus de AP par le sinus de l'angle A.

3. La variation de l'un des deux angles opposés aux côtés constans, est à celle du troisième côté, comme la cotangente de l'autre angle opposé à l'autre côté constant, est au sinus du troisième côté. Ainsi la variation de l'angle A est à la variation du 3^e^ côté AZ, comme la cotangente de l'angle Z est au sinus du côté AZ.

4. Les variations des angles opposés aux côtés constans sont entre elles, comme les tangentes des mêmes angles.

4^e^. Regle.

Lorsque deux angles restent invariables.

1. La variation du côté compris par les deux angles constans, est à celle de l'un des deux autres côtés, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle opposé au premier côté, est au produit du sinus de l'angle opposé à l'autre côté par le cosinus du 3^e^ côté. Ainsi les angles P & A étant constans, la variation du côté AP compris entre A & P, est à celle du côté PZ, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle Z opposé au côté AP, est au produit du sinus de l'angle A opposé à PZ par le cosinus du 3^e^ côté AZ.

2. La variation du même côté compris entre les deux angles constans, est à celle de l'angle opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un de ces deux angles par le sinus du côté adjacent à cet angle. Ainsi P & A subsistans, la variation de AP est à celle de l'angle opposé Z, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'angle A par le sinus du côté AZ, ou du sinus de l'angle P par le sinus du côté PZ.

3. La variation de l'un des côtés opposés aux angles constans, est à celle du 3^e^ angle, comme la cotangente de l'autre côté opposé à l'autre angle invariable, est

au sinus du 3ᵉ angle. Ainsi A & P étant invariables, la variation de PZ est à celle du 3ᵉ angle Z, comme la cotangente de AZ est au sinus de l'angle Z.

4. *Les* variations des côtés opposés aux angles constans sont *entr'elles*, comme les tangentes des mêmes côtés.

Ces quatre Regles renferment toutes les variations des triangles sphériques, en ne supposant que deux de leurs parties invariables. Leur application fera voir jusqu'à quel point on peut compter sur le calcul des Problémes Astronomiques. Si un Instrument ne donne la hauteur d'un Astre, qu'à une minute près, on verra le rapport qu'aura cette minute d'erreur, avec l'incertitude de l'heure, de la latitude, ou de l'angle azimuthal qu'on aura conclu par l'observation, tout le réste étant supposé exact.

Un autre avantage de ces regles, c'est qu'elles déterminent presque toujours sans calcul les circonstances où il faut faire l'observation, afin que les erreurs inévitables n'y influent que le moins qu'il sera possible. Nous allons en faire voir l'usage dans différens Problémes.

PROBLEME I.

La déclinaison étant donnée avec l'angle horaire P, *trouver à quelle erreur on s'expose dans le calcul de la latitude, par le défaut de la hauteur, & quelle est la hauteur la hauteur la plus propre à cette observation ?*

PAr l'Art. 1. de la 1ᵉ Regle, la variation de ZP, ou de la latitude, est à celle de la hauteur, ou de la distance AZ de l'Astre au Zénith, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z opposé au côté invariable AP.

Donc plus le cosinus de l'angle azimuthal Z sera grand, plus l'erreur dans le calcul de la latitude sera petite.

Dans le Méridien, ou l'angle Z est nul, son cosinus égal au rayon, est aussi grand qu'il peut l'être. Donc l'observation de la hauteur Méridienne, est celle qui

produit la moindre erreur dans la latitude, tout le reste étant égal.

Mais on ne peut pas toujours observer la hauteur du Soleil à midi, & l'angle Z devient toujours plus grand, à mesure que l'Astre s'en éloigne, jusques à son passage par le premier vertical, où l'angle Z étant de 90.°, son cosinus est zero. Donc la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'heure étant donnée, est celle qui convient le moins pour déterminer la latitude. Donc on ne sçauroit trop s'éloigner du premier vertical.

Cependant l'erreur n'est pas infinie dans le premier vertical, comme cela semble suivre de la proportion, & de ce que le rayon est infiniment plus grand que le cosinus de 90.°; mais on ne peut pas dans ce cas supposer aucune erreur dans la hauteur, puisque les angles P & Z étant donnés & constans avec le côté AP, tout le reste par là dévient invariable.

Exemple d'une grande erreur dans la latitude.

La hauteur du Soleil à 6 heures a été trouvée 15° 16′ 4″, sa déclinaison étant 19° 39′ 10″, & sur ces deux élémens on a trouvé son Azimuth 77° 28′ 30″ & la latitude 51° 32′. On demande à quelle erreur on s'oppose dans la latitude pour 10′ d'erreur dans la hauteur?

Comme le cos. de l'angle Z,	77° 28′ 30″	Compl. arith.	0.663809
: Au rayon : : l'erreur de 10 minutes			1.000000
: A celle de la latitude	46′,111 = 46′ 7″		1.663809

On peut s'en convaincre par expérience; car si l'on suppose la hauteur du Soleil 15° 26′, plus grande que la premiere de 10°, on dira;

Comme le sin. de la déclin.	19° 39′ 10″	Compl. arit.	0.473248
: est au rayon : : le sin. de la haut.	15 26		9.425073
: Au sinus de la latitude	52 18		9.898321
La premiere latitude étoit	51 32		
L'erreur est donc	0 46		

PROBLEME II.

La déclinaiſon étant donnée avec l'angle horaire, trouver à quelle erreur on s'expoſe dans la latitude par l'obſervation de l'angle Azimuthal?

PAr le 4ᵉ Art. de la 1ᵉ Regle, la variation du côté ZP, ou de la latitude, eſt à celle de l'angle azimuthal Z oppoſé au côté conſtant AP, comme la tangente du côté AZ, ou cotangente de la hauteur, eſt au ſinus de l'angle Z.

Ainſi l'heure étant donnée, lorſqu'on veut conclure la latitude par l'angle azimuthal, il faut obſerver l'Aſtre dans le premier vertical, où le ſinus de l'angle Z eſt le plus grand de tous; & l'on dira: comme le ſinus de l'angle azimuthal eſt à la cotangente de la hauteur de l'Aſtre, ainſi l'erreur de l'angle azimuthal eſt à celle de la latitude. Par conſéquent plus la hauteur de l'Aſtre ſera grande dans le premier vertical, plus l'erreur de la latitude conclue par l'angle azimuthal ſera petite.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″ Nord, on a trouvé ſon azimuth à 8ʰ 30′ du matin, de 72° 12′ 54″, & on en a conclu la latitude 51° 32′. On demande quelle eſt l'erreur de la latitude, ſi l'on s'eſt trompé de 10′ dans l'obſervation de l'angle azimuthal?

Comme le ſinus de l'angle azimuthal	72° 12′ 54″ Comp. ar.	0.021268
: A la cotang. de la hauteur calculée	38 18 46	0.102310
:: Ainſi l'erreur de 10 minutes		1.000000
: A l'erreur de la latitude	13′,29 = 13′ 17″	1.123578

On peut vérifier ce calcul, en ſuppoſant l'angle azimuthal plus grand ou plus petit de 10 minutes, & calculant de nouveau la latitude.

PROBLEME III.

La hauteur d'un Astre & sa déclinaison étant données, trouver l'angle horaire le plus propre à déterminer son azimuth ?

PAr l'Art. 4 de la 3e Regle, comme la tangente de l'angle horaire est à la tangente de l'angle azimuthal, ainsi la variation de l'angle horaire est à celle de l'angle azimuthal. Donc les Astres qui se trouvent auprès du cercle de six heures sont les plus propres à cette observation, toutes choses égales d'ailleurs; parce que la tangente de l'angle horaire étant presque infinie, la variation ou l'erreur de l'angle azimuthal est la moindre qui se puisse.

Exemple.

La déclinaison du Soleil étant 19° 39′ 10″, & sa hauteur à 6 heures étant 13° 20′ 8″, on a trouvé son azimuth 75° 25′ 50″. Quelle sera l'erreur de cet azimuth, si l'on s'est trompé dans l'angle horaire de 15′ ?

Comme le cosinus de la hauteur	13°	20′	8″	Compl. ar.	0.011871
: Au cosinus de la déclinaison	19	39	10		9.973935
: : Le sinus de l'angle horaire	90	15	0		9.999996
: Au sinus de l'Azimuth	75	25	49		9.985802

Où l'on voit que 15′ d'erreur dans l'angle horaire n'ont alteré l'azimuth que d'une seconde.

Il y a encore un autre avantage à observer les Astres qui sont sous le cercle horaire de six heures; c'est que l'erreur qu'on peut commettre dans la latitude n'influe point dans le calcul de l'azimuth, puisque la latitude, comme on le voit, n'entre point dans ce calcul.

PROBLEME IV.

La déclinaiſon d'un Aſtre & la latitude du lieu ètant données, trouver la hauteur de l'Aſtre la plus propre à determiner ſon angle horaire ?

PAr l'Art. 2 de la 3^e^ Regle, la variation de l'angle horaire eſt à celle de la hauteur de l'Aſtre, comme le quarré du rayon eſt au produit du coſinus de la latitude par le ſinus de l'angle azimuthal, ou au produit du coſinus de la déclinaiſon par le ſinus de l'angle de poſition. Car ces deux produits ſont égaux.

Donc l'erreur de l'angle horaire ſera d'autant plus petite, que le ſinus de l'angle azimuthal ſera plus grand ; & comme le plus grand ſinus eſt celui de $90.^\circ$, la moindre erreur de l'angle horaire ſera celle d'un Aſtre dont on aura obſervé la hauteur dans le premier vertical, quelleque ſoit cette hauteur, grande ou petite.

Sous l'équateur, où la latitude eſt zero, & ſon complément 90°, ſi l'on ſe trompe d'une minute en obſervant la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'erreur de l'angle horaire ne ſera que de $4''$ de tems, ou d'une minute de degré ; parce que les deux variations ſont égales : dans la latitude de 45°, l'erreur de $5''\frac{2}{3}$ de tems : dans celle de 50° elle ſera de $6''\frac{2}{3}$, & dàns celle de 55° de $6''\frac{37}{38}$.

De même, lorſque l'angle de poſition eſt droit, *la* moindre erreur de l'angle horaire ſera celle de l'Aſtre obſervé dans cette poſition.

PROBLEME V.

La déclinaison & la latitude étant dsnnées, trouver la hauteur la plus favorable pour déterminer l'Azimuth?

PAr l'Art. 3 de la 3e Regle, la variation de l'angle azimuthal est à celle de la hauteur, comme la cotangente de l'angle de position est au cosinus de la hauteur.

Donc la moindre erreur de l'azimuth qui résulte de la hauteur d'un Astre, est lorsque l'angle de position est de 90°. Or par le 1er Cas des triangles rectangles, l'angle A (Fig.23) étant droit, le cosinus de PA, sinus de la déclinaison, est au rayon, comme le cosinus de ZP, sinus de la latitude, est au cosinus de ZA, sinus de la hauteur de de l'Astre. Fig. 23.

Plusieurs Aureurs ont démontré cette analogie par le calcul différentiel, en observant que tous les Astres, qui dans leur mouvement diurne passent entre le pole & le zénith, ont avant & après leur passage par le Méridien, une petite portion de leur parallèle qui se confond avec l'azimuth, leur cours étant alors perpendiculaire à l'horison ; ce qui fait qu'ils montent ou descendent, sans changer sensiblement d'azimuth, & que par conséquent on peut s'y tromper dans l'observation de la hauteur, sans que l'erreur influe sur la détermination de l'azimuth.

Il est évident que l'angle azimuthal qui répond à chaque partie du cercle que l'Astre décrit, doit croitre jusqu'à ce qu'il soit parvenu à cette partie qui est commune au parallèle & à l'azimuth, & que cet angle décroit aussi-tôt après. Il faut douc chercher le plus grand angle azimuthal. C'est ce qu'à fait M. de Maupertuis dans le Probl. X. de l'*Astronomie Nautique.* Nous trouvons la même chose sans ce grand appareil de calcul. Car l'angle A de position (fig. 49) étant droit, l'arc du parallèle Fig. 49

se confond avec le verrical ZA. On doit donc trouver la distance d'un Astre au Zénith, ou sa hauteur, & le plus grand angle Z par le 1^er^ Cas des triangles rectangles.

Quant aux Astres qui ne passent pas entre le Zénith & le pole, le plus grand angle de position est celui du 1^er^ vertical avec le cercle de déclinaison. Car le sinus de l'angle A, est au sinus de ZP, comme le sinus de l'angle Z est au sinns de AP. Done ZP & AP étant constans & invariables, le sinus de l'angle A est le plus grand de tous, lorsque celui de l'angle Z est égal au rayon. Donc il faut obsetver ces Astres dans le premier vertical, pour avoir la moindre erreur dans l'azimuth.

Exemple.

La latitude étant 51° 32′ Nord, la déclinaison du Soleil 19° 39′ 10″ Nord, nous avons trouvé sa hauteur dans le 1^er^ vertical 25° 26′ 20″, & l'angle de position 41° 20′ 27″. On demande l'erreur de l'azimuth, qui résulteroit de l'erreur de 2′ dans l'observation de la hauteur ?

Le cosinus de la hauteur	25° 26′ 20″	Comp. ar.	0.044291
: A la cotang. de l'angle de position A	41 20 27		0.055623
:: L'erreur de la hauteur	2′		0.301030
: A l'erreur de l'angle azimuthal	2′ ½		0.400944

PROBLEME VI.

La réfraction horisontale étant donnée, trouver combien elle affecte l'amplitude d'un Astre, & le tems de son lever & de son coucher apparens ?

LA variation de la hauteur qui est ici la réfraction horisontale, est à la variation de l'amplitude ou de l'azimuth, comme le rayon, qui est le cosinus de la hauteur apparente, est à la cotangente de l'angle de position. C'est la Regle inverse du Probléme précédent.

Fig. 23. Par le 2^d^ Art. de la 3^e^ Regle, la variation de l'angle ho-

raire est à la réfraction horisontale, comme le quarré du rayon est au produit du cosinus de la latitude par le sinus de l'angle azimuthal, ou par le cosinus de l'amplitude.

Exemple.

La réfraction horisontale étant de 32′, la latitude Nord 43° 18′, la déclinaison Sud 19° 39′ 10″, le Soleil a paru se coucher à 4h 44′ 38″ & son amplitude apparente a été 26° 57′ 36″. On demande la vraie amplitude & le vrai tems de son coucher?

Le produit du cos. de la lat.	43° 18′ 0″	Comp. ar.	0.138004
Par le cos. de l'amplitude observée	26 57 36	Comp. ar.	0.049965
: Au quarré du rayon : : la réfraction horisontale 32′			1.505150
: A la variation de l'angle horaire 49′, 33 = 49′ 20″			1.693119

Le tems apparent du coucher étoit en degrés 71° 9′ 30″. D'où il faut retrancher la variation, parce que le Soleil étoit couché alors, & on aura 70° 20′ 10″, & en tems 4h 41′ 20″ $\frac{2}{3}$.

Pour trouver l'amplitude vraie, je cherche d'abord l'angle de position, en disant:

Le sin. de ZA (*fig.* 23)	90° 32′ 0″	Compl. arithm.	0.000019
: Au sinus de ZPA	71 9 30		9.976081
: : Le sinus de ZP	46 42 0		9.861996
: Au sinus de l'angle A	43 32 8		9.838096
Ensuite, le rayon : à la cotang. de l'angle A			0.022210
: : La réfraction horisontale 32′			1.505150
: A la variation de l'amplitude 33′,679 = 33′ 41″			1.527360

Corollaire.

Si l'on connoit par une horloge bien reglée le tems du coucher apparent du Soleil, & par le calcul ordinaire le tems du vrai coucher, la différence des tems donnera la réfraction horisontale, en faisant: comme le quarré du rayon est au produit du cosinus de la latitude par le co-

ſinus de l'amplitude, ainſi la différence des tems eſt à la réfraction horiſontale.

PROBLEME VII.

La préceſſion des Equinoxes etant donnée, avec la déclinaiſon actuelle d'un Aſtre & ſon aſcenſion droite, trouver la variation de ſa déclinaiſon & de ſon aſcenſion droite?

Fig. 50 SOit (fig. 50) P le pole du Monde, Π le pole de l'Ecliptique, A l'aſtre; PΠ ſera une portion du colure des Solſtices égale à 23° 28′ 20″, qui eſt l'obliquité de l'écliptique. PA ſera le complément de la déclinaiſon de l'Aſtre; l'angle APΠ ſera ſon aſcenſion droite depuis le colure des Solſtices, & PΠA ſa longitude depuis le même colure. La préceſſion des Equinoxes n'eſt autre choſe que l'angle Π, qui croit toutes les années de l'Oueſt à l'Eſt de 50″, parce que l'Equinoxe recule d'autant. Or par le 2d Article de la 3e Regle, la variation de l'angle Π, ou la préceſſion des Equinoxes dans un tems donné, eſt à la variation de PA, ou de la déclinaiſon, comme le quarré du rayon eſt au produit du ſinus de PΠ, 23° 28′ 20″, par le ſinus de l'aſcenſion droite APΠ.

Exemple.

L'aſcenſion droite P de l'étoile polaire étoit au commencement de 1760, de 11° 6′ 4″ depuis le colure des Equinoxes, & de 78° 53′ 56″ depuis le colure PΠ des Solſtices, l'une étant complément de l'autre. Sa déclinaiſon étoit alors de 88° 1′ 19″. On demande ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon pour le commencement de 1764?

1°. Pour trouver ſa déclinaiſon, qui va toutes les années en croiſſant, on dira:

Comme le quarré du rayon est au produit du sin. de 23° 28′ 20″		9.600215
Par le sinus de l'ascension droite P	78 53 56	9.991797
Ainsi la précession des Equinoxes dans 4 ans, 200″		2.301030
Est à la variation de la décl. dans le même tems, 78″,17=1′ 18″		1.893042
Ce qui étant ajouté à la déclin. pour 1760	88° 1 19	
Donne la déclinaison pour 1764	88 2 37	
& la distance au Pole	1 57 23	

2°. Pour trouver l'escension, il faudroit employer le 1er article de la 3e Regle, qui suppose la connoissance de l'angle de position A. Mais il est plus court de chercher immédiatement l'angle P, par le 1er Cas des triangles obliquangles, puisqu'on a maintenant les trois côtés du triangle APπ.

AP =	1° 57′ 23″	Distance de l'Etoile au Pole	
Aπ =	23 55 39	Compl. de la latitude constante de l'Etoile.	
Pπ =	23 28 20	Distance des deux poles P A π	
Somme =	49 21 22		
½ somme =	24 40 41		
— AP =	1 57 23	Compl. ar. du sinus de AP	1.466752
1er reste =	22 43 18	Sinus du 1er reste	9.586874
— Pπ =	23 28 20	Compl. arithm. du sinus de Pπ	0,399785
2d reste =	1 12 21	Sinus du 2d reste	8.323132
		Somme	9.776543
½ somme, sin de la moitié de APπ, 50° 38′ 20″			9.888271
APπ =	101 16 40	depuis le colure des Solst.	
Ascension droite =	11 16 40	depuis le colure des Equin.	

PROBLEME VIII.

Réduire les distances apparentes des Etoiles à la Lune, à leurs distances véritables, & réciproquement.

SOit (fig. 51) L la Lune, E l'étoile, Z le zénith, EL la distance apparente de l'étoile à la Lune, *el* leur vraie distance qui abaisse l'étoile au-dessous de son lieu apparent E, & éléve la Lune en corrigeant la parallaxe Fig. 51.

toujours plus grande que la réfraction. Les véritables distances au Zénith seront *Ze*, & *Zl*. L'arc E*e* sera la réfraction de l'étoile qui la fait monter en E ; & l'arc L*l* sera la parallaxe moins la réfraction de la Lune, qui la fait descendre en L.

L'angle Z n'étant affecté ni par la réfraction ni par la parallaxe & restant invariable, M^r^. l'Abbé de la *Caille* emploie le 1^er^ Article de la 1^e^ Regle des variations, pour trouver la vraie distance *e l* de l'Etoile à la Lune. Mais comme cette méthode suppose le calcul des angles E & L ; il vaut mieux ne calculer que l'angle Z, dans le triangle ELZ, par les trois distances apparentes EZ, LZ, EL ; ce qui donnera le triangle E*l e*, où l'on a *e*Z par la réfraction, Z *l* par la parallaxe moins la réfraction de la Lune, & l'angle compris Z. On aura donc par le 3^e^ Cas des obliquangles, la vraie distance *e l*.

Exemple.

La distance apparente EL d'une Etoile à la Lune a été trouvée de 8° avec un Octant ; la hauteur du centre de la Lune étoit en même tems de 5°, sa parallaxe de 54′ & sa réfraction de 9′ ; la hauteur de l'Etoile de 11° & sa réfraction de 5′. On demande la vraie distance *e l*?

LZ =	85°	Dist. appar. de la Lune au Zénith	
EZ =	79	Dist. appar. de l'Etoile au Zénith	
EL =	8	Dist. appar. de l'Etoile à la Lune	
Somme	172		
½ somme	86		
— LZ =	85	Compl. arithm. du sinus de LZ	0.001656
1^er^ reste =	1	Sinus du 1^er^ reste	8.241855
— EZ =	79	Compl. arithm. du sinus de EZ	0.008053
2^d^ reste =	7	Sinus du 2^d^ reste	9.085894
		Somme	7.337458
½ somme, sinus de ½ EZL		2° 40′ 23″	8.668729
Donc angle Z =		5 20 46	

Z*e* =

$Ze = 79° 5'$ vraie distance de l'étoile au Zénith. $Zl = 84° 15'$ vraie dist. de la Lune.

1. Le Rayon est au cos. de l'angle Z	5° 20′ 46″		9.998106
: : La tangente de Zl	84 15 0		0.996993
: A la tangente d'un arc M	84 13 30		0.995099
	— Ze = 79 5 0		
	N = 5 8 30		
2. Le cosinus de M	84° 13′ 30″	Compl. arith.	0.997307
: Au cosinus de N	5 8 30		9.998248
: : Le cosinus de Zl	84 15 0		9.000816
Au cos. de la vraie dist. el =	7 23 46		9.996371

Réciproquement si la vraie distance *el* est donnée, les trois côtés du triangle *elZ* donneront l'angle Z, & l'on trouvera la distance apparenre EL.

PROBLEME IX.

Trouver l'effet de la variation de l'obliquité de l'Ecliptique sur les longitudes, les latitudes les déclinaisons & les ascensions droites des Astres.

L'Observation des ascensions droites & des déclinaisons étant indépendante de l'obliquité de l'Ecliptique, l'angle APπ de l'ascension droite (fig. 50) & le côté PA de la déclinaison seront invariables, pendant que l'obliquité Pπ, l'angle π des longitudes, & le côté πA des latitudes varieront. Donc par l'Art. 1 de la 1ere Regle, on trouvera la variation de la latitude Aπ, en disant : comme le rayon est au cosinus de l'angle π de la longitude, ainsi la variation de l'obliquité Pπ, est à la variation du côté πA, ou de la latitude. Fig. 50.

Et par l'Art. 4 de la même Regle, la cotangente de la latitude, ou la tangente de πA, est au sinus de la longitude π depuis le colure des Solstices, comme la varia-

tion de l'obliquité $P\Pi$ eſt à la variation de l'angle Π des longitudes.

PROBLEME X.

La parallaxe verticale d'une Planète étant donnée, trouver ſa parallaxe en longitude & en latitude?

LA *parallaxe* étant la différence entre le lieu vrai d'une Planéte, ou vû du centre de la Terre, & ſon lieu apparent, ou vû de la ſurface de la Terre; elle altére la longitude, la latitude, la déclinaiſon, l'aſcenſion droite & la hauteur des Aſtres. Nous avons expliqué pag. 86. la parallaxe *verticale* ou *de hauteur*. La *parallaxe en longitude* eſt la différence entre la *longitude vraie* & la *longitude apparente*. Il en eſt de même de la *parallaxe en latitude*, *en aſcenſion droite*, &c.

Soit (fig. 52) Z le Zénirh, Π le pole de l'Ecliptique,
Fig. 52. A la Planéte. L'angle Z & le côté $Z\Pi$ ne variant point par l'action de la parallaxe, qui abaiſſe l'Aſtre A dans le vertical ZA, on aura par le 1^er^ art. de la 1^re^ Regle, le rayon eſt au coſinus de l'angle de poſition A, comme la variation de ZA, c'eſt-à-dire, la parallaxe verticale, eſt à la variation de ΠA, ou à la parallaxe de latitude.

Et par le 5^e^ Art. de la même Regle, le ſinus de ΠA, ou le coſinus de la latitude, eſt au ſinus de l'angle A, comme la parallaxe verticale, ou variation de ZA, eſt à la variation de l'angle Π, ou à la parallaxe de longitude.

PROBLEME XI.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales du Soleil, lorsque sa déclinaison a varié dans l'intervalle des deux observations? C'est le Probl. 12 de l'Astron. Naut.

POur déterminer l'instant du midi vrai, on observe après midi des hauteurs du Soleil égales à celles qu'on a observées le matin, en marquant le tems de chaque observations. Si la déclinaison du Soleil n'a pas varié sensiblement dans l'intervalle des observations égales & correspondantes, on partage en deux également cet intervalle, & l'on a le tems marqué par l'horloge au moment du passage du Soleil par le Méridien. On peut par cette méthode trouver exactement le passage des Etoiles par le Méridien, parce que leur déclinaison ne souffre aucune variation sensible dans 24 heures.

La déclinaison du Soleil varie peu dans le tems des Solstices; mais elle varie beaucoup dans les Eqninoxes, & cette variation exige une correction pour le midi. soient (Fig. 23) Z le Zénith, A le Soleil, P le pole, ZPA l'angle horaire pour chaque observation correspondante. Fig. 23.
Par le 3^e^ Art. de la 3^e^ Regle, le sinus de PA, ou le cosinus de la déclinaison, est à la cotangente de l'angle de position A, comme la variation de la déclinaison, ou de PA, depuis midi, est à la variation de l'angle horaire ZPA, parce que les côtés ZP & ZA sont invariables.

Dans nos climats, lorsque le Soleil est dans les signes ascendans, c'est-à-dire, lorsqu'il s'approche de notre Zénith, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait, si sa déclinaison n'avoit pas changé; & lorsqu'il est dans les signes descendans, il y arrive plutôt. Le milieu du tems entre les observations correspondantes ne répond pas exactement à midi; & il faut y ajouter la variation lorsque le Soleil s'éloigne Zénith, & la retrancher lorsqu'il s'en approche.

Exemple I.

Le Soleil ayant en Janvier à midi 20° 10′ 20″ de déclinaison méridionale, à 50° de latitude Nord, on a observé sa hauteur le matin à 9^h 28′ 17″, & le soir il est revenu à la même hauteur à 2^h 38′ 41″. On demande le tems de l'horloge au moment de son passage par le Méridien?

Ajoutez à	9^h 28′ 17″
2^h, ou plutôt	14 38 41
Somme	24 6 58

La ½ somme 12^h 3′ 29″ seroit le tems que l'horloge marquoit au moment de midi, si la déclinaison du Soleil n'avoit pas varié dans l'intervalle des deux observations. Mais on trouve par les Tables, que la différence des déclinaisons étoit dans cet intervalle, de 2′ 43″ & par conséquent la demi-différence, ou la variation croissante depuis midi 1′ 21″½, ou 81″½. & le demi-intervalle 2^h 35′ 12″ en tems, ou 38° 48′ 0″ en degrés.

Pour corriger cette observation, il nous faut d'abord trouver l'angle de position A du triangle ZPA, dans lequel nous avons deux côtés & l'angle horaire = 38° 48′ 0″.
½ ZPA = 19 24 0.

PA =	110° 10′ 20″
PZ =	40 0 0
Somme	150 10 20
Differ.	70 10 20
½ somme	75 5 10
½ differ.	35 5 10

1. Le sinus de la ½ somme	Compl. arithm.	0.014882
: Au sinus de la ½ differ.		9.759522
:: La cotang. de ½ ZPA		0.453265
: A la tang. de la ½ differ. des angles 59° 22′ 26″		0.227669

2. Le cos. de la ½ somme des côtés		Compl. arithm.	0.589447
: Au cos. de leur ½ differ.			9.912907
: : La cotang. de ½ ZPA			0.453265
: A la tang. de la ½ somme des angles	83° 40′ 47″		0.955619
— la demi-differ.	59 22 26		
Le moindre angle A =	24 18 21		

3. Le cosinus de la déclinaison	20° 10′ 20″	Compl. ar.	0.027492
: A la cot. de l'angle de position A	24 18 21		0.345208
: : La variation de la déclinaison	81″,5		1.911158
: A la correct. cherchée 192″,24 = 3′ 12″ ¼, & en tems 12″ 49‴			2.283858

Il faut la soustraire du midi trouvé 12ʰ 3′ 29″ 0‴, parce que le Soleil est dans les signes ascendans, & l'on aura le vrai midi à 12 3′ 16″ en négligeant quelques tierces.

Exemple 2.

La première observation a été faite le 22 Septembre à 9 heures du matin, & la seconde à 3 heures du soir à des hauteurs égales; la latitude Nord étant 43° 17′ 40″, & la déclinaison du Soleil à midi 0° 2′ 20″ Nord. On demandoit le tems que marquoit l'horloge à midi.

L'intervalle des observations est ici de 6 heures, & le demi-intervalle de 3ʰ qui valent 45°. S'il n'y avoit point eu de variation dans la déclinaison du Soleil, l'horloge auroit marqué 12 heures à midi. Mais dans le demi-intervalle de 3 heures, la variation de la déclinaison étoit ce jour-là de 2′ 56″ = 176″.

PA =	89° 57′ 40″	Compl. de la déclin. Nord.
PZ =	46 42 20	Compl. de la latitude Nord.
Somme	136 40 0	Angle horaire ZPA = 45°
Differ.	43 15 20	½ ZPA = 22 30′
½ somme	68 20 0	
½ differ.	21 37 40	

1. Le sinus de la ½ somme des côtés	68° 20′ 0″	Comp. ar.	0.031822
: Au sinus de leur ½ différence	21 37 40		9.566526
: : La cotang. de ½ ZPA	22 30 0		0.382776
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43 45 19		9.981124

2. Le cosinus de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés		Compl. arithm.	0.432731
: Au cosinus de leur $\frac{1}{2}$ différence			9.968295
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ ZPA			0.382776
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ somme des angles	80° 39′ 28″		0.783802
— la $\frac{1}{2}$ différence	43 45 19		
L'angle de position A =	36 54 9		

3. Le cosinus de la déclinaison	0° 2′ 20″	Comp. ar.	0.000000
: A la cotang. de l'angle A	36 54 9		0.124424
: : La variation de la déclinaison 176″			2.245513
: A la correction 234″ 389‴ = 3′ 54″ $\frac{1}{3}$			2,369937

Et en tems 15″ 37‴, qu'il faut ajouter à 12 heures, parce que le Soleil étoit dans les signes descendans.

La correction que donne Mr. *de Maupertuis* d'après Mr. *Euler* peut s'exprimer en cette manière : le petit arc de l'Equateur qu'il faut ajouter ou soustraire, est égal au produit du petit arc du cercle de déclinaison (ou de la variation) par la différence de deux quantités, qui sont la tangente de la latitude divisée par le sinus de l'angle horaire, & la tangente de la déclinaison divisée par la tangente de l'angle. Ainsi dans le 1er Exemple nous avons.

Tang. de la latitude 50°	0.0761865		
— sin. de l'angle horaire 38° 48′	9.7969930	*Nombres naturels.*	
Logar. de la 1e partie	0.2791935	1e Partie =	1,9019253
Tang. de la décl. 20° 10′ 20″	9.5651132	2d Partie =	0,4569261
— tang. de l'angle hor. 38° 48′ 0″	9.9052672	Somme =	2,3588514
Logar. de la 2e partie	9.6598460		
Logar. de la somme des 2 parties	0.3727005		
Logar. de la variation 81″,5	1.9111577		
Logar. de la correction	2.2838582	la même que ci-devant.	

On a pris la somme, au lieu de la différence des deux parties, parce que la déclinaison est Méridionale.

PROBLEME XII.

Trouver par obſervation l'angle de poſition A ? (Fig. 23). Fig. 23.

OBſervez le tems que le Soleil emploie à monter ou à deſcendre de tout ſon diamètre, & par le 2d Art. de la 3e Regle, l'intervalle du tems, qui eſt la variation de l'angle P, eſt au diamètre du Soleil, qui eſt la variation de ZA, comme le quarré du rayon, eſt au produit du ſinus de AP par le ſinus de l'angle A. Donc en renverſant cette analogie, on dira ; comme le produit du coſinus de la déclinaiſon par le tems obſervé réduit en degrés, eſt au quarré du rayon, ainſi le Diamètre du Soleil eſt au ſinus de l'angle de poſition.

Cette méthode ne ſuppoſe ni la hauteur du Pole, ni l'heure de l'obſervation, ni même la hauteur du Soleil. Mr. l'Abbé *de la Caille* nous aſſure dans les Mémoires de l'Academie de 1741, qu'il l'a verifiée par un très-grand nombre d'obſervations qu'il a faites en différens endroits du Royaume & qu'il a calculées de deux manières différentes. A peine, dit-il, ai-je trouvé une demi-ſeconde de différence.

PROBLEME XIII.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales, lorſqu'on a navigué Eſt-Oueſt, *ſans changer de latitude.*

SOit (Fig. 53) P le Pole du monde, Z le zénith du Navire au moment de la 1e obſervation, Z" au moment de la 2e, les diſtances du Zénith au pole ayant été toujours égales, puiſqu'on n'a pas changé de latitude ; il eſt évident que le Méridien PZ' déterminé par l'obſervation de deux hauteurs égales, coupera l'angle horaire ZPZ" correſpondant au chemin du Navire, en deux parties égales, ayant égard à la petite correction du Probl. XI. Mais Fig. 53.

ce tems appartient au Méridien où le Navire s'est trouvé dans ce moment ; de sorte que s'il s'est écoulé , par exemple, quatre heures entre les deux momens des hauteurs égales, & que le Navire ait parcouru dans cet intervalle un degré de longitude de l'Ouest à l'Est, il s'ensuit qu'il étoit midi deux heures avant la 2^e^ observation, non pas sous le Méridien PZ″ où elle s'est faite, mais sous le Méridien PZ′ éloigné de PZ″ vers l'Ouest de 30′, qui valent 2′ des tems.

Donc on doit compter sous Z″ 2 heures & 2′ après midi au tems de la 2^e^ observation, & sous Z au tems de la 1^e^ 9^h^ 58′ avant midi. Ce seroit tout le contraire, si l'on avoit fait route de l'Est à l'Ouest, sans changer de latitude.

PROBLEME XIV.

Corriger le midi trouvé par des hauteurs égales, lorsqu'on a navigué Nord *&* Sud, *sans changer de Méridien ?*

Fig. 54. DAns le triangle ZPA (fig. 54). On suppose toujours la distance PA de l'Astre au pole constante, ou que du moins on a corrigé par le Probl. XI. l'effet de sa variation. La distance ZA du Soleil au Zénith a été observée la même avant & après le passage de cet Astre au Méridien. Mais la distance ZP du Zénith au pole ayant varié, & sa variation étant égale à la route du Navire du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, l'angle horaire a dû varier. Or par l'Art. 3 de la 3^e^ Regle, la variation de l'angle P, est à celle du coté ZP, ou de la latitude, comme la cotangence de l'angle Z opposé au côté AP, est au sinus du côté ZP. On dira donc : comme le sinus de la latitude est à la cotangente de l'angle azimuthal, ainsi la variation trouvée de la latitude, ou de la route Nord & Sud, est à celle de l'angle horaire.

Exemple.

La hauteur du Soleil étant 20° 10′, sa déclinaison Sud 19° 39′ 10″, on a trouvé par deux observations de hauteurs égales avant & après midi, que si la latitude n'avoit pas varié, l'angle horaire ZPA auroit été après midi 32° 54′ 28″, ou 2^h 11′ 38″, l'angle PZA 146° 58′ 16″ $\frac{2}{3}$ supplément de l'angle azimuthal, & la latitude 43° 18′ Nord. On demande quelle a été la variation de l'angle horaire, ou quelle est l'heure vraie de la 2^e observation, si le Navire a parcouru 18′ du Nord au Sud ?

Le cosinus de la latitude	43° 18′ 0″	Comp. arithm.	0.138004
: A la cotang. de l'angle Z	146 58 16 $\frac{2}{3}$		0.187006
: : La variation de la latitude 18′			1.255272
: A la variation de l'angle P, 38′,044 = 38′ 3″			1.580282
& en tems 2′ 32″			

On voit que ZP ayant augmenté de 18′, & l'angle PZA étant obtus, AZ & AZ′ subsistant, le Soleil étant immobile en A, l'angle horaire ZPA a du augmenter de la quantité ZPZ′, c'est-à-dire, de 2′ 32″, & que le tems de la 2^e observation qui paroissoit être 2^h 11′ 38″, étoit réellement 2^h 14′ 10″.

Si l'on veut s'en assurer mieux, on calculera le nouveau triangle AZ′P, dont on a les trois côtés, AZ′ qui n'a pas varié, 69° 50′, AP = 109° 39′ 10″, & Z′P = 47° 0′. On trouvera APZ′ = 33° 31′ 58″, & en tems 2^h 14′ 8″, comme on l'avoit trouvé, à 2′ près ; ce calcul étant plus exact que le premier, qui suppose les variations très-petites.

Corollaire.

Si dans cet Exemple, le Navire avoit fait route entre le Sud & l'Ouest, & que sa latitude ayant diminué de 18′, sa longitude eut diminué en même tems d'un degré, l'erreur auroit été par la latitude de 2′ 32″, & par la longitude de 2′, comme on là vu dans le Probléme précédent.

Donc en conſéquence de ces deux mouvemens, il auroit fallu compter 4′ 32″ de plus, parce qu'ils concourent tous deux à augmenter l'angle horaire.

Si au contraire ſa route avoit été entre le Sud & l'Eſt, l'erreur de 2′ provenant de la longitude auroit diminué d'autant celle de la latitude qui étoit de 2′ 32″; ainſi il n'auroit fallu ajouter à l'heure trouvée que 32″, & le tems de la 2e obſervation auroit été 2h 12′ 10″.

Cette correction eſt très-importante, ſur tout dans la recherche des Longitudes.

CHAPITRE VI.

Maniére de trouver la longitude en Mer, par l'Observation des Astres.

CE fameux Probléme se réduit à trouver l'heure qu'il est sur le Navire, & en même tems l'heure qu'il est sous un Méridien dont la longitude est connue. La différence des heures donnera la différence des Méridiens. Quant à l'heure du Méridien du Navire, l'Astronomie fournit divers moyens pour la déterminer à tous les instans, comme on l'a vu dans le Chapitre IV. Reste donc à construire une horloge, dont la marche uniforme malgré l'agitation de la Mer, conserve toujours l'heure qu'il est sous un autre Méridien, par exemple, sous le Méridien du départ, ou bien à déterminer immédiatement cette différence des heures par les ressources que présente l'Astronomie. On n'aura rien à desirer sur la premiére méthode, lorsque l'Angleterre aura rendu publique la belle découverte de MM. *Harrison*. Mais comme ce n'est point trop dans une affaire si importante à la Navigation, de réunir tous les moyens connus, nous rapporterons d'abord ce que l'on sçait de l'invention de MM. *Harrison* & de ses succés; après quoi nous exposerons les secours que l'on peut tirer de l'Astronomie, pour suppléer à cette horloge, ou pour s'en servir plus utilement.

On publia en Angleterre en 1714, la 12e année du Regne de la Reine Anne, un acte du Parlement, par lequel la nation Britannique promit 20000 livres sterling de recompense à celui qui découvriroit les longitudes en Mer à un demi-degré près ou 10 lieues marines; 15000 liv., si on ne les découvroit qu'à deux tiers de degré près; & 10000 à un degré près. On établit en même tems des Commissaires pour juger du mérite des recherches qui seroient présentées

ſur cet objet. Cette commiſſion fut nommée le Bureau des longitudes.

En conſéquence de ces encouragemens, Mr. *Jean Harriſon* fit en 1726 une Pendule qui pendant dix ans de ſuite ne s'écarta du ciel que d'environ une ſeconde par mois. Mr. *Martin Folkes*, Préſident de ſociété Royale en 1749 nous apprend que la première idée de Mr. *Harriſon* fut de faire mouvoir dans le bois les pivots de cuivre, *ſans* y emploier aucune goute d'huile, parce que l'huile en *ſe* raréfiant ou en ſe condenſant dérange les horloges, & oblige à les démonter de tems en tems pour les nettoyer & les remettre en mouvement.

Il s'apperçut enſuite qu'au lieu de faire engrainer les roues dans les pignons ſelon la méthode commune, il valoit mieux leur oppoſer des rouleaux cylindriques de bois, arrêtés par des pointes de cuivre à une diſtance convénable de l'axe des pignons. Il vint à bout par ce moyen de diminuer conſidérablement l'effet des frottemens.

Pour les détruire autant qu'il étoit poſſible, il appliqua aux palettes du Pendule, une eſpèce de charniere, qui empêchoit les palettes de gliſſer à l'ordinaire ſur les dents de cette roue.

Il fallut enſuite s'oppoſer aux differens effets de la chaleur & du froid qui allongent & raccourciſſent alternativement le Pendule; ce qui rend ſes vibrations inégales. Il parvint à détruire ces inégalités par le moyen d'un chaſſis compoſé d'acier & de cuivre, ſemblable à peu près à un gril, de manière que la contraction & la dilatation inégale de ces deux métaux conſervoit toujours au centre de gravité du Pendule la même diſtance au point de ſuſpenſion. Ce chaſſis lui ſervoit de Pendule. Après un grand nombre d'expériences, il le rendit ſi parfait, qu'ayant placé en 1726 deux horloges ſemblables en différens endroits de ſa maiſon, elles ne varierent que d'une ſeconde dans un mois; & les ayant enſuite réglées ſur une étoile fixe, elles ne varierent en dix ans que d'une minute.

Il s'apperçut bientôt que pour rendre ſes découvertes utiles à la Mer, il ne falloit pas que ſon premier moteur fut un

poid, mais un ressort, & que son régulateur devoit être un balancier & non un Pendule. Il employa deux balanciers placés dans le même plan, & il donna à leurs vibrations des directions contraires, afin que si quelque secousse du Navire dérangeoit un des deux balanciers, la même secousse fut favorable à l'autre.

Comme l'uniformité des vibrations dans les Montres dépend beaucoup du ressort spiral, M^r^. *Harrison* s'est procuré cette égalité par quatre ressorts cylindriques de même force, qu'il a placés au-dessus & au-dessous des extrémités de chaque balancier.

On sçait que plus le ressort qui fait agir les balanciers est fort, & plus les vibrations sont promptes, & au contraire. D'où il suit que le froid augmentant la force des ressorts, comme la chaleur les affoiblit, il faut nécessairement que les Montres avancent ou retardent à proportion. Il remédia à cet inconvénient par le moyen d'un chassis composé d'acier & de cuivre, comme le Pendule dont nous avons parlé. Les dilatations inégales du fer & de l'acier conservoient aux ressorts la même force.

Il appliqua des palettes au balancier à peu près comme au Pendule, & il détermina autant qu'il étoit possible tous les frottemens. On montoit la Montre une fois le jour, & par un autre ressort on conservoit aux roues leur mouvement dans cet intervalle. Tout cet assemblage étoit suspendu dans le gout des compas de variation, mais avec beaucoup plus d'art.

Lorsque M. *Harrison* eut achevé cette Montre, il en fit l'essai dans un grand bâteau sur une riviere par un tems orageux. Le succès surpassa ses espérances. Il la transporta sur un Vaisseau jusqu'à Lisbonne, & de Lisbonne en Angleterre, & à l'entrée de la Manche elle donna exactement la différence entre le Méridien de Lisbonne & celui du Navire, tandis que l'estime s'en écartoit d'un degré & demi.

C'est sur le certificat qui lui en fut délivré, qu'il s'adressa aux Commissaires des longitudes, pour leur pro-

poser le projet qu'il avoit de construire une autre Montre plus petite que la première, aussi parfaite & moins embarrassante dans un Vaisseau. Il en fit une qu'il réduisit à la moitié de l'espace de la première. Il en a fait ensuite une troisième qui n'occupoit que quatre pieds quarrés. Ces deux dernières se sont trouvées plus parfaites que les premières, y ayant diminué le nombre des roues dont la multiplicité nuit à l'exactitude de leur marche. Il n'y a que deux roues dans l'une, & seulement une dans l'autre pour ce qui concerne la mesure uniforme du tems; les roues n'y sont emploiées que pour développer les ressorts, & par conséquent leurs frottemens ne nuisent point à l'égalité des vibrations.

En 1735 il obtint un certificat de tout ce que nous venons de rapporter, signé par MM. *Halley*, *Smith*, *Bradley*, *Machin* & *Graham*; c'étoient les principaux membres de la Société Royale. Ils déciderent que les principes de ces machines promettoient un grand degré d'exactitude.

En 1737 les Commissaires des longitudes l'exhorterent à poursuivre son entreprise, & lui donnerent une somme d'argent pour l'encourager & l'aider.

En 1739 M^r^. *Harrison* produisit sa seconde machine. On en fit diverses expériences, dont le résultat fut qu'elle étoit assez regulière & assez exacte, pour faire espérer qu'elle donneroit la longitude du Navire dans les limites de l'Acte du Parlement.

Ce succès encouragea M^r^. *Harrison*, & lui fit entreprendre une autre machine plus parfaite. Il la produisit en Janvier 1741, & douze membres de la Société Royale attesterent que cette 3^e^ machine étoit plus commode, plus simple que les deux premières, moins sujette à se déranger, & qu'elle pouvoit servir de modéle aux ouvriers pour en faire de semblables, ensorte que les Navires pourroient s'en procurer à un prix modique. » Notre avis donc, » ajoutent-ils, est que ces machines seront d'un excellent » usage, tant pour déterminer la longitude à la Mer,

» que pour corriger les cartes & la position des côtes;
» & nous ne sçaurions trop recommander M. *Harrison*
» aux Commissaires des longitudes, comme un homme
» qui mérite toute sorte d'encouragemens & de secours,
» pour l'aider à mettre la dernière main à cette troisième
» machine ».

Ce certificat fut signé par M. *Folkes* qui étoit alors Président de la Société Royale, par le Comte de *Maccles-Field* qui l'est aujourd'hui, par le D^r^. *Smith*, le D^r^. *Bradley*, le Professeur *Calson*, MM. *George Graham* & *Guillaume Jones*, les D^rs^. *Halley* & *Jurin*, le Lord *Charles Cavendish*, MM. *de Moivre* & *Jean Hedley*, le 16 Janvier 1742.

En 1749 sur l'exposé de M. *Folkes*, dont on a vu ci-devant l'extrait, la Société Royale accorda à M^r^. *Harrison* une Médaille d'or, destinée à récompenser annuellement les plus belles découvertes.

En 1758 M^r^. *Harrison* mit la dernière main à sa troisième machine, & en imagina une quatrième. Mais étant bien persuadé que la troisième étoit assez exacte pour mériter la plus haute récompense selon l'acte de la Reine Anne, il présenta un Mémoire aux Commissaires des longitudes, pour qu'il fut ordonné de faire l'essai de cet Instrument dans un voyage aux Isles Occidentales, conformément à l'acte du Parlement. Le 12 Mars 1761 il reçut ordre des Commissanres d'embarquer son fils *Guillaume* à *Portsmouth* avec la 3^e^ machine, sur le Vaisseau du Roi le *Dorsetshire*, Capitaine *Jean Campell*, qui devoit faire voile pour la *Jamaïque*. Mais ce Vaisseau ayant eu une autre distination, M. *Guillaume Harrison* après cinq mois de séjour à *Portsmouth*, revint à *Londres*.

Dans cet intervalle M^r^. *Harrison* présenta un nouveau Mémoire aux Commissnires des longitudes, ce qui détermina ces Messieurs à demander l'avis de la Société Royale sur les mesures qu'il y avoit à prendre pour faire l'expérience de l'Instrument de M. *Harrison*. On délibera sur cette affaire dans les assemblées du 25 Juin & du 3 Juillet 1761, & l'on envoia le plan suivant aux Lords de l'Amirauté.

[1°. Il faut qu'on observe le tems vrai à *Portsmouth*, qu'on régle la Montre de M. *Harrison* sur ce tems vrai, & qu'on envoye aux Lords de l'Amirauté le détail exact de cette observation. Mr. *Robertson*, Maître de l'Académie Royale à *Portsmouth* peut être chargé de cette opération.

2°. Il est à propos de nommer des témoins qui accompagnent M. *Harrison* & qui soient présens toutes le fois qu'ils visitera sa Montre. Quelques Officiers du Vaisseau suffisent pour cette fonction.

3°. Il faut embarquer pour la *Jamaïque* avec M. *Harrison*, un Observateur qui soit en état de prendre exactement le tems vrai, dès qu'on sera arrivé à la *Jamaïque*, & qui marque le tems de la Montre. Cette observation doit être scellée & attestée, pour être envoyée aux Lords de l'Amirauté.

4°. Les Astronomes qu'on enverra à la *Jamaïque*, doivent y rester pour observer les Eclipses des Satellites de Jupiter, & pour déterminer par ce moyen la différence des longitudes, pendant qu'un autre Astronome fera des observations correspondantes à *Portsmouth* sur les mêmes Satellites. Il faudra aussi sceller ces observations, & les envoyer aux Lords de l'Amirauté. Mr. *Bliss*, Professeur à *Oxford* veut bien se charger de cette opération à *Portsmouth*. La Société en proposera incessamment un ou deux autres pour la *Jamaïque*.

Enfin on doit recommander au Bureau des longitudes, de faire ensorte que les Instrumens dont on se servira à *Portsmouth* & à la *Jamaïque*, soient de même force & de même longueur focale.

Ces Instrumens sont celui des hauteurs égales, un télescope de réflexion de deux pieds de foïer, & une Pendule astronomique.. On demande aussi qu'on marque dans un regître au moins une fois le Jour, les tems respectifs de la Pendule & de la Montre.]

Il est hors de doute que si ce plan avoit été communiqué à M. *Harrison*, il n'auroit pas approuvé l'observa-

tion

tion des Satellites du Jupiter ; parce qu'il est prouvé par les observations des plus habiles Astronomes, qu'en observant les éclipses correspondantes du premier Satellite, on y a trouvé une erreur de plus de deux minutes de tems, qui valent plus d'un demi-degré, au lieu que pour le 1er prix des longitudes auquel Mr. *Harrison* prétend, il faut que sa Montre n'expose pas à une erreur d'un demi-degré. Si l'on observoit dans les deux endroits le même Satellite à la même hauteur, avec des Instrumens égaux & par un tems également serein ; il n'y auroit point d'erreur. Mais toutes ces circonstances sont difficiles à réunir dans des climats aussi éloignés.

Le 4e Instrument étant achevé, Mr. *Harrison* écrivit le 3 Octobre 1761 aux Commissaires des longitudes, pour les prier de faire embarquer son fils avec cette Montre sur le Vaisseau qui devoit conduire à la *Jamaïque* le Gouverneur *Litteltοn*, & de prendre toutes les précautions nécessaires pour constater le succès de la découverte. Il demanda les mêmes précautions pour son retour de la *Jamaïque* à *Portsmouth*. Par ce moyen on auroit une double preuve de la bonté de l'Instrument, quoique l'Acte du Parlement n'exige qu'un seul voyage aux Indes Occid.

Le 14 d'Octobre 1761 M. *Harrison* reçut du Secrétaire de l'Amirauté les instructions des Commissaires. Il n'y étoit point question des Satellites de Jupiter, peut-être à cause des raisons ci-dessus alleguées, ou bien parce que la saison n'étoit pas propre à ces observations, ou enfin parce que la longitude de la *Jamaïque* avoit été exactement déterminée par l'observation du passage de Mercure sur le Soleil en 1743.

Au mois de Novembre 1761, M. *Harrison* le fils s'embarqua à *Portsmouth* sur le *Deptford*, Capitaine *Digges*. Les Commissaires des longitudes lui donnerent les instructions suivantes.

[1.° La Montre sera fermée sous quatre serrures différentes. M. *Harrison* aura la clef de l'une de ces serrures, le Gouverneur *Litteltοn* aura la clef d'une autre, le Ca-

pitaine du *Deptford* aura celle de la 3e & le premier Lieutenant celle de la 4e.

2. Avant le départ Mr. *Robertson* Maître de l'Académie Royale à *Portsmouth* sera chargé de régler la Montre au tems vrai de ce port, & d'en envoyer une information exacte bien scellée aux Lords de l'Amirauté. Cette observation des hauteurs égales sera faite en présence du Commissaire *Hugues*, du Capitaine du *Deptford* & de M. *Harrison* le fils.]

Par les hauteurs égales prises à *Portsmouth* le 28 Octobre 1761 on trouva que la Montre avançoit sur le tems moyen de 0h 3′ 21″

Car les hauteurs égales donnerent ce jour-là à midi	11h	47′	2″
Ajoutant l'équation pour la déclinaison	0	0	19
On a le midi vrai ou apparent	11	47	21
Ajoutant l'équation du tems	0	16	0
On a le midi tems moyen	12	3	21

On trouva par les hauteurs égales le 6 Novembre que la Montre avançoit sur le tems moyen de 0h 2′ 57″

Car ce jour-là les hauteurs égales donnerent à midi	11h	46′	37″
Ajoutant l'équation pour la déclinaison	0	0	17
On trouve le midi vrai	11	46	54
Ajoutant l'équation du tems	0	16	3
On a le midi moyen	12	2	57

Il suit de-là que la Montre dans 9 jours a retardé de 24 secondes, c'est-à-dire, de 2″,66 par jour.

Le 7 Novembre on la retarda de 3 minutes en présence du Commissaire *Hugues* & de plusieurs autres; de sorte que le 6 elle se trouva retarder à *Portsmouth* sur le tems moyen de 3″.

Le 18 Novembre 1761 le Vaisseau partit de *Portsmouth*. Le 6 Décembre selon la Montre on étoit à 15° 19′ Ouest de *Portsmouth*, tandisque l'estime de premier Pilote ne donnoit que 13° 50′. Ainsi la différence étoit presque d'un degré & demi; & l'estime de plusieurs autres les portoit presque aussi loin à l'Est de la Montre que celle du

premier Pilote, de ſorte que la plûpart opinerent que la Montre ne valoit rien. Car, diſoient-ils, ſi la Montre de M. *Harriſon* avoit porté à l'Eſt, cela auroit eu quelque apparence de vrai, puiſque dans ces Mers le Vaiſſeau de guerre *Litllefield* avoit autant dérivé à l'Eſt, auſſi bien que pluſieurs autres Vaiſſeaux; au lieu qu'il n'y avoit aucun exemple d'un Navire qui eut autant dérivé à l'Oueſt, que l'auroit fait le *Deptford* ſelon la Montre.

Le 8 Décembre le *Deptford* ſe trouva par obſervation à 35° 17′ de latitude Nord, & par la Montre à 15° 17′ Oueſt de *Portſmouth*, tandiſque l'eſtime ne donnoit que 1 ° ½ Oueſt de *Portſmouth*, & les Pilotes comptoient ſi fort ſur leur eſtime, qu'ils furent d'avis de mettre le Cap un peu plus à l'Oueſt, n'ayant plus de biere, & craignant de perdre du tems.

Mais le Capitaine ne voulut point changer de route, quoiqu'il eut parié cinq contre un que les trois derniers jours on avoit trop porté à l'Eſt. Il remit au lendemain matin à changer de route, parce que M. *Harriſon* aſſuroit que ſi l'Iſle de *Porto-Santo* étoit bien placée ſur la Carte, on la reconnoitroit le lendemain. Effectivement le lendemain matin à ſept heures on découvrit cette Iſle; ſur quoi le Capitaine & tout l'équipage firent de grands remercimens à M. *Harriſon*, vû que ſans le ſecours de ſa Montre, ils auroient été à l'Oueſt de *Madere* dans le tems qu'ils s'en croyoient à l'Eſt, & qu'ils auroient manqué cette Iſle où ils comptoient trouver de la biere.

Le *Beaver*, Vaiſſeau du Roi d'Angleterre, avoit fait voile de *Portſmouth* dix jours avant le *Deptford* pour l'Iſle de *Madere*; il avoit pluſieurs Lettres pour donner ordre aux Marchands de cette Iſle de préparer les Marchandiſes dont le Gouverneur *Litteltori* pouvoit avoir beſoin. Le *Deptford* arriva à *Madere* trois jours avant le *Beaver*. Si celui-ci avoit connu ſa longitude auſſi bien que le *Deptford*, il y ſeroit arrivé quinze jours avant le *Deptford*, & par l'eſtime des Pilotes il étoit beaucoup à l'Eſt de *Porto-Santo*, tandiſque réellement il en étoit un peu à l'Oueſt. Il porta

2. Le cosinus de la ½ somme des côtés		Compl. arithm.	0.432731
: Au cosinus de leur ½ différence			9.968295
: : La cotang. de ½ ZPA			0.382776
: A la tang. de la ½ somme des angles	80° 39′ 28″		0.783802
— la ½ différence	43 45 19		
L'angle de position A =	36 54 9		

3. Le cosinus de la déclinaison	0° 2′ 20″	Comp. ar.	0.000000
: A la cotang. de l'angle A	36 54 9		0.124424
: : La variation de la déclinaison 176″			2.245513
: A la correction 234″ 389‴ = 3′ 54″ ½			2,369937

Et en tems 15″ 37‴, qu'il faut ajouter à 12 heures, parce que le Soleil étoit dans les signes descendans.

La correction que donne Mr. *de Maupertuis* d'après Mr. *Euler* peut s'exprimer en cette manière : le petit arc de l'Equateur qu'il faut ajouter ou soustraire, est égal au produit du petit arc du cercle de déclinaison (ou de la variation) par la différence de deux quantités, qui sont la tangente de la latitude divisée par le sinus de l'angle horaire, & la tangente de la déclinaison divisée par la tangente de l'angle. Ainsi dans le 1er Exemple nous avons.

Tang. de la latitude 50°	0.0761865		
— sin. de l'angle horaire 38° 48′	9.7969930	*Nombres naturels.*	
Logar. de la 1e partie	0.2791935	1e Partie =	1,9019253
		2d Partie =	0,4569261
Tang. de la décl. 20° 10′ 20″	9.5651132	Somme =	2,3588514
— tang. de l'angle hor. 38° 48′ 0″	9.9052672		
Logar. de la 2e partie	9.6598460		
Logar. de la somme des 2 parties	0.3727005		
Logar. de la variation 81″,5	1.9111577		
Logar. de la correction	2.2838582	la même que ci-devant.	

On a pris la somme, au lieu de la différence des deux parties, parce que la déclinaison est Méridionale.

PROBLEME XII.

Trouver par obſervation l'angle de poſition A ? (Fig. 23). Fig. 23.

OBſervez le tems que le Soleil emploie à monter ou à deſcendre de tout ſon diamètre, & par le 2d Art. de la 3e Regle, l'intervalle du tems, qui eſt la variation de l'angle P, eſt au diamètre du Soleil, qui eſt la variation de ZA, comme le quarré du rayon, eſt au produit du ſinus de AP par le ſinus de l'angle A. Donc en renverſant cette analogie, on dira ; comme le produit du coſinus de la déclinaiſon par le tems obſervé réduit en degrés, eſt au quarré du rayon, ainſi le Diamètre du Soleil eſt au ſinus de l'angle de poſition.

Cette méthode ne ſuppoſe ni la hauteur du Pole, ni l'heure de l'obſervation, ni même la hauteur du Soleil. Mr. l'Abbé *de la Caille* nous aſſure dans les Mémoires de l'Academie de 1741, qu'il l'a verifiée par un très-grand nombre d'obſervations qu'il a faites en différens endroits du Royaume & qu'il a calculées de deux manières différentes. A peine, dit-il, ai-je trouvé une demi-ſeconde de différence.

PROBLEME XIII.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales, lorſqu'on a navigué Eſt-Oueſt, *ſans changer de latitude.*

SOit (Fig. 53) P le Pole du monde, Z le zénith du Fig. 53. Navire au moment de la 1e obſervation, Z'' au moment de la 2e, les diſtances du Zénith au pole ayant été toujours égales, puiſqu'on n'a pas changé de latitude ; il eſt évident que le Méridien PZ' déterminé par l'obſervation de deux hauteurs égales, coupera l'angle horaire ZPZ'' correſpondant au chemin du Navire, en deux parties égales, ayant égard à la petite correction du Probl. XI. Mais

PROBLEME IV.

La déclinaison d'un Astre & la latitude du lieu ètant données, trouver la hauteur de l'Astre la plus propre à determiner son angle horaire ?

PAr l'Art. 2 de la 3^e^ Regle, la variation de l'angle horaire est à celle de la hauteur de l'Astre, comme le quarré du rayon est au produit du cosinus de la latitude par le sinus de l'angle azimuthal, ou au produit du cosinus de la déclinaison par le sinus de l'angle de position. Car ces deux produits sont égaux.

Donc l'erreur de l'angle horaire sera d'autant plus petite, que le sinus de l'angle azimuthal sera plus grand ; & comme le plus grand sinus est celui de 90.°, la moindre erreur de l'angle horaire sera celle d'un Astre dont on aura observé la hauteur dans le premier vertical, quelleque soit cette hauteur, grande ou petite.

Sous l'équateur, où la latitude est zero, & son complément 90°, si l'on se trompe d'une minute en observant la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'erreur de l'angle horaire ne sera que de 4″ de tems, ou d'une minute de degré ; parce que les deux variations sont égales : dans la latitude de 45°, l'erreur de $5''\frac{2}{3}$ de tems : dans celle de 50° elle sera de $6''\frac{2}{3}$, & dàns celle de 55° de $6''\frac{37}{38}$.

De même, lorsque l'angle de position est droit, la moindre erreur de l'angle horaire sera celle de l'Astre observé dans cette position.

PROBLEME V.

La déclinaiſon & la latitude étant dsnnéés, trouver la hauteur la plus ſavorable pour déterminer l'Azimuth?

PAr l'Art. 3 de la 3e Regle, la variation de l'angle azimuthal eſt à celle de la hauteur, comme la cotangente de l'angle de poſition eſt au coſinus de la hauteur.

Donc la moindre erreur de l'azimuth qui réſulte de la hauteur d'un Aſtre, eſt lorſque l'angle de poſition eſt de 90°. Or par le 1er Cas des triangles rectangles, l'angle A (Fig. 23) étant droit, le coſinus de PA, ſinus de la déclinaiſon, eſt au rayon, comme le coſinus de ZP, ſinus de la latitude, eſt au coſinus de ZA, ſinus de la hauteur de de l'Aſtre. Fig. 23.

Pluſieurs Aureurs ont démontré cette analogie par le calcul différentiel, en obſervant que tous les Aſtres, qui dans leur mouvement diurne paſſent entre le pole & le zénith, ont avant & après leur paſſage par le Méridien, une petite portion de leur parallèle qui ſe confond avec l'azimuth, leur cours étant alors perpendiculaire à l'horiſon ; ce qui fait qu'ils montent ou deſcendent, ſans changer ſenſiblement d'azimuth, & que par conſéquent on peut s'y tromper dans l'obſervation de la hauteur, ſans que l'erreur influe ſur la détermination de l'azimuth.

Il eſt évident que l'angle azimuthal qui répond à chaque partie du cercle que l'Aſtre décrit, doit croitre juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à cette partie qui eſt commune au parallèle & à l'azimuth, & que cet angle décroit auſſi-tôt après. Il faut douc chercher le plus grand angle azimuthal. C'eſt ce qu'à fait M. de Maupertuis dans le Probl. X. de l'*Aſtronomie Nautique*. Nous trouvons la même choſe ſans ce grand appareil de calcul. Car l'angle A de poſition (fig. 49) étant droit, l'arc du parallèle Fig. 49

ſe confond avec le vertical ZA. On doit donc trouver la diſtance d'un Aſtre au Zénith, ou ſa hauteur, & le plus grand angle Z par le 1^{er} Cas des triangles rectangles.

Quant aux Aſtres qui ne paſſent pas entre le Zénith & le pole, le plus grand angle de poſition eſt celui du 1^{er} vertical avec le cercle de déclinaiſon. Car le ſinus de l'angle A, eſt au ſinus de ZP, comme le ſinus de l'angle Z eſt au ſinns de AP. Done ZP & AP étant conſtans & invariables, le ſinus de l'angle A eſt le plus grand de tous, lorſque celui de l'angle Z eſt égal au rayon. Donc il faut obſetver ces Aſtres dans le premier vertical, pour avoir la moindre erreur dans l'azimuth.

Exemple.

La latitude étant 51° 32′ Nord, la déclinaiſon du Soleil 19° 39′ 10″ Nord, nous avons trouvé ſa hauteur dans le 1^{er} vertical 25° 26′ 20″, & l'angle de poſition 41° 20′ 27″. On demande l'erreur de l'azimuth, qui réſulteroit de l'erreur de 2′ dans l'obſervation de la hauteur ?

Le coſinus de la hauteur	25° 26′ 20″	Comp. ar. 0.044291
: A la cotang. de l'angle de poſition A	41 20 27	0.055623
:: L'erreur de la hauteur 2′		0.301030
: A l'erreur de l'angle azimuthal 2′ ½		0.400944

PROBLEME VI.

La réfraction horiſontale étant donnée, trouver combien elle affecte l'amplitude d'un Aſtre, & le tems de ſon lever & de ſon coucher apparens ?

LA variation de la hauteur qui eſt ici la réfraction horiſontale, eſt à la variation de l'amplitude ou de l'azimuth, comme le rayon, qui eſt le coſinus de la hauteur apparente, eſt à la cotangente de l'angle de poſition. C'eſt la Regle inverſe du Probléme précédent.

Fig. 23. Par le 2^{d} Art. de la 3^{e} Regle, la variation de l'angle ho-

raire eſt à la réfraction horiſontale, comme le quarré du rayon eſt au produit du coſinus de la latitude par le ſinus de l'angle azimuthal, ou par le coſinus de l'amplitude.

Exemple.

La réfraction horiſontale étant de 32′, la latitude Nord 43° 18′, la déclinaiſon Sud 19° 39′ 10″, le Soleil a paru ſe coucher à 4ʰ 44′ 38″ & ſon amplitude apparente a été 26° 57′ 36″. On demande la vraie amplitude & le vrai tems de ſon coucher?

Le produit du coſ. de la lat.	43° 18′ 0″	Comp. ar.	0.138004
Par le coſ. de l'amplitude obſervée	26 57 36	Comp. ar.	0.049965
: Au quarré du rayon : : la réfraction horiſontale	32′		1.505150
: A la variation de l'angle horaire 49′, 33 = 49′ 20″			1.693119

Le tems apparent du coucher étoit en degrés 71° 9′ 30″. D'où il faut retrancher la variation, parce que le Soleil étoit couché alors, & on aura 70° 20′ 10″, & en tems 4ʰ 41′ 20″ $\frac{2}{3}$.

Pour trouver l'amplitude vraie, je cherche d'abord l'angle de poſition, en diſant :

Le ſin. de ZA (*fig.* 23)	90° 32′ 0″	Compl. arithm.	0.000019
: Au ſinus de ZPA	71 9 30		9.976081
: : Le ſinus de ZP	46 42 0		9.861996
: Au ſinus de l'angle A	43 32 8		9.838096

Enſuite, le rayon : à la cotang. de l'angle A	0.022210
: : La réfraction horiſontale 32′	1.505150
: A la variation de l'amplitude 33′,679 = 33′ 41″	1.527360

Corollaire.

Si l'on connoit par une horloge bien reglée le tems du coucher apparent du Soleil, & par le calcul ordinaire le tems du vrai coucher, la différence des tems donnera la réfraction horiſontale, en faiſant : comme le quarré du rayon eſt au produit du coſinus de la latitude par le co-

ſinus de l'amplitude, ainſi la différence des tems eſt à la réfraction horiſontale.

PROBLEME VII.

La précession des Equinoxes etant donnée, avec la déclinaiſon actuelle d'un Aſtre & ſon aſcenſion droite, trouver la variation de ſa déclinaiſon & de ſon aſcenſion droite ?

Fig. 50 SOit (fig. 50) P le pole du Monde, Π le pole de l'Ecliptique, A l'aſtre ; PΠ ſera une portion du colure des Solſtices égale à 23° 28′ 20″, qui eſt l'obliquité de l'écliptique. PA ſera le complément de la déclinaiſon de l'Aſtre ; l'angle APΠ ſera ſon aſcenſion droite depuis le colure des Solſtices, & PΠA ſa longitude depuis le même colure. La préceſſion des Equinoxes n'eſt autre choſe que l'angle Π, qui croit toutes les années de l'Oueſt à *l'Eſt* de 50″, parce que l'Equinoxe recule d'autant. Or par le 2d Article de la 3e Regle, la variation de l'angle Π, ou la préceſſion des Equinoxes dans un tems donné, eſt à la variation de PA, ou de la déclinaiſon, comme le quarré du rayon eſt au produit du ſinus de PΠ, 23° 28′ 20″, par le ſinus de l'aſcenſion droite APΠ.

Exemple.

L'aſcenſion droite P de l'étoile polaire étoit au commencement de 1760, de 11° 6′ 4″ depuis le colure des Equinoxes, & de 78° 53′ 56″ depuis le colure PΠ des Solſtices, l'une étant complément de l'autre. Sa déclinaiſon étoit alors de 88° 1′ 19″. On demande ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon pour le commencement de 1764?

1°. Pour trouver ſa déclinaiſon, qui va toutes les années en croiſſant, on dira :

Comme le quarré du rayon est au produit du sin. de	23° 28′ 20″	9.600215
Par le sinus de l'ascension droite P	78 53 56	9.991797
Ainsi la précession des Equinoxes dans 4 ans, 200″		2.301030
Est à la variation de la décl. dans le même tems, 78″, 17 = 1′ 18″		1.893042
Ce qui étant ajouté à la déclin. pour 1760	88° 1 19	
Donne la déclinaison pour 1764	88 2 37	
& la distance au Pole	1 57 23	

2°. Pour trouver l'ascension, il faudroit employer le 1^er^ article de la 3^e^ Regle, qui suppose la connoissance de l'angle de position A. Mais il est plus court de chercher immédiatement l'angle P, par le 1^er^ Cas des triangles obliquangles, puisqu'on a maintenant les trois côtés du triangle APΠ.

AP =	1° 57′ 23″	Distance de l'Etoile au Pole
AΠ =	23 55 39	Compl. de la latitude constante de l'Etoile.
PΠ =	23 28 20	Distance des deux poles P A Π
Somme =	49 21 22	
½ somme =	24 40 41	

— AP =	1 57 23	Compl. ar. du sinus de AP	1.466752
1^er^ reste =	22 43 18	Sinus du 1^er^ reste	9.586874
— PΠ =	23 28 20	Compl. arithm. du sinus de PΠ	0,399785
2^d^ reste =	1 12 21	Sinus du 2^d^ reste	8.323132
		Somme	9.776543
½ somme, sin de la moitié de APΠ, 50° 38′ 20″			9.888271
APΠ =	101 16 40	depuis le colure des Solst.	
Ascension droite =	11 16 40	depuis le colure des Equin.	

PROBLEME VIII.

Réduire les distances apparentes des Etoiles à la Lune, à leurs distances véritables, & réciproquement.

SOit (fig. 51) L la Lune, E l'étoile, Z le zénith, EL la distance apparente de l'étoile à la Lune, *el* leur vraie distance qui abaisse l'étoile au-dessous de son lieu apparent E, & éléve la Lune en corrigeant la parallaxe Fig. 51.

toujours plus grande que la réfraction. Les véritables distances au Zénith seront Z*e*, & Z*l*. L'arc E*e* sera la réfraction de l'étoile qui la fait monter en E ; & l'arc L*l* sera la parallaxe moins la réfraction de la Lune, qui la fait descendre en L.

L'angle Z n'étant affecté ni par la réfraction ni par la parallaxe & restant invariable, M[r]. l'Abbé de la *Caille* emploie le 1[er] Article de la 1[e] Regle des variations, pour trouver la vr[a]ie distance *e l* de l'Etoile à la Lune. Mais comme cette méthode suppose le calcul des angles E & L ; il vaut mieux ne calculer que l'angle Z, dans le triangle ELZ, par les trois distances apparentes EZ, LZ, EL ; ce qui donnera le triangle E*l e*, où l'on a *e*Z par la réfraction, Z *l* par la parallaxe moins la réfraction de la Lune, & l'angle compris Z. On aura donc par le 3[e] Cas des obliquangles, la vraie distance *e l*.

Exemple.

La distance apparente EL d'une Etoile à la Lune a été trouvée de 8° avec un Octant ; la hauteur du centre de la Lune étoit en même tems de 5°, sa parallaxe de 54′ & sa réfraction de 9′ ; la hauteur de l'Etoile de 11° & sa réfraction de 5′. On demande la vraie distance *el* ?

LZ =	85°	Dist. appar. de la Lune au Zénith	
EZ =	79	Dist. appar. de l'Etoile au Zénith	
EL =	8	Dist. appar. de l'Etoile à la Lune	
Somme	172		
½ somme	86		
— LZ =	85	Compl. arithm. du sinus de LZ	0.001656
1[er] reste =	1	Sinus du 1[er] reste	8.241855
— EZ =	79	Compl. arithm. du sinus de EZ	0.008053
2[d] reste =	7	Sinus du 2[d] reste	9.085894
		Somme	7.337458
½ somme, sinus de ½ EZL		2° 40′ 23″	8.668729
Donc angle Z =		5 20 46	

Z*e* =

$Ze = 79° 5'$ vraie distance de l'étoile au Zénith. $Zl = 84° 15'$ vraie dist. de la Lune.

1. Le Rayon est au cos. de l'angle Z	5° 20′ 46″		9.998106
: : La tangente de Zl	84 15 0		0.996993
: : A la tangente d'un arc M	84 13 30		0.995099
	$- Ze = 79$ 5 0		
	N = 5 8 30		
2. Le cosinus de M	84° 13′ 30″	Compl. arith.	0.997307
: Au cosinus de N	5 8 30		9.998248
: : Le cosinus de Zl	84 15 0		9.000816
Au cos. de la vraie dist. el =	7 23 46		9.996371

Réciproquement si la vraie distance el est donnée, les trois côtés du triangle elZ donneront l'angle Z, & l'on trouvera la distance apparenre EL.

PROBLEME IX.

Trouver l'effet de la variation de l'obliquité de l'Ecliptique sur les longitudes, les latitudes les déclinaisons & les ascensions droites des Astres.

L'Observation des ascensions droites & des déclinaisons étant indépendante de l'obliquité de l'Ecliptique, l'angle APπ de l'ascension droite (fig. 50) & le côté PA de la déclinaison seront invariables, pendant que l'obliquité Pπ, l'angle π des longitudes, & le côté πA des latitudes varieront. Donc par l'Art. 1 de la 1ere Regle, on trouvera la variation de la latitude Aπ, en disant : comme le rayon est au cosinus de l'angle π de la longitude, ainsi la variation de l'obliquité Pπ, est à la variation du côté πA, ou de la latitude. Fig. 50.

Et par l'Art. 4 de la même Regle, la cotangente de la latitude, ou la tangente de πA, est au sinus de la longitude π depuis le colure des Solstices, comme la varia-

tion de l'obliquité Pπ est à la variation de l'angle π des longitudes.

PROBLEME X.

La parallaxe verticale d'une Planète étant donnée, trouver sa parallaxe en longitude & en latitude ?

LA *parallaxe* étant la différence entre le lieu vrai d'une Planéte, ou vû du centre de la Terre, & son lieu apparent, où vû de la surface de la Terre; elle altére la longitude, la latitude, la déclinaison, l'ascension droite & la hauteur des Astres. Nous avons expliqué pag. 86. la parallaxe *verticale* ou *de hauteur*. La *parallaxe en longitude* est la différence entre la *longitude vraie* & la *longitude apparente*. Il en est de même de la *parallaxe en latitude*, *en ascension droite*, &c.

Soit (fig. 52) Z le Zénirh, π le pole de l'Ecliptique,
Fig. 52. A la Planéte. L'angle Z & le côté Zπ ne variant point par l'action de la parallaxe, qui abaisse l'Astre A dans le vertical ZA, on aura par le 1^er^ art. de la 1^re^ Regle, le rayon est au cosinus de l'angle de position A, comme la variation de ZA, c'est-à-dire, la parallaxe verticale, est à la variation de πA, ou à la parallaxe de latitude.

Et par le 5^e^ Art. de la même Regle, le sinus de πA, ou le cosinus de la latitude, est au sinus de l'angle A, comme la parallaxe verticale, ou variation de ZA, est à la variation de l'angle π, ou à la parallaxe de longitude.

PROBLEME XI.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales du Soleil, lorsque sa déclinaison a varié dans l'intervalle des deux observations? C'est le Probl. 12 de l'Astron. Naut.

POur déterminer l'instant du midi vrai, on observe après midi des hauteurs du Soleil égales à celles qu'on a observées le matin, en marquant le tems de chaque observations. Si la déclinaison du Soleil n'a pas varié sensiblement dans l'intervalle des observations égales & correspondantes, on partage en deux également cet intervalle, & l'on a le tems marqué par l'horloge au moment du passage du Soleil par le Méridien. On peut par cette méthode trouver exactement le passage des Etoiles par le Méridien, parce que leur déclinaison ne souffre aucune variation sensible dans 24 heures.

La déclinaison du Soleil varie peu dans le tems des Solstices; mais elle varie beaucoup dans les Eqninoxes, & cette variation exige une correction pour le midi. soient (Fig. 23) Z le Zénith, A le Soleil, P le pole, ZPA l'angle horaire pour chaque observation correspondante. Fig. 23.
Par le 3^e^ Art de la 3^e^ Regle, le sinus de PA, ou le cosinus de la déclinaison, est à la cotangente de l'angle de position A, comme la variation de la déclinaison, ou de PA, depuis midi, est à la variation de l'angle horaire ZPA, parce que les côtés ZP & ZA sont invariables.

Dans nos climats, lorsque le Soleil est dans les signes ascendans, c'est-à-dire, lorsqu'il s'approche de notre Zénith, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait, si sa déclinaison n'avoit pas changé; & lorsqu'il est dans les signes descendans, il y arrive plutôt. Le milieu du tems entre les observations correspondantes ne répond pas exactement à midi; & il faut y ajouter la variation lorsque le Soleil s'éloigne Zénith, & la retrancher lorsqu'il s'en approche.

Exemple I.

Le Soleil ayant en Janvier à midi 20° 10′ 20″ de déclinaiſon méridionale, à 50° de latitude Nord, on a obſervé ſa hauteur le matin à 9^h 28′ 17″, & le ſoir il eſt revenu à la même hauteur à 2^h 38′ 41″. On demande le tems de l'horloge au moment de ſon paſſage par le Méridien?

Ajoutez à	9^h 28′ 17″
2^h, ou plutôt	14 38 41
Somme	24 6 58

La ½ ſomme 12^h 3′ 29″ ſeroit le tems que l'horloge marquoit au moment de midi, ſi la déclinaiſon du Soleil n'avoit pas varié dans l'intervalle des deux obſervations. Mais on trouve par les Tables, que la différence des déclinaiſons étoit dans cet intervalle, de 2′ 43″ & par conſéquent la demi-différence, ou la variation croiſſante depuis midi 1′ 21″½, ou 81″½. & le demi-intervalle 2^h 35′ 12″ en tems, ou 38° 48′ 0″ en degrés.

Pour corriger cette obſervation, il nous faut d'abord trouver l'angle de poſition A du triangle ZPA, dans lequel nous avons deux côtés & l'angle horaire = 38° 48′ 0″.
½ ZPA = 19 24 0.

PA =	110° 10′ 20″
PZ =	40 0 0
Somme	150 10 20
Differ.	70 10 20
½ ſomme	75 5 10
½ differ.	35 5 10

1. Le ſinus de la ½ ſomme	Compl. arithm.	0.014882
: Au ſinus de la ½ differ.		9.759522
:: La cotang. de ½ ZPA		0.453265
: A la tang. de la ½ differ. des angles 59° 22′ 26″		0.227669

2. Le cos. de la ½ somme des côtés		Compl. arithm.	0.589447
: Au cos. de leur ½ differ.			9.912907
: : La cotang. de ½ ZPA			0.453265
: A la tang. de la ½ somme des angles	83° 40′ 47″		0.955619
— la demi-differ.	59 22 26		
Le moindre angle A =	24 18 21		

3. Le cosinus de la déclinaison	20° 10′ 20″	Compl. ar.	0.027492
: A la cot. de l'angle de position A	24 18 21		0.345208
: : La variation de la déclinaison	81″,5		1.911158
: A la correct. cherchée 192″,24 = 3′ 12″¼, & en tems 12″49‴			2.283858

Il faut la soustraire du midi trouvé 12ʰ 3′ 29″ 0‴, parce que le Soleil est dans les signes ascendans, & l'on aura le vrai midi à 12 3′ 16″ en négligeant quelques tierces.

Exemple 2.

La première observation a été faite le 22 Septembre à 9 heures du matin, & la seconde à 3 heures du soir à des hauteurs égales ; la latitude Nord étant 43° 17′ 40″, & la déclinaison du Soleil à midi 0° 2′ 20″ Nord. On demandoit le tems que marquoit l'horloge à midi.

L'intervalle des observations est ici de 6 heures, & le demi-intervalle de 3^h qui valent 45°. S'il n'y avoit point eu de variation dans la déclinaison du Soleil, l'horloge auroit marqué 12 heures à midi. Mais dans le demi-intervalle de 3 heures, la variation de la déclinaison étoit ce jour-là de 2′ 56″ = 176″.

PA =	89° 57′ 40″	Compl. de la déclin. Nord.
PZ =	46 42 20	Compl. de la latitude Nord.
Somme	136 40 0	Angle horaire ZPA = 45°
Differ.	43 15 20	½ ZPA = 22 30′
½ somme	68 20 0	
½ differ.	21 37 40	

1. Le sinus de la ½ somme des côtés	68° 20′ 0″	Comp. ar.	0.031822
: Au sinus de leur ½ différence	21 37 40		9.566526
: : La cotang. de ½ ZPA	22 30 0		0.382776
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43 45 19		9.981124

2. Le cosinus de la ½ somme des côtés		Compl. àrithm.	0.432731
: Au cosinus de leur ½ différence			9.968295
: : La cotang. de ½ ZPA			0.382776
: A la tang. de la ½ somme des angles	80° 39′ 28″		0.783802
— la ½ différence	43 45 19		
L'angle de position A =	36 54 9		

3. Le cosinus de la déclinaison	0° 2′ 20″	Comp.ar.	0.000000
: A la cotang. de l'angle A	36 54 9		0.124424
: : La variation de la déclinaison 176″			2.245513
: A la correction 234″ 389‴ = 3′ 54″ ⅗			2,369937

Et en tems 15″ 37‴, qu'il faut ajouter à 12 heures, parce que le Soleil étoit dans les signes descendans.

La correction que donne Mr. *de Maupertuis* d'après Mr. *Euler* peut s'exprimer en cette manière : le petit arc de l'Equateur qu'il faut ajouter ou soustraire, est égal au produit du petit arc du cercle de déclinaison (ou de la *variation*) par la différence de deux quantités, qui sont *la* tangente de la latitude divisée par le sinus de l'angle horaire, & la tangente de la déclinaison divisée par la tangente de l'angle. Ainsi dans le 1er Exemple nous avons.

Tang. de la latitude 50°	0.0761865	
— sin. de l'angle horaire 38° 48′	9.7969930	*Nombres naturels.*
Logar. de la 1e partie	0.2791935	1e Partie = 1,9019253
Tang. de la décl. 20° 10′ 20″	9.5651132	2d Partie = 0,4569261
— tang. de l'angle hor. 38° 48′ 0″	9.9052672	Somme = 2,3588514
Logar. de la 2e partie	9.6598460	
Logar. de la somme des 2 parties	0.3727005	
Logar. de la variation 81″,5	1.9111577	
Logar. de la correction	2.2838582	la même que ci-devant.

On a pris la somme, au lieu de la différence des deux parties, parce que la déclinaison est Méridionale.

PROBLEME XII.

Trouver par obſervation l'angle de poſition A ? (Fig. 23). Fig. 23.

OBſervez le tems que le Soleil emploie à monter ou à deſcendre de tout ſon diamètre, & par le 2d Art. de la 3e Regle, l'intervalle du tems, qui eſt la variation de l'angle P, eſt au diamètre du Soleil, qui eſt la variation de ZA, comme le quarré du rayon, eſt au produit du ſinus de AP par le ſinus de l'angle A. Donc en renverſant cette analogie, on dira ; comme le produit du coſinus de la déclinaiſon par le tems obſervé réduit en degrés, eſt au quarré du rayon, ainſi le Diamètre du Soleil eſt au ſinus de l'angle de poſition.

Cette méthode ne ſuppoſe ni la hauteur du Pole, ni l'heure de l'obſervation, ni même la hauteur du Soleil. Mr. l'Abbé *de la Caille* nous aſſure dans les Mémoires de l'Academie de 1741, qu'il l'a verifiée par un très-grand nombre d'obſervations qu'il a faites en différens endroits du Royaume & qu'il a calculées de deux manières différentes. A peine, dit-il, ai-je trouvé une demi-ſeconde de différence.

PROBLEME XIII.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales, lorſqu'on a navigué Eſt-Oueſt, *ſans changer de latitude.*

SOit (Fig. 53) P le Pole du monde, Z le zénith du Navire au moment de la 1e obſervation, Z" au moment de la 2e, les diſtances du Zénith au pole ayant été toujours égales, puiſqu'on n'a pas changé de latitude ; il eſt évident que le Méridien PZ' déterminé par l'obſervation de deux hauteurs égales, coupera l'angle horaire ZPZ" correſpondant au chemin du Navire, en deux parties égales, ayant égard à la petite correction du Probl. XI. Mais Fig. 53.

sinus de l'amplitude, ainsi la différence des tems est à la réfraction horisontale.

PROBLEME VII.

La précession des Equinoxes etant donnée, avec la déclinaison actuelle d'un Astre & son ascension droite, trouver la variation de sa déclinaison & de son ascension droite?

Fig. 50 SOit (fig. 50) P le pole du Monde, Π le pole de l'Ecliptique, A l'astre; PΠ sera une portion du colure des Solstices égale à 23° 28′ 20″, qui est l'obliquité de l'écliptique. PA sera le complément de la déclinaison de l'Astre; l'angle APΠ sera son ascension droite depuis le colure des Solstices, & PΠA sa longitude depuis le même colure. La précession des Equinoxes n'est autre chose que l'angle Π, qui croit toutes les années de l'Ouest à l'Est de 50″, parce que l'Equinoxe recule d'autant. Or par le 2d Article de la 3e Regle, la variation de l'angle Π, ou la précession des Equinoxes dans un tems donné, est à la variation de PA, ou de la déclinaison, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de PΠ, 23° 28′ 20″, par le sinus de l'ascension droite APΠ.

Exemple.

L'ascension droite P de l'étoile polaire étoit au commencement de 1760, de 11° 6′ 4″ depuis le colure des Equinoxes, & de 78° 53′ 56″ depuis le colure PΠ des Solstices, l'une étant complément de l'autre. Sa déclinaison étoit alors de 88° 1′ 19″. On demande son ascens[illegible] droite & sa déclinaison pour le commencement d[illegible]

1°. Pour trouver sa déclinaison, qui va to[illegible] en croissant, on dira:

Comme le quarré du rayon est au produit du sin. de	23° 28′ 20″	9.600215
Par le sinus de l'ascension droite P	78 53 56	9.991797
Ainsi la précession des Equinoxes dans 4 ans, 200″		2.301030
Est à la variation de la décl. dans le même tems, 78″,17=1′ 18″		1.893042
Ce qui étant ajouté à la déclin. pour 1760	88° 1 19	
Donne la déclinaison pour 1764	88 2 37	
& la distance au Pole	1 57 23	

2°. Pour trouver l'escension, il faudroit employer le 1^er^ article de la 3^e^ Regle, qui suppose la connoissance de l'angle de position A. Mais il est plus court de chercher immédiatement l'angle P, par le 1^er^ Cas des triangles obliquangles, puisqu'on a maintenant les trois côtés du triangle APΠ.

AP =	1° 57′ 23″	Distance de l'Etoile au Pole	
AΠ =	23 55 39	Compl. de la latitude constante de l'Etoile.	
PΠ =	23 28 20	Distance des deux poles P A Π	
Somme =	49 21 22		
½ somme =	24 40 41		
— AP =	1 57 23	Compl. ar. du sinus de AP	1.466752
1^er^ reste =	22 43 18	Sinus du 1^er^ reste	9.586874
— PΠ =	23 28 20	Compl. arithm. du sinus de PΠ	0,399785
2^d^ reste =	1 12 21	Sinus du 2^d^ reste	8.323132
		Somme	9.776543
½ somme, sin de la moitié de APΠ, 50° 38′ 20″			9.888271

APΠ = 101 16 40 depuis le colure des Solst.
Ascension droit… 16 40 depuis le colure des Equin.

M…

Rédui… la Lune, à … ement.

…e … Z le zénith, Fig. 51.
… Lune, *e l* leur
…us de son lieu
…t la parallaxe

PROBLEME II.

La déclinaiſon étant donnée avec l'angle horaire, trouver à quelle erreur on s'expoſe dans la latitude par l'obſervation de l'angle Azimuthal?

PAr le 4ᵉ Art. de la 1ᵉ Regle, la variation du côté ZP, ou de la latitude, eſt à celle de l'angle azimuthal Z oppoſé au côté conſtant AP, comme la tangente du côté AZ, ou cotangente de la hauteur, eſt au ſinus de l'angle Z.

Ainſi l'heure étant donnée, lorſqu'on veut conclure la latitude par l'angle azimuthal, il faut obſerver l'Aſtre dans le premier vertical, où le ſinus de l'angle Z eſt le plus grand de tous; & l'on dira: comme le ſinus de l'angle azimuthal eſt à la cotangente de la hauteur de l'Aſtre, ainſi l'erreur de l'angle azimuthal eſt à celle de la latitude. Par conſéquent plus la hauteur de l'Aſtre ſera grande dans le premier vertical, plus l'erreur de la latitude conclue par l'angle azimuthal ſera petite.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″ Nord, on a trouvé ſon azimuth à 8ʰ 30′ du matin, de 72° 12′ 54″, & on en a conclu la latitude 51° 32′. On demande quelle eſt l'erreur de la latitude, ſi l'on s'eſt trompé de 10′ dans l'obſervation de l'angle azimuthal?

Comme le ſinus de l'angle azimuthal	72° 12′ 54″ Comp.ar.	0.021268
: A la cotang. de la hauteur calculée	38 18 46	0.102310
: : Ainſi l'erreur de 10 minutes		1.000000
: A l'erreur de la latitude	13′,29 = 13′ 17″	1.123578

On peut vérifier ce calcul, en ſuppoſant l'angle azimuthal plus grand ou plus petit de 10 minutes, & calculant de nouveau la latitude.

PROBLEME III.

La hauteur d'un Aſtre & ſa déclinaiſon étant données, trouver l'angle horaire le plus propre à déterminer ſon azimuth ?

PAr l'Art. 4 de la 3ᵉ Regle, comme la tangente de l'angle horaire eſt à la tangente de l'angle azimuthal, inſi la variation de l'angle horaire eſt à celle de l'angle zimuthal. Donc les Aſtres qui ſe trouvent auprès du cerle de ſix heures ſont les plus propres à cette obſervation, outes choſes égales d'ailleurs; parce que la tangente de angle horaire étant preſque infinie, la variation ou l'ereur de l'angle azimuthal eſt la moindre qui ſe puiſſe.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″, & ſa haueut à 6 heures étant 13° 20′ 8″, on a trouvé ſon azimuth 5° 25′ 50″. Quelle ſera l'erreur de cet azimuth, ſi l'on eſt trompé dans l'angle horaire de 15′ ?

Comme le coſinus de la hauteur	13°	20′	8″	Compl. ar. 0.011871
Au coſinus de la déclinaiſon	19	39	10	9.973935
: Le ſinus de l'angle horaire	90	15	0	9.999996
Au ſinus de l'Azimuth	75	25	49	9.985802

Où l'on voit que 15′ d'erreur dans l'angle horaire n'ont ltéré l'azimuth que d'une ſeconde.

Il y a encore un autre avantage à obſerver les Aſres qui ſont ſous le cercle horaire de ſix heures; c'eſt que 'erreur qu'on peut commettre dans la latitude n'influe oint dans le calcul de l'azimuth, puiſque la latitude, omme on le voit, n'entre point dans ce calcul.

PROBLEME IV.

La déclinaiſon d'un Aſtre & la latitude du lieu ètant données, trouver la hauteur de l'Aſtre la plus propre à determiner ſon angle horaire ?

PAr l'Art. 2 de la 3e Regle, la variation de l'angle horaire eſt à celle de la hauteur de l'Aſtre, comme le quarré du rayon eſt au produit du coſinus de la latitude par le ſinus de l'angle azimuthal, ou au produit du coſinus de la déclinaiſon par le ſinus de l'angle de poſition. Car ces deux produits ſont égaux.

Donc l'erreur de l'angle horaire ſera d'autant plus petite, que le ſinus de l'angle azimuthal ſera plus grand ; & comme le plus grand ſinus eſt celui de 90.°, la moindre erreur de l'angle horaire ſera celle d'un Aſtre dont on aura obſervé la hauteur dans le premier vertical, quelleque ſoit cette hauteur, grande ou petite.

Sous l'équateur, où la latitude eſt zero, & ſon complément 90°, ſi l'on ſe trompe d'une minute en obſervant la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'erreur de l'angle horaire ne ſera que de 4″ de tems, ou d'une minute de degré ; parce que les deux variations ſont égales : dans la latitude de 45°, l'erreur de $5''\frac{2}{3}$ de tems : dans celle de 50° elle ſera de $6''\frac{2}{3}$, & dàns celle de 55° de $6''\frac{37}{38}$.

De même, lorſque l'angle de poſirion eſt droit, *la* moindre erreur de l'angle horaire ſera celle de l'Aſtre obſervé dans cette poſition.

PROBLEME V.

La déclinaison & la latitude étant dsnnées, trouver la hauteur la plus favorable pour déterminer l'Azimuth?

PAr l'Art. 3 de la 3e Regle, la variation de l'angle azimuthal est à celle de la hauteur, comme la cotangente de l'angle de position est au cosinus de la hauteur.

Donc la moindre erreur de l'azimuth qui résulte de la hauteur d'un Astre, est lorsque l'angle de position est de 90°. Or par le 1er Cas des triangles rectangles, l'angle A (Fig.23) étant droit, le cosinus de PA, sinus de la déclinaison, est au rayon, comme le cosinus de ZP, sinus de la latitude, est au cosinus de ZA, sinus de la hauteur de de l'Astre. Fig. 23.

Plusieurs Aureurs ont démontré cette analogie par le calcul différentiel, en observant que tous les Astres, qui dans leur mouvement diurne passent entre le pole & le zénith, ont avant & après leur passage par le Méridien, une petite portion de leur parallèle qui se confond avec l'azimuth, leur cours étant alors perpendiculaire à l'horison ; ce qui fait qu'ils montent ou descendent, sans changer sensiblement d'azimuth, & que par conséquent on peut s'y tromper dans l'observation de la hauteur, sans que l'erreur influe sur la détermination de l'azimuth.

Il est évident que l'angle azimuthal qui répond à chaque partie du cercle que l'Astre décrit, doit croitre jusqu'à ce qu'il soit parvenu à cette partie qui est commune au parallèle & à l'azimuth, & que cet angle décroit aussi-tôt après. Il faut douc chercher le plus grand angle azimuthal. C'est ce qu'à fait M. de Maupertuis dans le Probl. X. de l'*Astronomie Nautique*. Nous trouvons la même chose sans ce grand appareil de calcul. Car l'angle A de position (fig. 49) étant droit, l'arc du parallèle Fig. 49

CHAPITRE V.

Correction des erreurs qui résultent des Observations, dans le calcul des Problèmes Astronomiques, avec la manière de déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.

Fig. 23 LE calcul des Problémes Astronomiques se réduit presque toujours à un triangle sphérique AZP, (fig. 23) où l'on a un côté constant AP que l'on connoît par les Tables. Il en faut excepter le cas où l'on cherche la déclinaison d'un Astre ; le côté AP n'est pas constant alors, mais on a d'autres quantités connues & constantes. On en suppose toujours deux, & l'on fait varier les autres, pour sçavoir à quelle erreur on s'expose par le défaut des Observations. Voici les Regles de ces variations, que M[r]. *Cotes* a démontrées, en les supposant très-petites, & que j'applique à ce triangle.

1[e]. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est invariable, avec l'un des angles adjacents* A *ou* P.

1. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, est à celle du côté opposé à cet angle, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté invariable. Par exemple, si AP & l'angle A sont invariables, la variation du côté AZ, est à celle de ZP, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z. De même, si AP & l'angle P sont invariables, la variation de ZP est à celle de AZ, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z.

2. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle de l'angle opposé à ce côté, comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle cons-

ant. Par exemple, l'angle A & le côté AP étant invaria-
les, la variation de l'autre angle P adjacent au côté
AP, est à celle de l'angle Z opposé au côté AP, com-
ne le rayon est au cosinus du côté PZ opposé à l'angle
onstant A.

3. La variation de l'autre angle adjacent au côté inva-
iable, est à celle du côté opposé à l'angle invariable, com-
ne la tangente de l'angle opposè au côte invariable, est
u sinus du côté opposé à l'angle constant. Ainsi l'angle A
t le côté AP étant constants, la variation de l'autre an-
le P est à celle du côté PZ opposé à l'angle constant,
omme la tangente de l'angle Z est au sinus du côté PZ.

4. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle cons-
ant, est à celle de l'angle opposé au côté invariable;
omme la tangante du côté opposé à l'angle constant est
u sinus de l'angle opposé au côté invariable.

5. La variation de l'autre angle adjacent au côté inva-
iable, est à celle de l'autre côté adjacent à l'angle in-
variable, comme le sinus de l'angle opposé au côté in-
variable, est au sinus du côté opposé à l'angle constant.
Ainsi l'angle A & le côté AP subsistans, la variations,
de l'autre angle P est à celle du côté AZ, comme le
sinus de l'angle Z est au sinus du côté PZ.

6. La variation de l'angle opposé au côté invariable,
est à celle du côté opposé à l'angle invariable, comme
la tangente de cet angle est à la tangente de ce côté. Ainsi
A & AP étant constans, la variation de l'angle Z est à
celle de PZ, comme la tangente de l'angle Z est à la
tangente de PZ.

2^e^. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est variable, avec l'angle* Z *qui lui est opposé.*

1. La variation de l'un des deux autres angles est à
celle du côté opposé à cet angle, comme la tangente de
cet angle est à la tangente de ce côté. Par exemple Z &

2. La tangente de A"ZA'	50° 0' 0"	Comp. ar.	9.923813
: A la tangente de ZA'A"	89 13 28		1.868484
: : Le sinus de M	0 20 24		7.773354
: Au sinus de N	21 34 55		9.565651
ZA' = M + N =	21 55 19		

Triangle ZA'P

Où l'on a PA'Z = 22° 31' 53". ZA' = 21° 55' 19". PA' = 98° 29'.

1. Le rayon : au cosin. de PA'Z	22° 31' 53"	9.965517
: : La tangente de PA'	98 29 0	0.826366
: A la tangente de M *obtus*	99 10 22	0.791883
ZA' =	21 55 19	
Différence N =	77 15 3	

2. Le cosinus de M	99° 10' 22"	Comp. ar.	0.797479
Au cosinus de N	77 15 3		9.343769
: : Le cosinus de PA'	98 29 0		9.168856
: Au sinus de la latitude	11 47 3		9.310104

PROBLEME XLVII.

Les passages de deux Etoiles par le Méridien, par deux verticaux & par deux Almicantaraths inconnus, mais constants, étant donnés ; trouver la déclinaison de ces Etoiles & la hauteur du Pole ?

C'Est le 40e & dernier Probléme de l'Astronomie Naut. Mr. de Maupertuis en fait un très-grand cas. Il en attribue avec raison la solution à Mr. Mayer ; mais il prétend que ce sçavant l'a plutôt indiquée que donnée, & il en substitue une autre déduite de ses formules, qu'il avoue être très compliquée. Voici celle de Mr. Mayer.

Elle se réduit à trois propositions, que nous allons rapporter & dont on peut voir la démonstration dans le 5e Volume, des Mémoires de Petersbourg pag. 30, 32 & 35.

Soient (fig. 48) p & q les deux Etoiles, pl le parallèle de la première, qf celui de la seconde; qu'on les fasse passer successivement l'une & l'autre par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, la première en p & en m, la seconde en q & en n, & par les deux verticaux inconnus ZK, Zl, la première en K & en l, la seconde en g & en f, en observant les distances de chaque Etoile au Méridien dans chacun de ces passages. Fig. 48.

1e. Proposition. La tangente de la déclinaison de l'Etoile q ou g, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile p ou K, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux verticaux inconnus ZgK, Zfl, comme $\frac{\text{fin. } ZPg}{\text{fin. } KPg} - \frac{\text{fin. } ZPf}{\text{fin. } fPl} : \frac{\text{fin. } ZPK}{\text{fin. } KPg} - \frac{\text{fin. } ZPl}{\text{fin. } fPl}$.

2e. Proposition. Le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, comme la différence des cosinus de ZPm & ZPp, est à la différence des cosinus de ZPn & ZPq.

3e. Proposition. Ces cosinus ayant un rapport connu, par ex. :: $a : b$, aussi bien que les tangentes :: $m : n$; le sinus de Pq sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{b\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$, & par conséquent le cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, ou sinus de Pp sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{a\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{bb\,nn}{aa\,mm}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$. Ce qu'on peut aisément soumettre au calcul logarithmique, comme on le verra dans l'exemple.

Pour y mettre plus de clarté, nous diviserons le Probléme en trois parties conformément aux trois Propositions de M. Mayer.

I. PARTIE.

Ayant fait passer deux Etoiles inconnues par deux verticaux inconnus, & connoissant leur distance au Méridien dans le tems de leurs passages par ces deux verticaux; trouver le rapport des tangentes de leurs déclinaisons ?

Soient les deux verticaux Z*g*K, Z*fl*; la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* ou *f*, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile K ou *l*, comme la différence des fractions $\frac{\sin.\,ZPg}{\sin.\,KPg} - \frac{\sin.\,ZPf}{\sin.\,fPl} : \frac{\sin.\,ZPK}{\sin.\,KPg} - \frac{\sin.\,ZPl}{\sin.\,fPl}$; ou comme la différence des produits $\sin.\,ZPg \times \sin.\,fPl - \sin.\,ZPf \times \sin.\,KPg : \sin.\,ZPK \times \sin.\,fPl - \sin.\,ZPl \times \sin.\,KPg$, par la 1[e]. Propos. de M. Mayer ; & nommant *m* & *n* ces différences, on aura $m : n$:: la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* est à celle de la déclinaison de l'étoile K.

Exemple.

Soient pour le Vertical Z*g*K		Pour le Vertical Z *fl*	
Les angles horaires. ZPK =	48° 0′ 0″	Angles horaires. ZP*l* =	30° 0′ 0″
Z*Pg* =	41 43 40,7	ZP*f* =	25 28 15
Donc KP*g* =	6 16 19,3	Donc *l*P*f* =	4 31 45
Sinus de ZP*g* =	9.8232099	Sinus ZP*f* =	9.6335205
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P*l* =	8.8974433
Log. 1[e] fraction =	0.7847923	Log. 2[e] fraction =	0.7360772
Sinus ZPK =	9.8710735	Sinus ZP *l* =	9.6989700
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P *l* =	8.8974433
Log. 3[e] fraction =	0.8326559	Log. 4[e] fraction	0.8015267

Valeurs en nombres naturels.

1[e] fraction =	6,0924545	3[e] fraction =	6,8023015
— 2[e] fraction =	5,4460000	— 4[e] fraction =	6,3317929
m =	0,6464545	*n* =	0,4705086

Logarithme *m* =	9.8105379
Logarithme *n* =	9.6725676
Logarithme $\frac{m}{n}$ =	0.1379703

II. PARTIE.

Ayant fait passer les deux mêmes Etoiles par deux Almicantaraths inconnus, & connoissant les angles horaires à chaque passage, trouver le rapport des cosinus de leurs déclinaisons ?

Multipliez le sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles horaires de chaque Etoile dans son passage par les deux Almicantaraths, & dites : comme le produit qui convient à la 1[e] Etoile est au produit qui convient à la 2[e], ainsi le cosinus de la déclinaison de la 2[e] Etoile, est au cosinus de la déclinaison de la 1[e]. C'est un corollaire de la 2[e] Propos. de M. Mayer.

Exemple.

Ayant fait passer les deux mêmes Etoiles par les Almicantaraths CD & AB, on a trouvé les angles horaires suivans :

ZPp =	63° 39′ 7″,4		
ZPm =	49 41 23		
Somme =	113 20 30,4		
Differ. =	13 57 44,4		
½ somme =	56 40 15,2	Sinus	9.9219613
½ différence =	6 58 52,2	Sinus	9.0847302
		Logarithme a =	9.0066915
ZPq =	68° 26′ 26″,3		
ZPn =	54 44 20		
Somme =	123 10 46,3		
Differ. =	13 42 6,3		
½ somme =	61 35 23,15	Sinus	9.9442663
½ differ. =	6 51 3,15	Sinus	9.0765881
		Logarithme b =	9.0208544

Le quarré du cosinus de l'Etoile q étant (par la 3e Propos. de M. Mayer $= \frac{aa\,mm - bb\,nn}{bb(mm - nn)} = \frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}$, & toutes ces valeurs étant à présent connues, il n'y a plus qu'à les substituer dans la formule.

Logarithme m =	9.8105379
+ Logarithme a =	9.0066915
Logarithme am =	8.8172294
Logarith. $aamm$ =	7.6344588
Logarithme b =	9.0208544
+ Logarith. n =	9.6725676
Logarithme bn =	8.6934220
Logarith. $bb\,nn$ =	7.3868440
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn}$ =	0.2476148
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1$ =	9.8856659
— Log. $\frac{mm}{nn} - 1$ =	9.9482824
Reste =	9.9373835

Nombres naturels.

$\frac{aa\,mm}{bb\,nn}$ =	1,768539
$\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1$ =	0,768539
$\frac{mm}{nn}$ =	1,887733
$\frac{mm}{nn} - 1$ =	0,887733

La moitié est la rac. = 9.9686917 cosinus de 21° 29′ 43″$\frac{1}{4}$ déclinaison de l'Etoile q.

La déclinaison de la 1e Etoile étant ainsi trouvée, on a ces deux analogies, pour trouver celle de la 2e. 1.° Par les cosinus, $a : b$:: le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p. 2.° Par les tangentes, $m : n$:: la tangente de la déclinaison de l'Etoile q : est a celle de la déclinaison de l'Etoile p.

1. Par les cosinus.

a	Compl. arithm.	0.9933085
: b		9.0208544
:: cos. 21° 29′ 43″$\frac{1}{4}$		9.9686917
: cos. 15 59 38$\frac{1}{2}$		9.9828546 déclinaison de l'Etoile p.

2. Par les tangentes.

m	Compl. arithm.	0.1894621
: n		9.6725676
: : tang. 21° 29′ 43″½		9.5952944
= tang. 15 59 38 ½		9.4573241

On peut auſſi trouver directement le coſinus de la déclinaiſon de la ſeconde Etoile p, ſans ſuppoſer connue celle de la 1^e^ q, en ſubſtituant les valeurs ci-devant trouvées, dans la formule $\sqrt{\frac{1 - \frac{bbnn}{aamm}}{1 - \frac{nn}{mm}}}$.

Connoiſſant les déclinaiſons des deux Etoiles, & leurs angles horaires, on pourra trouver la hauteur du pole en quatre manières différentes, par les méthodes des Problémes précédens, ou bien par les analogies ſuivantes, qui ſont plus expéditives que celles des Problémes XXXIII & XXXIX.

1. Analogie.

Par l'un des deux Verticaux.

Prenez la différence entre le produit de la tangente de déclinaiſon d'une Etoile par le ſinus de l'angle horaire de l'autre étoile à ce vertical, & le produit de la tangente de déclinaiſon de la 2^e^ Etoile par le ſinus de l'angle horaire de la 1^e^ au même Vertical, & dites : comme cette différence eſt au quarré du rayon, ainſi le ſinus de la différence des deux angles horaires eſt à la cotangente de la hauteur du pole.

Si les déclinaiſons ſont de différente eſpèce, l'une Nord & l'autre Sud, il faudra ajouter les deux produits, & prendre leur ſomme au lieu de leur différence.

Exemple 1.

Pour le Vertical ZgK.

La déclin. Nord de l'Etoile *g* est	21° 29′ 43″	sa tangente	9.5952944
L'angl. horaire ZPK de l'Etoile K	48 0 0	son sinus	9.8710735
Logarithme du 1er produit			9.4663679
La déclinaison Nord de l'Etoile K	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
L'angle horaire ZP*g* de l'Etoile *g*	41 43 40,7	son sin.	9.8232099
Logarithme du 2d produit			9.2805340

Nombres naturels.
- 1er produit = , 29266304
- 2d produit = , 19078053
- Différence = , 10188251

Comme cette différence , 10188251	Logarithme	9.0080996
Est au quarré du rayon	Compl. arit.	0.9919004
Ainsi le sin. de la differ. *g*PK des angles hor.	6° 16′ 19″,3	9.0384176
Est à la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6	0.0303180

Exemple 2.

Pour le Vertical Z*fl*.

La décl. Nord de l'Etoile *f*	21° 29′ 43″	sa tang.	9.5952944
Angle horaire ZP*l* de l'Etoile *l*	30 0 0	son sinus	9.6989700
Logarithme du 1er produit			9.2942644
Décl. Nord de l'Etoile *l*	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
Angle horaire ZP*f* de l'Etoile *f*	25 28 15	son sinus	9.6335205
Logarithme du 2d produit			9.0908446

Nombres naturels
- 1er produit = , 19600845
- 2d produit = , 12326636
- Différence = , 07364209

Comme cette différence , 07364209	Logarithme	8.8671259
: Au quarré du rayon	Compl. arith.	1.1328741
:: Le sinus de la differ. *l*P*f* des angles hor.	4° 31′ 45″	8.8974433
: A la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6	0.0303174

2. Analogie

Par l'un des deux Almicantaraths.

Multipliez le cofinus de la déclinaifon de chaque Etoile, par le cofinus de fon angle horaire dans fon paffage par l'Almicantarath, & prenez la différence de ces deux produits. Ajoutez au finus de la demi-fomme celui de la demi-différence des complémens de déclinaifon des deux Etoiles, & le logarithme du nombre 2, pour avoir la différence des finus des déclinaifons en logarithmes; & dites : comme la différence des premiers produits eft à la différence des finus des déclinaifons, ainfi le rayon eft à la cotangente de la hauteur du Pole.

Exemple I.

Pour l'Almicantarath fupérieur AB.

Cofinus de la déclinaifon de l'Etoile *m* inférieure	9.9828546
Cofinus de fon angle horaire ZP*m* 49° 41′ 23″	9.8108550
Logarithme du 1er produit	9.7937096
Cofinus de la déclinaifon de l'Etoile *n* fupérieure	9.9686917
Cofinus de fon angle horaire ZP*n* 54° 44′ 20″	9.7614042
Logarithme du 2d produit	9.7300959

Nombres naturels. { 1er produit = , 6218842 9
2d produit = , 53715037
Différence = , 08473392 Logar. 8.9280573.

Complém. de la déclin. de l'Etoile *m*	74° 0′ 21″ $\frac{2}{3}$	
De l'Etoile *n*	68 30 16 $\frac{2}{3}$	
Somme	142 30 38 $\frac{1}{3}$	
Différence	5 30 5	
Sinus de la $\frac{1}{2}$ fomme	71° 15′ 19″ $\frac{1}{6}$	9.9763316
+ finus de la $\frac{1}{2}$ differ.	2 45 2 $\frac{1}{2}$	8.6811528
+ Logarithme de 2		0.3010300
Différence des finus		8.9585144

La différence des produits	8.9280573 Comp. ar.	1.0719427
: Au rayon :: la différence des finus des déclinaifons		8.9585144
: A la cotangente de la hauteur du Pole	42° 59′ 53″	0.0394571

Exemple 2.

Pour l'Almicantarath inférieur CD.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *p* ou *m*		9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*p*	63° 39′ 7″.4	9.6472080
Logarithme du 1[er] produit		9.6300626
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *q* ou *n*		9.9686917
Cosin. de son angle horaire ZP*q*	68° 26′ 26″,3	9.5652159
Logarithme du 2[d] produit		9.5339076

Nombres naturels.
- 1[er] produit = ,42664099
- 2[d] produit = , 34190669
- Différence = , 0847343 logar. 8.9280592

La différence des produits	8.9280592	Compl. arit.	1.0719408
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons			8.9585144
: A la cotang. de la hauteur du Pole	42° 59′ 34″		0.0304552

Ces petites différences des deux latitudes trouvées viennent de quelques défauts dans les angles horaires supposés.

REMARQUE.

CEtte méthode a plusieurs avantages. 1.° Elle est à l'abri des réfractions qui troublent si fort les autres méthodes. 2.° Elle ne dépend en aucune manière de la division des Instrumens, toujours suspecte; puisqu'on peut avoir le tems par une bonne pendule, & par des hauteurs égales avant & après midi, sans connoître ces hauteurs. 3.° Elle fournit quatre manières différentes de déterminer la latitude; en sorte que si l'on ne trouve pas la même latitude par ces quatre méthodes, on est assuré que l'on a fait quelque erreur dans quelqu'une des huit observations; & si les différences ne sont pas d'une minute, on a la vraie latitude à quelques secondes près, en prenant un milieu entre les quatre résultats. 4.° Cette méthode ne dépend ni de l'ascension droite ni de la déclinaison des deux Etoiles; elle les donne immédiatement. 5.°

Elle

Elle peut ſervir à déterminer exactement & ſans parallaxe la poſition de la Lune, des Planétes & des Comètes. 6°. Elle eſt pourtant en partie impraticable à la Mer, où l'on ne peut pas obſerver le paſſage des Etoiles par deux Azimuths, & où d'ailleurs on connoit aſſez la déclinaiſon dee Etoiles ſans la chercher par cette méthode : Auſſi nous ne l'avons développee que pour n'omettre aucun des Problémes de M. de Maupertuis qui peuvent ſe réſoudre par le calcul logarithmique, & pour ne pas borner à la Mer l'utilité de cet ouvrage. On peut néanmoins à la Mer employer utilement une partie de cette méthode, qui eſt de faire paſſer deux Etoiles connues par deux Almicantaraths inconnus, ou deux hauteurs égales, obſervant leurs angles horaires à chaque paſſage, & déterminer la latitude du lieu par les deux dernières analogies dont nous avons donné le modéle ; les deux réſultats ſe ſerviront réciproquement de preuve, ou ſe compenſeront, en prenant un milieu, s'il y a de la différence.

2. Le cosinus de M	72° 30′ 27″	Comp. arit.	0.522039
: Au cosinus de N	57 27 51		9.730643
:: Le cosinus de PA	106 24 0		9.450775
:: Au sinus de la latitude	30 20 39		9.703457

3. Le sin. de la ½ somme des côtés ZA, PA	Comp. arit.	0.009254
: Au sinus de leur ½ différence		9.674248
:: La cotangente de ½ ZAP		0.733009
: A la tang. de la ½ differ. des angles 69° 1′ 49″		0.416511

4. Le cosinus de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.689719
: Au cosinus de leur ½ différence		9.945183
:: La cotangente de ½ ZAP		0.733009
: A la tangente de la ½ somme des angles 87° 32′ 44″		1.367911
½ Différence 69 1 49		

AZP = 156 34 33 suppl. de l'azimuth.
Angle horaire APZ = 18 30 55

PROBLEME XLIV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, A, A', A" (fig. 45) & le tems écoulé entre le Fig. 45. *moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical & celui où l'on a observé la hauteur du troisième, trouver la hauteur du Pole, & les angles Z & P ?*

DAns le triangle APA' les déclinaisons & la différence APA' des ascensions droites donnent les angles A & A'; Dans le triangle A'PA", si l'on ajoute à la différence des ascensions droites *a*'PA" des étoiles A' & A", l'intervalle du tems A'P*a*', on aura l'angle A'PA"; & par conséquent ayant les deux côtés A'P, A"P, on aura la base A'A", & l'angle PA'A", qu'on ajoutera à PA'Z, pour avoir l'angle ZA'A"; & ayant cet angle & deux côtés, A'A" & ZA" du triangle ZA'A", on aura le 3ᵉ côté ZA' & les angles. Enfin dans ZA'P on a deux côtés, ZA', PA' & l'angle compris A'. On aura donc le reste.

Exemple.

Exemple.

Soient A' *Sirius*, & A *Procyon* dans le même vertical ZAA'. Quatre minutes après on a obſervé la hauteur de *Rigel* A" de 23° 41' 50". Ainſi on a PA = 84° 11'. PA' = 106° 24'. PA" = 98° 29' & par les différences des aſcenſions droites, APA' = 13° 3'. *a*'PA" = 22° 53'; à quoi ajoutant la différence des tems A'P*a*' = 1°, on a l'angle A'PA" = 23° 53'. ZA" = 66° 18' 10". On demande la latitude &c.

Le triangle APA', comme dans le Probl. XLI. donne A'AP = 150° 1' 38". PA'Z = 31° 12' 16".

Dans le triangle A'PA", nous avons par le 3^e Cas.

PA' =	106° 24'
PA" =	98 29
Somme	204 53
Différence	7 55
½ ſomme	102 26 30"
½ différence	3 57 30
A'PA" =	23 53
½ A'PA" =	11 56 30"

1. Le ſin. de la ½ ſomme des côtés	Comp. ar.	0.010321
: Au ſin. de leur ½ différence		8.839044
: : La cotang. de ½ A'PA"		0.674705
: A la tang. de la ½ differ. des angles	18° 28' 56"	9.524070

2. Le coſin. de la ½ ſomme des côtés	Comp. arith.	0.666663
: Au coſin. de leur ½ différence		9.998963
: : La cotang. de ½ A'PA"		0.674705
: A la tang. de la ½ ſomme des angles *obtus*	92° 36' 55"	1.340331

½ ſomme des angles	92° 36' 55"
½ différence	18 28 56
PA"A' =	111 5 51
PA'A" =	74 7 59
+ PA'Z =	31 12 16
ZA'A" =	105 20 15

3. Le rayon : au cos. de A'PA"	23° 53′ 0″		9.961123
: : La tangente de PA'	106 24 0		0.531186
: A la tang. de M *obtus*	107 50 32		0.492309
PA" =	98 29 0		
Differ. N =	9 21 32		

4. Le cosinus de M	107° 50′ 32″	Comp. arith.	0.513716
: Au cosinus de N	9 21 32		9.994180
: : Le cosinus de PA'	106 24 0		9.450775
: Au cosinus de A'A"	24 36 6		9.958671

Triangle ZA'A",

Dont on a deux côtés, ZA" = 66° 18′ 10″. A'A" = 24° 36′ 6″ & l'angle opposé ZA'A" = 105° 20′ 15″.

1. Le rayon : au cosin. de A'A"	24° 36′ 6″		9.958671
: : La tang. de ZA'A"	105 20 15		0.561817
: A la cotang. de *m obtus*,	163 12 50		0.520488

2. La tang. de ZA"	66° 18′ 10″	Comp. arith.	9.642377
: A la tang. de A'A"	24 36 6		9.660743
: : Le cosin. de *m*	163 12 50		9.981089
: Au cosinus de *n*, *obtus*	101 5 35		9.284209
$m - n$ = ZA"A' =	62 7 15		
PA"A' =	111 5 51		
ZA"P =	48 58 36		

Triangle ZA"P,

Dont on a ZA" = 66° 18′ 10″. PA" = 98° 29′. ZA"P = 48° 58′ 36″.

1. Le rayon : au cosin. de ZA"P	48° 58′ 36″	9.817127
: : La tang. de ZA"	66 18 10	0.357623
: A la tang. de M *aigu*	56 13 42	0.174750
PA" =	98 29 0	
Différence N =	42 15 18	

2. Le cosinus de M	56° 13′ 42″	Comp. ar.	0.255004
: Au cosinus de N	42 15 18		9.869325
:: Le cosinus de ZA″	66 18 10		9.604122
: Au sinus de la latitude	32 21 8		9.728451

PROBLEME XLV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même Almicantarath inconnu, & celui où l'on a observé la hauteur du troisième, trouver les angles P & Z & la hauteur du Pole?

On aura (fig. 46) comme dans les Problémes précédens, tout le triangle PAA', & ensuite PIA' & A'PA". Par ce moyen on aura dans les triangles A'IA" & ZIA", deux côtés & l'angle compris. Donc on trouvera les angles ZA"I & ZA"P; & dans ce dernier triangle, ayant l'angle ZA"P & les côtés ZA", A"P, on aura le reste. Fig. 46.

Exemple.

Soient les distances des trois Etoiles au pole, PA = 106° 24′, PA' = 84° 11′, PA" = 98° 29′. Les angles APA' = 58° 56′ 20″, A'PA" = 14° 43′ 20″. Le complément de la hauteur de la 3^e^ Etoile ZA" = 86° 16′. On demande la latitude & les angles P & Z.

1°. Le triangle APA' donnera, comme dans le Probl. XLII, PAA' = 74° 10′ 42″. PA'A = 111° 54′ 6″ & son complément IA'P = 21° 54′ 6″. AA' = 62° 22′ 3″.

2°. Le triangle IPA' donnera les angles IPA' = 104° 8′ 55″. PIA' = 74° 43′ 30″. PIZ = 105° 54′ 31″ ½ & le côté PI = 22° 37′ 27″.

3°. Dans le triangle A'PA" on connoit l'angle A'PA" = 14° 43′ 20″ & deux côtés.

PA' =	84°	11'	0"	
PA" =	98	29	0	
Somme	182	40	0	
Differ.	14	18	0	
½ somme	91	20	0	
½ differ.	7	9	0	
½ A'PA" =	7	21	40	

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	Compl. arit.	0.000118
: Au sin. de leur ½ différence		9.095056
:: La cotangente de ½ A'PA"		0.888780
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43° 56' 30"	9.983954

2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	Comp. arith.	1.633223
: Au cosinus de leur ½ différence		9.996610
:: La cotang. de ½ A'PA"		0.888780
: A la tang. de la ½ somme des angles *obtus*,	90° 10' 25"	2.518613
½ différence	43 56 30	
PA"A' =	46 13 55	
PA'A" =	134 6 55	
PA'I =	21 54 6	
IA'A" =	156 1 1	

3. Le rayon : au cosin. de A'PA"	14° 43' 20"	9.985502
:: La tang. de PA'	84 11 0	0.991953
: A la tang. de l'arc M aigu	83 59 14	0.977455
PA" =	98 29 0	
Différence N =	14 29 46	

4. Le cosinus de M	83° 59' 14"	Comp. arit.	0.979845
: Au cosinus de N	14 29 46		9.985949
:: Le cosinus de PA'	84 11 0		9.005805
: Au cosinus de A'A"	20 29 45		9.971599

4°. Triangle A"IA', où l'on a IA' = 90°. A'A" = 20° 29' 45" & IA'A" = 156° 1' 1". Donc par le 3e Cas des rectangles,

1. Le rayon : à la cotang. de IA'A"	156° 1' 1"	0.351762
:: Le cosinus de A'A"	20 29 45	9.971599
: A la cotang. de IA"A' *aigu*	25 24 18	0.323361

2. Le rayon : au cosin. de IA'A"	156° 1' 1"	9.960787
: : Le sinus de A'A"	20 29 45	9.544241
: Au cosinus de IA" *obtus*	108 39 27	9.505028

3. Le rayon : au sinus de IA'A"	156° 1' 1"	9.609024
: : La tangente de A'A"	20 29 45	9.572641
: A la tangente de A'IA" *aigu*	8 38 22	9.181665

PIA' = 74° 43' 30"
PIZ = 105 54 31 ½

A'IZ = 31 11 1 ½
A'IA" = 8 38 22

ZIA" = 39 49 23 ½

5°. Triangle ZIA", où l'on a IA" = 108° 39' 27". ZA" = 86° 16' & ZIA" = 39° 49' 23" ½. Donc par le 5^e^ Cas.

1. Le rayon : au cosin. de IA"	108° 39' 27"		9.505028
: : La tang. de ZIA"	39 49 23 ½		9.921090
: A la cotangente de *m obtus*	104 56 11		9.426118
2. La tangente de ZA"	86° 11' 0"	Comp. arit.	8.814589
: A la tangente de IA"	108 39 27		0.471527
: : le cosinus de *m*	104 56 11		9.411192
: Au cosinus de *n aigu*	60 7 34		8.697308

ZA"I = *m* ± *n* = 44 48 37

PA"A' = 46° 13' 55"
— IA"A' = 25 24 18

PA"I = 20 49 37
+ ZA"I = 44 48 37

PA"Z = 65 38 14

6°. Triangle PA"Z, où l'on a PA" = 98° 29'. ZA" = 86° 16', & PA"Z = 65° 38' 14".

1. Le rayon : au cosin. de PA"Z	65° 38' 14"	9.615437
: : La tangente de ZA"	86 16 0	1.185411
: A la tangente de M *aigu*	81 0 41	0.800848
PA" =	98 29 0	
Différence N =	17 28 19	

2. Le cosinus de M	81° 0′ 41″	Comp. arit.	0.806213
: Au cosinus de N	17 28 19		9.979486
: : Le cosinus de ZA″	86 16 0		8.813667
: Au sinus de la latitude	23 25 25		9.599366

PROBLEME XLVI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Astres, & l'angle compris entre le vertical où les deux premiers se trouvent en même tems & le vertical où se trouve le troisième, trouver l'heure & la latitude ?

Exemple.

Fig. 47. On a vu *Rigel* & *Aldebaran* dans le même vertical ZAA' (fig. 47) & en même tems *Sirius* dans un vertical ZA", qui forme avec ZAA' un angle de 50°. On demande la latitude.

Triangle APA'

A, *Aldebaran*, PA =	73° 59′ 30″	Son ascens. droite	65° 33′ 0″
A', *Rigel*, PA' =	98 29 0	Ascens. droite	75 48 0
Somme	172 28 30	Différence APA'	10 15 0
Différence	24 29 30	½ APA' =	5 7 30
½ somme	86 14 15		
½ différence	12 14 45		

1. Le sin. de la ½ somme des côtés	86° 14′ 15″	Comp. ar.	0.000937
: Au sinus de leur ½ différence	12 14 45		9.326554
: : La cotang. de ½ APA'	5 7 30		1.047268
: A la tang. de la ½ differ. des angles	67 7 25		0.374759
2. Le cosin. de la ½ somme des côtés	86° 14′ 15″	Comp. ar.	1.182958
: Au cosin. de leur ½ différence	12 14 45		9.990004
: : La cotang. de ½ APA'	5 7 30		1.047268
: A la tang. de la ½ somme des angles	89 39 18		2.220230
½ différence	67 7 25		
Le plus grand angle PAA' =	156 46 43		
Le moindre PA'A =	22 31 53 = PA'Z.		

Triangle A"PA'

A", *Sirius*, PA" =	106° 24′ 0″	Son asc. droite	98° 41′ 0″
A', *Rigel*, PA' =	98 29 0	Ascens. droite	75 48 0
Somme	204 53 0	Différence	22 53 0 = A"PA'
Differ.	7 55 0	½ A"PA'	11 26 30
½ somme	102 26 30		
½ différ.	3 57 30		

1. Le sinus de la ½ somme des côtés	102° 26′ 30″ Com. ar.	0.010321
: Au sinus de leur ½ différence	3 57 30	8.839044
: : La cotang. de ½ A"PA'	11 26 30	0.693806
: A la tang. de la ½ differ. des angles	19 15 11	9.543171

2. Le cos. de la ½ somme des côtés	102° 26′ 30″ Comp. ar.	0.666663
: Au cosin. de leur ½ différence	3 57 30	9.998963
: : La cotang. de ½ A"PA'	11 26 30	0.693806
: A la tang. de la ½ somme *obtuse* des ang.	92 30 10	1.359432
½ différence	19 15 11	
Le plus grand PA'A" =	111 45 21	
− PA'Z =	22 31 53	
ZA'A" =	89 13 28	

3. Le rayon : au cosin. de A"PA'	22° 53′	9.964400
: : La tang. de PA'	98 29	0.826366
: A la tang. de M *obtus*	99 11 46″	0.790766
PA" =	106 24 0	
Différence N =	7 12 14	

4. Le cosinus de M	99° 11′ 46″ Compl. ar.	0.796385
: Au cosinus de PA'	98 29 0	9.168856
: : Le cosinus de N	7 12 14	9.996558
: Au cosinus de A'A"	23 40 51	9.961799

Triangle A"ZA'

Où l'on a A"ZA' = 50°. ZA'A" = 89° 13′ 28″. A'A" = 23° 40′ 51″.

1. Le rayon : au cosin. de ZA'A".	89° 13′ 28″	8.131477
: : La tangente de A'A"	23 40 51	9.642039
: A la tangente de M *aigu*	0 20 24	7.773516

2. La tangente de A''ZA'	50° 0' 0''	Comp. ar.	9.923813
: A la tangente de ZA'A''	89 13 28		1.868484
: : Le ſinus de M	0 20 24		7.773354
: Au ſinus de N	21 34 55		9.565651
ZA' = M + N =	21 55 19		

Triangle ZA'P

Où l'on a PA'Z = 22° 31' 53''. ZA' = 21° 55' 19''. PA' = 98° 29'.

1. Le rayon : au coſin. de PA'Z	22° 31' 53''	9.965517
: : La tangente de PA'	98 29 0	0.826366
: A la tangente de M *obtus*	99 10 22	0.791883
ZA' =	21 55 19	
Différence N =	77 15 3	

2. Le coſinus de M	99° 10' 22''	Comp. ar.	0.797479
Au coſinus de N	77 15 3		9.343769
: : Le coſinus de PA'	98 29 0		9.168856
: Au ſinus de la latitude	11 47 3		9.310104

PROBLEME XLVII.

Les paſſages de deux Etoiles par le Méridien, par deux verticaux & par deux Almicantaraths inconnus, mais conſtants, étant donnés ; trouver la déclinaiſon de ces Etoiles & la hauteur du Pole ?

C'Eſt le 40ᵉ & dernier Probléme de l'Aſtronomie Naut. Mʳ. de Maupertuis en fait un très-grand cas. Il en attribue avec raiſon la ſolution à Mʳ. Mayer ; mais il prétend que ce ſçavant l'a plutôt indiquée que donnée, & il en ſubſtitue une autre déduite de ſes formules, qu'il avoue être très compliquée. Voici celle de Mʳ. Mayer.

Elle ſe réduit à trois propoſitions, que nous allons rapporter & dont on peut voir la démonſtration dans le 5ᵉ Volume, des Mémoires de Petersbourg pag. 30, 32 & 35.

Soient (fig. 48) p & q les deux Etoiles, pl le parallèle de la première, qf celui de la seconde; qu'on les fasse passer successivement l'une & l'autre par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, la première en p & en m, la seconde en q & en n, & par les deux verticaux inconnus ZK, Zl, la première en K & en l, la seconde en g & en f, en observant les distances de chaque Etoile au Méridien dans chacun de ces passages. Fig. 48.

1^e. Proposition. La tangente de la déclinaison de l'Etoile q ou g, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile p ou K, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux verticaux inconnus ZgK, Zfl, comme

$$\frac{\text{fin. } ZPg}{\text{fin. } KPg} - \frac{\text{fin. } ZPf}{\text{fin. } fPl} : \frac{\text{fin. } ZPK}{\text{fin. } KPg} - \frac{\text{fin. } ZPl}{\text{fin. } fPl}.$$

2^e. Proposition. Le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, en vertu de leurs passages par le Méridien & par les deux Almicantaraths inconnus CD & AB, comme la différence des cosinus de ZPm & ZPp, est à la différence des cosinus de ZPn & ZPq.

3^e. Proposition. Ces cosinus ayant un rapport connu, par ex. :: $a : b$, aussi bien que les tangentes :: $m : n$; le sinus de Pq sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{b\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$, & par conséquent le cosinus de la déclinaison de l'Etoile p, ou sinus de Pp sera $= \frac{\sqrt{aa\,mm - bb\,nn}}{a\sqrt{mm - nn}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{bb\,nn}{aa\,mm}}{1 - \frac{mm}{nn}}}$. Ce qu'on peut aisément soumettre au calcul logarithmique, comme on le verra dans l'exemple.

Pour y mettre plus de clarté, nous diviserons le Probléme en trois parties conformément aux trois Propositions de M. Mayer.

I. PARTIE.

Ayant fait passer deux Etoiles inconnues par deux verticaux inconnus, & connoissant leur distance au Méridien dans le tems de leurs passages par ces deux verticaux; trouver le rapport des tangentes de leurs déclinaisons ?

Soient les deux verticaux Z*g*K, Z*fl*; la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* ou *f*, est à la tangente de la déclinaison de l'Etoile K ou *l*, comme la différence des fractions $\frac{fin.\ ZPg}{fin.\ KPg} - \frac{fin.\ ZPf}{fin.\ fPl} : \frac{fin.\ ZPK}{fin.\ KPg} - \frac{fin.\ ZPl}{fin.\ fPl}$; ou comme la différence des produits $fin.\ ZPg \times fin.\ fPl - fin.\ ZPf \times fin.\ KPg : fin.\ ZPK \times fin.\ fPl - fin.\ ZPl \times fin.\ KPg$, par la 1e. Propos. de M. Mayer; & nommant *m* & *n* ces différences, on aura $m : n$:: la tangente de la déclinaison de l'Etoile *g* est à celle de la déclinaison de l'étoile K.

Exemple.

Soient pour le Vertical Z*g*K		Pour le Vertical Z*fl*	
Les angles horaires. ZPK =	48° 0′ 0″	Angles horaires. ZP*l* =	30° 0′ 0″
ZP*g* =	41 43 40,7	ZP*f* =	25 28 15
Donc KP*g* =	6 16 19,3	Donc *l*P*f* =	4 31 45
Sinus de ZP*g* =	9.8232099	Sinus ZP*f* =	9.6335205
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P*l* =	8.8974433
Log. 1e fraction =	0.7847923	Log. 2e fraction =	0.7360772
Sinus ZPK =	9.8710735	Sinus ZP*l* =	9.6989700
— sinus KP*g* =	9.0384176	— sinus *f*P*l* =	8.8974433
Log. 3e fraction =	0.8326559	Log. 4e fraction	0.8015267

Valeurs en nombres naturels.

1e fraction =	6,0924545	3e fraction =	6,8023015
— 2e fraction =	5,4460000	— 4e fraction =	6,3317929
m =	0,6464545	*n* =	0,4705086

Logarithme *m* =	9.8105379
Logarithme *n* =	9.6725676
Logarithme $\frac{m}{n}$ =	0.1379703

II. PARTIE.

Ayant fait passer les deux mêmes Etoiles par deux Almicantaraths inconnus, & connoissant les angles horaires à chaque passage, trouver le rapport des cosinus de leurs déclinaisons?

Multipliez le sinus de la demi-somme par le sinus de la demi-différence des angles horaires de chaque Etoile dans son passage par les deux Almicantaraths, & dites: comme le produit qui convient à la 1e Etoile est au produit qui convient à la 2e, ainsi le cosinus de la déclinaison de la 2e Etoile, est au cosinus de la déclinaison de la 1e. C'est un corollaire de la 2e Propos. de M. Mayer.

Exemple.

Ayant fait passer les deux mêmes Etoiles par les Almicantaraths CD & AB, on a trouvé les angles horaires suivans:

ZPp =	63° 39′ 7″,4		
ZPm =	49 41 23		
Somme =	113 20 30,4		
Differ. =	13 57 44,4		
½ somme =	56 40 15,2	Sinus	9.9219613
½ différence =	6 58 52,2	Sinus	9.0847302
		Logarithme a =	9.0066915
ZPq =	68° 26′ 26″,3		
ZPn =	54 44 20		
Somme =	123 10 46,3		
Differ. =	13 42 6,3		
½ somme =	61 35 23,15	Sinus	9.9442663
½ differ. =	6 51 3,15	Sinus	9.0765881
		Logarithme b =	9.0208544

III. PARTIE.

Le quarré du cosinus de l'Etoile q étant (par la 3ᵉ Propos. de M. Mayer $= \frac{aa\,mm - bb\,nn}{bb\,(mm - nn)} = \frac{1 - \frac{aa\,mm}{bb\,nn}}{1 - \frac{mm}{nn}}$, & toutes ces valeurs étant à présent connues, il n'y a plus qu'à les substituer dans la formule.

Logarithme $m =$	9.8105379		
+ Logarithme $a =$	9.0066915		
Logarithme $am =$	8.8172294		
Logarith. $aamm =$	7.6344588		
Logarithme $b =$	9.0208544		
+ Logarith. $n =$	9.6725676	Nombres naturels.	
Logarithme $bn =$	8.6934220	$\frac{aa\,mm}{bb\,nn} =$	1,768539
Logarith. $bb\,nn =$	7.3868440		
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn} =$	0.2476148	$\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1 =$	0,768539
Log. $\frac{aa\,mm}{bb\,nn} - 1 =$	9.8856659	$\frac{mm}{nn} =$	1,887733
— Log. $\frac{mm}{nn} - 1 =$	9.9482824	$\frac{mm}{nn} - 1 =$	0,887733
Reste $=$	9.9373835		

La moitié est la rac. $=$ 9.9686917 cosinus de 21° 29′ 43″½ déclinaison de l'Etoile q.

La déclinaison de la 1ᵉ Etoile étant ainsi trouvée, on a ces deux analogies, pour trouver celle de la 2ᵉ. 1.° Par les cosinus, $a : b ::$ le cosinus de la déclinaison de l'Etoile q, est au cosinus de la déclinaison de l'Etoile p. 2.° Par les tangentes, $m : n ::$ la tangente de la déclinaison de l'Etoile q : est a celle de la déclinaison de l'Etoile p.

1. Par les cosinus.

a	Compl. arithm.	0.9933085
$: b$		9.0208544
$::$ cos.	21° 29′ 43″½	9.9686917
$:$ cos.	15 59 38½	9.9828546 déclinaison de l'Etoile p.

2. Par les tangentes.

m	Compl. arithm.	0.1894621
: n		9.6725676
: : tang.	21° 29′ 43″$\frac{1}{4}$	9.5952944
= tang.	15 59 38 $\frac{1}{4}$	9.4573241

On peut auſſi trouver directement le coſinus de la déclinaiſon de la ſeconde Etoile p, ſans ſuppoſer counue celle de la 1^e q, en ſubſtituant les valeurs ci-devant trouvées, dans la formule $\sqrt{\frac{1 - \frac{bbnn}{aamm}}{1 - \frac{nn}{mm}}}$.

Connoiſſant les déclinaiſons des deux Etoiles, & leurs angles horaires, on pourra trouver la hauteur du pole en quatre manières différentes, par les méthodes des Problémes précédens, ou bien par les analogies ſuivantes, qui ſont plus expéditives que celles des Problémes XXXIII & XXXIX.

1. Analogie.

Par l'un des deux Verticaux.

Prenez la différence entre le produit de la tangente de déclinaiſon d'une Etoile par le ſinus de l'angle horaire de l'autre étoile à ce vertical, & le produit de la tangente de déclinaiſon de la 2^e Etoile par le ſinus de l'angle horaire de la 1^e au même Vertical, & dites : comme cette différence eſt au quarré du rayon, ainſi le ſinus de la différence des deux angles horaires eſt à la cotangente de la hauteur du pole.

Si les déclinaiſons ſont de différente eſpèce, l'une Nord & l'autre Sud, il faudra ajouter les deux produits, & prendre leur ſomme au lieu de leur différence.

Exemple 1.

Pour le Vertical ZgK.

La déclin. Nord de l'Etoile *g* est	21° 29′ 43″	sa tangente	9.5952944
L'angl.horaire ZPK de l'Etoile K	48 0 0	son sinus	9.8710735
Logarithme du 1er produit			9.4663679
La déclinaison Nord de l'Etoile K	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
L'angle horaire ZP*g* de l'Etoile *g*	41 43 40,7	son sin.	9.8232099
Logarithme du 2d produit			9.2805340

Nombres naturels.
- 1er produit = , 29266304
- 2d produit = , 19078053
- Différence = , 10188251

Comme cette différence , 10188251		Logarithme	9.0080996
Est au quarré du rayon		Compl. arit.	0.9919004
Ainsi le sin. de la differ. *g*PK des angles hor.	6° 16′ 19″,3		9.0384176
Est à la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303180

Exemple 2.

Pour le Vertical *Zfl*.

La décl. Nord de l'Etoile *f*	21° 29′ 43″	sa tang.	9.5952944
Angle horaire ZP*l* de l'Etoile *l*	30 0 0	son sinus	9.6989700
Logarithme du 1er produit			9.2942644
Décl. Nord de l'Etoile *l*	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
Angle horaire ZP*f* de l'Etoile *f*	25 28 15	son sinus	9.6335205
Logarithme du 2d produit			9.0908446

Nombres naturels
- 1er produit = , 19600845
- 2d produit = , 12326636
- Différence = , 07364209

Comme cette différence , 07364209		Logarithme	8.8671259
: Au quarré du rayon		Compl. arith.	1.1328741
:: Le sinus de la differ. *lPf* des angles hor.	4° 31′ 45″		8.8974433
: A la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303174

2. Analogie

Par l'un des deux Almicantaraths.

Multipliez le cosinus de la déclinaison de chaque Etoile, par le cosinus de son angle horaire dans son passage par l'Almicantarath, & prenez la différence de ces deux produits. Ajoutez au sinus de la demi-somme celui de la demi-différence des complémens de déclinaison des deux Etoiles, & le logarithme du nombre 2, pour avoir la différence des sinus des déclinaisons en logarithmes ; & dites : comme la différence des premiers produits est à la différence des sinus des déclinaisons, ainsi le rayon est à la cotangente de la hauteur du Pole.

Exemple I.

Pour l'Almicantarath supérieur AB.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *m* inférieure	9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*m* 49° 41′ 23″	9.8108550
Logarithme du 1^er^ produit	9.7937096
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *n* supérieure	9.9686917
Cosinus de son angle horaire ZP*n* 54° 44′ 20″	9.7614042
Logarithme du 2^d^ produit	9.7300959

Nombres naturels.
- 1^er^ produit = , 62188429
- 2^d^ produit = , 53715037
- Différence = , 08473392 Logar. 8.9280573.

Complém. de la déclin. de l'Etoile *m*	74°	0′	21″ 2/3	
De l'Etoile *n*	68	30	16 2/3	
Somme	142	30	38 1/3	
Différence	5	30	5	
Sinus de la 1/2 somme	71°	15′	19″ 1/6	9.9763316
+ sinus de la 1/2 differ.	2	45	2 1/2	8.6811528
+ Logarithme de 2				0.3010300
Différence des sinus				8.9585144

La différence des produits	8.9280573 Comp. ar.	1.0719427
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons		8.9585144
: A la cotangente de la hauteur du Pole 42° 59′ 53″		0.0394571

Exemple 2.

Pour l'Almicantarath inférieur CD.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *p* ou *m*		9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*p*	63° 39′ 7″.4	9.6472080
Logarithme du 1^er produit		9.6300626
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *q* ou *n*		9.9686917
Cosin. de son angle horaire ZP*q*	68° 26′ 26″,3	9.5652159
Logarithme du 2^d produit		9.5339076

Nombres naturels.
- 1^er produit = , 42664099
- 2^d produit = , 34190669
- Différence = , 0847343 logar. 8.9280592

La différence des produits	8.9280592	Compl. arit.	1.0719408
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons			8.9585144
: A la cotang. de la hauteur du Pole	42° 59′ 34″		0.0304552

Ces petites différences des deux latitudes trouvées viennent de quelques défauts dans les angles horaires supposés.

REMARQUE.

CEtte méthode a plusieurs avantages. 1.° Elle est à l'abri des réfractions qui troublent si fort les autres méthodes. 2.° Elle ne dépend en aucune manière de la division des Instrumens, toujours suspecte ; puisqu'on peut avoir le tems par une bonne pendule, & par des hauteurs égales avant & après midi , sans connoître ces hauteurs. 3.° Elle fournit quatre manières différentes de déterminer la latitude ; en sorte que si l'on ne trouve pas la même latitude par ces quatre méthodes, on est assuré que l'on a fait quelque erreur dans quelqu'une des huit observations ; & si les différences ne sont pas d'une minute, on a la vraie latitude à quelques secondes près, en prenant un milieu entre les quatre résultats. 4.° Cette méthode ne dépend ni de l'ascension droite ni de la déclinaison des deux Etoiles ; elle les donne immédiatement. 5.°

Elle

Elle peut ſervir à déterminer exactement & ſans parallaxe la poſition de la Lune, des Planétes & des Comètes. 6°. Elle eſt pourtant en partie impraticable à la Mer, où l'on ne peut pas obſerver le paſſage des Etoiles par deux Azimuths, & où d'ailleurs on connoit aſſez la déclinaiſon dee Etoiles ſans la chercher par cette méthode : Auſſi nous ne l'avons développee que pour n'omettre aucun des Problémes de M. de Maupertuis qui peuvent ſe réſoudre par le calcul logarithmique, & pour ne pas borner à la Mer l'utilité de cet ouvrage. On peut néanmoins à la Mer employer utilement une partie de cette méthode, qui eſt de faire paſſer deux Etoiles connues par deux Almicantaraths inconnus, ou deux hauteurs égales, obſervant leurs angles horaires à chaque paſſage, & déterminer la latitude du lieu par les deux dernières analogies dont nous avons donné le modéle ; les deux réſultats ſe ſerviront réciproquement de preuve, ou ſe compenſeront, en prenant un milieu, s'il y a de la différence.

CHAPITRE V.

Correction des erreurs qui résultent des Observations, dans le calcul des Problèmes Astronomiques, avec la manière de déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.

Fig. 23 LE calcul des Problémes Astronomiques se réduit presque toujours à un triangle sphérique AZP, (fig. 23) où l'on a un côté constant AP que l'on connoit par les Tables. Il en faut excepter le cas où l'on cherche la déclinaison d'un Astre; le côté AP n'est pas constant alors, mais on a d'autres quantités connues & constantes. On en suppose toujours deux, & l'on fait varier les autres, pour sçavoir à quelle erreur on s'expose par le défaut des Observations. Voici les Regles de ces variations, que M^r^. *Cotes* a démontrées, en les supposant très-petites, & que j'applique à ce triangle.

1^e^. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est invariable, avec l'un des angles adjacents* A *ou* P.

1. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, est à celle du côté opposé à cet angle, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté invariable. Par exemple, si AP & l'angle A sont invariables, la variation du côté AZ, est à celle de ZP, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z. De même, si AP & l'angle P sont invariables, la variation de ZP est à celle de AZ, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z.

2. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle de l'angle opposé à ce côté, comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle cons-

tant. Par exemple, l'angle A & le côté AP étant invariables, la variation de l'autre angle P adjacent au côté AP, eſt à celle de l'angle Z oppoſé au côté AP, comme le rayon eſt au coſinus du côté PZ oppoſé à l'angle conſtant A.

3. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, eſt à celle du côté oppoſé à l'angle invariable, comme la tangente de l'angle oppoſé au côte invariable, eſt au ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant. Ainſi l'angle A & le côté AP étant conſtants, la variation de l'autre angle P eſt à celle du côté PZ oppoſé à l'angle conſtant, comme la tangente de l'angle Z eſt au ſinus du côté PZ.

4. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle conſtant, eſt à celle de l'angle oppoſé au côté invariable; comme la tangante du côté oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté invariable.

5. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, eſt à celle de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, comme le ſinus de l'angle oppoſé au côté invariable, eſt au ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant. Ainſi l'angle A & le côté AP ſubſiſtans, la variations, de l'autre angle P eſt à celle du côté AZ, comme le ſinus de l'angle Z eſt au ſinus du côté PZ.

6. La variation de l'angle oppoſé au côté invariable, eſt à celle du côté oppoſé à l'angle invariable, comme la tangente de cet angle eſt à la tangente de ce côté. Ainſi A & AP étant conſtans, la variation de l'angle Z eſt à celle de PZ, comme la tangente de l'angle Z eſt à la tangente de PZ.

2ᵉ. Regle.

Lorſque l'un des côtés AP *eſt variable, avec l'angle* Z *qui lui eſt oppoſé.*

1. La variation de l'un des deux autres angles eſt à celle du côté oppoſé à cet angle, comme la tangente de cet angle eſt à la tangente de ce côté. Par exemple Z &

AP subsistans, la variation de l'angle P est à celle du côté AZ, comme la tangente de l'angle P est à la tangente du côté AZ.

2. Les variations des deux autres côtés sont entr'elles, comme les cosinus des angles opposés à ces côtés.

3. Les variations des deux autres angles sont entr'elles, comme les cosinus des côtés qui leur sont opposés.

4. La variation de l'un des deux autres côtés est à celle de l'angle compris par ce côté & par le côté invariable, comme le produit de la tangente par le cosinus de ce côté, est au produit de la tangente de l'angle opposé à ce côté, par le cosinus du 3e côté. Par exemple Z & AP étant invariables, la variation du côté AZ est à celle de l'angle A compris entre AP & AZ, comme le produit de la tangente du côté AZ par le cosinus du même côté, est au produit de la tangente de l'angle P par le cosinus du 3e côté PZ.

3e Regle.

Lorsque deux côtés sont invariables, comme AP *&* PZ.

1. La variation de l'angle compris par ces deux côtés, est à celle de l'un des deux autres angles, comme le produit du rayon par le sinus du côté opposé au premier angle, est au produit du sinus du côté opposé au second angle par le cosinus du troisième angle. Ainsi dans le cas des deux côtés constans AP & PZ, la variation de l'angle P compris entre ces deux côtés, est à celle de l'angle A, comme le produit du rayon par le sinus du côté AZ opposé à l'angle P, est au produit du sinus du côté PZ opposé à l'angle A par le cosinus du 3e angle Z.

2. La variation du même angle compris par ces deux côtés est à celle du côté opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un des deux côtés par le sinus de l'autre angle adjacent à ce côté. Ainsi AP & PZ étant constans, la variation de l'angle P est à celle du

côté opposé AZ, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de PZ par le sinus de l'angle Z, ou, au produit du sinus de AP par le sinus de l'angle A.

3. La variation de l'un des deux angles opposés aux côtés constans, est à celle du troisième côté, comme la cotangente de l'autre angle opposé à l'autre côté constant, est au sinus du troisième côté. Ainsi la variation de l'angle A est à la variation du 3^e^ côté AZ, comme la cotangente de l'angle Z est au sinus du côté AZ.

4. Les variations des angles opposés aux côtés constans sont entre elles, comme les tangentes des mêmes angles.

4^e^. Regle.

Lorsque deux angles restent invariables.

1. La variation du côté compris par les deux angles constans, est à celle de l'un des deux autres côtés, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle opposé au premier côté, est au produit du sinus de l'angle opposé à l'autre côté par le cosinus du 3^e^ côté. Ainsi les angles P & A étant constans, la variation du côté AP compris entre A & P, est à celle du côté PZ, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle Z opposé au côté AP, est au produit du sinus de l'angle A opposé à PZ par le cosinus du 3^e^ côté AZ.

2. La variation du même côté compris entre les deux angles constans, est à celle de l'angle opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un de ces deux angles par le sinus du côté adjacent à cet angle. Ainsi P & A subsistans, la variation de AP est à celle de l'angle opposé Z, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'angle A par le sinus du côté AZ, ou du sinus de l'angle P par le sinus du côté PZ.

3. La variation de l'un des côtés opposés aux angles constans, est à celle du 3^e^ angle, comme la cotangente de l'autre côté opposé à l'autre angle invariable, est

au sinus du 3ᵉ angle. Ainsi A & P étant invariables, la variation de PZ est à celle du 3ᵉ angle Z, comme la cotangente de AZ est au sinus de l'angle Z.

4. Les variations des côtés opposés aux angles constans sont entr'elles, comme les tangentes des mêmes côtés.

Ces quatre Regles renferment toutes les variations des triangles sphériques, en ne supposant que deux de leurs parties invariables. Leur application fera voir jusqu'à quel point on peut compter sur le calcul des Problémes Astronomiques. Si un Instrument ne donne la hauteur d'un Astre, qu'à une minute près, on verra le rapport qu'aura cette minute d'erreur, avec l'incertitude de l'heure, de la latitude, ou de l'angle azimuthal qu'on aura conclu par l'observation, tout le réste étant supposé exact.

Un autre avantage de ces regles, c'est qu'elles déterminent presque toujours sans calcul les circonstances où il faut faire l'observation, afin que les erreurs inévitables n'y influent que le moins qu'il sera possible. Nous allons en faire voir l'usage dans différens Problémes.

PROBLEME I.

La déclinaison étant donnée avec l'angle horaire P, *trouver à quelle erreur on s'expose dans le calcul de la latitude, par le défaut de la hauteur, & quelle est la hauteur la hauteur la plus propre à cette observation ?*

PAr l'Art. 1. de la 1ᵉ Regle, la variation de ZP, ou de la latitude, est à celle de la hauteur, ou de la distance AZ de l'Astre au Zénith, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z opposé au côté invariable AP.

Donc plus le cosinus de l'angle azimuthal Z sera grand, plus l'erreur dans le calcul de la latitude sera petite.

Dans le Méridien, ou l'angle Z est nul, son cosinus égal au rayon, est aussi grand qu'il peut l'être. Donc l'observation de la hauteur Méridienne, est celle qui

produit la moindre erreur dans la latitude, tout le reste étant égal.

Mais on ne peut pas toujours observer la hauteur du Soleil à midi, & l'angle Z devient toujours plus grand, à mesure que l'Astre s'en éloigne, jusques à son passage par le premier vertical, où l'angle Z étant de 90.°, son cosinus est zero. Donc la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'heure étant donnée, est celle qui convient le moins pour déterminer la latitude. Donc on ne sçauroit trop s'éloigner du premier vertical.

Cependant l'erreur n'est pas infinie dans le premier vertical, comme cela semble suivre de la proportion, & de ce que le rayon est infiniment plus grand que le cosinus de 90.°; mais on ne peut pas dans ce cas supposer aucune erreur dans la hauteur, puisque les angles P & Z étant donnés & constans avec le côté AP, tout le reste par là dévient invariable.

Exemple d'une grande erreur dans la latitude.

La hauteur du Soleil à 6 heures a été trouvée 15° 16′ 4″, sa déclinaison étant 19° 39′ 10″, & sur ces deux élémens on a trouvé son Azimuth 77° 28′ 30″ & la latitude 51° 32′. On demande à quelle erreur on s'oppose dans la latitude pour 10′ d'erreur dans la hauteur?

Comme le cos. de l'angle Z,	77° 28′ 30″ Compl. arith.	0.663809
: Au rayon :: l'erreur de 10 minutes		1.000000
: A celle de la latitude	46′,111 = 46′ 7″	1.663809

On peut s'en convaincre par expérience; car si l'on suppose la hauteur du Soleil 15° 26′, plus grande que la premiere de 10°, on dira;

Comme le sin. de la déclin.	19° 39′ 10″	Compl. arit.	0.473248
: est au rayon :: le sin. de la haut.	15 26		9.425073
: Au sinus de la latitude	52 18		9.898321
La premiere latitude étoit	51 32		
L'erreur est donc	0 46		

Exemple 1.

Pour le Vertical Z*g*K.

La déclin. Nord de l'Etoile *g* est	21° 29′ 43″	sa tangente	9.5952944
L'angl. horaire ZPK de l'Etoile K 48	0 0	son sinus	9.8710735
Logarithme du 1er produit			9.4663679
La déclinaison Nord de l'Etoile K	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
L'angle horaire ZP*g* de l'Etoile *g*	41 43 40,7	son sin.	9.8232099
Logarithme du 2d produit			9.2805340

Nombres naturels. { 1er produit =, 29266304
2d produit =, 19078053
Différence =, 10188251

Comme cette différence, 10188251		Logarithme	9.0080096
Est au quarré du rayon		Compl. arit.	0.9919004
Ainsi le sin. de la differ. *g*PK des angles hor.	6° 16′ 19″,3		9.0384176
Est à la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303180

Exemple 2.

Pour le Vertical Z*fl*.

La décl. Nord de l'Etoile *f*	21° 29′ 43″	sa tang.	9.5952944
Angle horaire ZP*l* de l'Etoile *l*	30 0 0	son sinus	9.6989700
Logarithme du 1er produit			9.2942644
Décl. Nord de l'Etoile *l*	15° 59′ 38″	sa tang.	9.4573241
Angle horaire ZP*f* de l'Etoile *f*	25 28 15	son sinus	9.6335205
Logarithme du 2d produit			9.0908446

Nombres naturels { 1er produit =, 19600845
2d produit =, 12326636
Différence =, 07364209

Comme cette différence, 07364209		Logarithme	8.8671259
: Au quarré du rayon		Compl. arith.	1.1328741
:: Le sinus de la differ. *l*P*f* des angles hor.	4° 31′ 45″		8.8974433
: A la cotang. de la hauteur du Pole	43 0 6		0.0303174

2. Analogie

Par l'un des deux Almicantaraths.

Multipliez le cosinus de la déclinaison de chaque Etoile, par le cosinus de son angle horaire dans son passage par l'Almicantarath, & prenez la différence de ces deux produits. Ajoutez au sinus de la demi-somme celui de la demi-différence des complémens de déclinaison des deux Etoiles, & le logarithme du nombre 2, pour avoir la différence des sinus des déclinaisons en logarithmes; & dites : comme la différence des premiers produits est à la différence des sinus des déclinaisons, ainsi le rayon est à la cotangente de la hauteur du Pole.

Exemple I.

Pour l'Almicantarath supérieur AB.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *m* inférieure	9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*m* 49° 41′ 23″	9.8108550
Logarithme du 1er produit	9.7937096
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *n* supérieure	9.9686917
Cosinus de son angle horaire ZP*n* 54° 44′ 20″	9.7614042
Logarithme du 2d produit	9.7300959

Nombres naturels. { 1er produit =, 62188429
2d produit =, 53715037
Différence =, 08473392 Logar. 8.9280573.

Complém. de la déclin. de l'Etoile *m*	74°	0′	21″ $\frac{2}{3}$		
De l'Etoile *n*	68	30	16 $\frac{2}{3}$		
Somme	142	30	38 $\frac{1}{3}$		
Différence	5	30	5		
Sinus de la $\frac{1}{2}$ somme	71°	15′	19″ $\frac{1}{6}$		9.9763316
+ sinus de la $\frac{1}{2}$ differ.	2	45	2 $\frac{1}{2}$		8.6811528
+ Logarithme de 2					0.3010300
Différence des sinus					8.9585144
La différence des produits				8.9280573 Comp. ar.	1.0719427
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons					8.9585144
: A la cotangente de la hauteur du Pole	42°	59′	53″ $\frac{1}{4}$		0.0304571

Exemple 2.

Pour l'Almicantarath inférieur CD.

Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *p* ou *m*		9.9828546
Cosinus de son angle horaire ZP*p*	63° 39′ 7″.4	9.6472080
Logarithme du 1^er produit		9.6300626
Cosinus de la déclinaison de l'Etoile *q* ou *n*		9.9686917
Cosin. de son angle horaire ZP*q*	68° 26′ 26″,3	9.5652159
Logarithme du 2^d produit		9.5339076

Nombres naturels.
- 1^er produit = ,42664099
- 2^d produit = , 34190669
- Différence = , 0847343 logar. 8.9280592

La différence des produits 8.9280592	Compl. arit.	1.0719408
: Au rayon :: la différence des sinus des déclinaisons		8.9585144
: A la cotang. de la hauteur du Pole	42° 59′ 34″	0.0304552

Ces petites différences des deux latitudes trouvées viennent de quelques défauts dans les angles horaires supposés.

REMARQUE.

CEtte méthode a plusieurs avantages. 1.° Elle est à l'abri des réfractions qui troublent si fort les autres méthodes. 2.° Elle ne dépend en aucune maniere de la division des Instrumens, toujours suspecte ; puisqu'on peut avoir le tems par une bonne pendule, & par des hauteurs égales avant & après midi, sans connoître ces hauteurs. 3.° Elle fournit quatre manieres différentes de déterminer la latitude ; en sorte que si l'on ne trouve pas la même latitude par ces quatre méthodes, on est assuré que l'on a fait quelque erreur dans quelqu'une des huit observations ; & si les différences ne sont pas d'une minute, on a la vraie latitude à quelques secondes près, en prenant un milieu entre les quatre résultats. 4.° Cette méthode ne dépend ni de l'ascension droite ni de la déclinaison des deux Etoiles ; elle les donne immédiatement. 5.°

Elle

Elle peut servir à déterminer exactement & sans paralaxe la position de la Lune, des Planétes & des Comètes. 6°. Elle est pourtant en partie impraticable à la Mer, où l'on ne peut pas observer le passage des Etoiles par deux Azimuths, & où d'ailleurs on connoit assez la déclinaison dee Etoiles sans la chercher par cette méthode : Aussi nous ne l'avons développee que pour n'omettre aucun des Problémes de M. de Maupertuis qui peuvent se résoudre par le calcul logarithmique, & pour ne pas borner à la Mer l'utilité de cet ouvrage. On peut néanmoins à la Mer employer utilement une partie de cette méthode, qui est de faire passer deux Etoiles connues par deux Almicantaraths inconnus, ou deux hauteurs égales, observant leurs angles horaires à chaque passage, & déterminer la latitude du lieu par les deux dernières analogies dont nous avons donné le modéle ; les deux résultats se serviront réciproquement de preuve, ou se compenseront, en prenant un milieu, s'il y a de la différence.

CHAPITRE V.

Correction des erreurs qui résultent des Observations, dans le calcul des Problémes Astronomiques, avec la maniére de déterminer les circonstances où l'on s'expose à la moindre erreur.

Fig. 23 LE calcul des Problémes Astronomiques se réduit presque toujours à un triangle sphérique AZP, (fig. 23) où l'on a un côté constant AP que l'on connoit par les Tables. Il en faut excepter le cas où l'on cherche la déclinaison d'un Astre; le côté AP n'est pas constant alors, mais on a d'autres quantités connues & constantes. On en suppose toujours deux, & l'on fait varier les autres, pour sçavoir à quelle erreur on s'expose par le défaut des Observations. Voici les Regles de ces variations, que M^r^. *Cotes* a démontrées, en les supposant très-petites, & que j'applique à ce triangle.

1^e^. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est invariable, avec l'un des angles adjacents* A *ou* P.

1. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, est à celle du côté opposé à cet angle, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté invariable. Par exemple, si AP & l'angle A sont invariables, la variation du côté AZ, est à celle de ZP, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z. De même, si AP & l'angle P sont invariables, la variation de ZP est à celle de AZ, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z.

2. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle de l'angle opposé à ce côté, comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle cons-

tant. Par exemple, l'angle A & le côté AP étant invariables, la variation de l'autre angle P adjacent au côté AP, est à celle de l'angle Z opposé au côté AP, comme le rayon est au cosinus du côté PZ opposé à l'angle constant A.

3. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle du côté opposé à l'angle invariable, comme la tangente de l'angle opposè au côte invariable, est au sinus du côté opposé à l'angle constant. Ainsi l'angle A & le côté AP étant constants, la variation de l'autre angle P est à celle du côté PZ opposé à l'angle constant, comme la tangente de l'angle Z est au sinus du côté PZ.

4. La variation de l'autre côté adjacent à l'angle constant, est à celle de l'angle opposé au côté invariable; comme la tangante du côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté invariable.

5. La variation de l'autre angle adjacent au côté invariable, est à celle de l'autre côté adjacent à l'angle invariable, comme le sinus de l'angle opposé au côté invariable, est au sinus du côté opposé à l'angle constant. Ainsi l'angle A & le côté AP subsistans, la variations, de l'autre angle P est à celle du côté AZ, comme le sinus de l'angle Z est au sinus du côté PZ.

6. La variation de l'angle opposé au côté invariable, est à celle du côté opposé à l'angle invariable, comme la tangente de cet angle est à la tangente de ce côté. Ainsi A & AP étant constans, la variation de l'angle Z est à celle de PZ, comme la tangente de l'angle Z est à la rangente de PZ.

2^e^. Regle.

Lorsque l'un des côtés AP *est variable, avec l'angle* Z *qui lui est opposé.*

1. La variation de l'un des deux autres angles est à celle du côté opposé à cet angle, comme la tangente de cet angle est à la tangente de ce côté. Par exemple Z &

AP subsistans, la variation de l'angle P est à celle du côté AZ, comme la tangente de l'angle P est à la tangente du côté AZ.

2. Les variations des deux autres côtés sont entr'elles, comme les cosinus des angles opposés à ces côtés.

3. Les variations des deux autres angles sont entr'elles, comme les cosinus des côtés qui leur sont opposés.

4. La variation de l'un des deux autres côtés est à celle de l'angle compris par ce côté & par le côté invariable, comme le produit de la tangente par le cosinus de ce côté, est au produit de la tangente de l'angle opposé à ce côté, par le cosinus du 3^e^ côté. Par exemple Z & AP étant invariables, la variation du côté AZ est à celle de l'angle A compris entre AP & AZ, comme le produit de la tangente du côté AZ par le cosinus du même côté, est au produit de la tangente de l'angle P par le cosinus du 3^e^ côté PZ.

3^e^ Regle.

Lorsque deux côtés sont invariables, comme AP *&* PZ.

1. La variation de l'angle compris par ces deux côtés, est à celle de l'un des deux autres angles, comme le produit du rayon par le sinus du côté opposé au premier angle, est au produit du sinus du côté opposé au second angle par le cosinus du troisième angle. Ainsi dans le cas des deux côtés constans AP & PZ, la variation de l'angle P compris entre ces deux côtés, est à celle de l'angle A, comme le produit du rayon par le sinus du côté AZ opposé à l'angle P, est au produit du sinus du côté PZ opposé à l'angle A par le cosinus du 3^e^ angle Z.

2. La variation du même angle compris par ces deux côtés est à celle du côté opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un des deux côtés par le sinus de l'autre angle adjacent à ce côté. Ainsi AP & PZ étant constans, la variation de l'angle P est à celle du

côté opposé AZ, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de PZ par le sinus de l'angle Z, ou, au produit du sinus de AP par le sinus de l'angle A.

3. La variation de l'un des deux angles opposés aux côtés constans, est à celle du troisième côté, comme la cotangente de l'autre angle opposé à l'autre côté constant, est au sinus du troisième côté. Ainsi la variation de l'angle A est à la variation du 3^e^ côté AZ, comme la cotangente de l'angle Z est au sinus du côté AZ.

4. Les variations des angles opposés aux côtés constans sont entre elles, comme les tangentes des mêmes angles.

4^e^. Regle.

Lorsque deux angles restent invariables.

1. La variation du côté compris par les deux angles constans, est à celle de l'un des deux autres côtés, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle opposé au premier côté, est au produit du sinus de l'angle opposé à l'autre côté par le cosinus du 3^e^ côté. Ainsi les angles P & A étant constans, la variation du côté AP compris entre A & P, est à celle du côté PZ, comme le produit du rayon par le sinus de l'angle Z opposé au côté AP, est au produit du sinus de l'angle A opposé à PZ par le cosinus du 3^e^ côté AZ.

2. La variation du même côté compris entre les deux angles constans, est à celle de l'angle opposé, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'un de ces deux angles par le sinus du côté adjacent à cet angle. Ainsi P & A subsistans, la variation de AP est à celle de l'angle opposé Z, comme le quarré du rayon est au produit du sinus de l'angle A par le sinus du côté AZ, ou du sinus de l'angle P par le sinus du côté PZ.

3. La variation de l'un des côtés opposés aux angles constans, est à celle du 3^e^ angle, comme la cotangente de l'autre côté opposé à l'autre angle invariable, est

au sinus du 3[e] angle. Ainsi A & P étant invariables, la variation de PZ est à celle du 3[e] angle Z, comme la cotangente de AZ est au sinus de l'angle Z.

4. Les variations des côtés opposés aux angles constans sont entr'elles, comme les tangentes des mêmes côtés.

Ces quatre Regles renferment toutes les variations des triangles sphériques, en ne supposant que deux de leurs parties invariables. Leur application fera voir jusqu'à quel point on peut compter sur le calcul des Problémes Astronomiques. Si un Instrument ne donne la hauteur d'un Astre, qu'à une minute près, on verra le rapport qu'aura cette minute d'erreur, avec l'incertitude de l'heure, de la latitude, ou de l'angle azimuthal qu'on aura conclu par l'observation, tout le reste étant supposé exact.

Un autre avantage de ces regles, c'est qu'elles déterminent presque toujours sans calcul les circonstances où il faut faire l'observation, afin que les erreurs inévitables n'y influent que le moins qu'il sera possible. Nous allons en faire voir l'usage dans différens Problémes.

PROBLEME I.

La déclinaison étant donnée avec l'angle horaire P, *trouver à quelle erreur on s'expose dans le calcul de la latitude, par le défaut de la hauteur, & quelle est la hauteur la hauteur la plus propre à cette observation ?*

PAr l'Art. 1. de la 1[e] Regle, la variation de ZP, ou de la latitude, est à celle de la hauteur, ou de la distance AZ de l'Astre au Zénith, comme le rayon est au cosinus de l'angle Z opposé au côté invariable AP.

Donc plus le cosinus de l'angle azimuthal Z sera grand, plus l'erreur dans le calcul de la latitude sera petite.

Dans le Méridien, ou l'angle Z est nul, son cosinus égal au rayon, est aussi grand qu'il peut l'être. Donc l'observation de la hauteur Méridienne, est celle qui

produit la moindre erreur dans la latitude, tout le reste étant égal.

Mais on ne peut pas toujours observer la hauteur du Soleil à midi, & l'angle Z devient toujours plus grand, à mesure que l'Astre s'en éloigne, jusques à son passage par le premier vertical, où l'angle Z étant de 90.°, son cosinus est zero. Donc la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'heure étant donnée, est celle qui convient le moins pour déterminer la latitude. Donc on ne sçauroit trop s'éloigner du premier vertical.

Cependant l'erreur n'est pas infinie dans le premier vertical, comme cela semble suivre de la proportion, & de ce que le rayon est infiniment plus grand que le cosinus de 90.°; mais on ne peut pas dans ce cas supposer aucune erreur dans la hauteur, puisque les angles P & Z étant donnés & constans avec le côté AP, tout le reste par là dévient invariable.

Exemple d'une grande erreur dans la latitude.

La hauteur du Soleil à 6 heures a été trouvée 15° 16′ 4″, sa déclinaison étant 19° 39′ 10″, & sur ces deux élémens on a trouvé son Azimuth 77° 28′ 30″ & la latitude 51° 32′. On demande à quelle erreur on s'oppose dans la latitude pour 10′ d'erreur dans la hauteur?

Comme le cos. de l'angle Z,	77° 28′ 30″ Compl. arith.	0.663809
: Au rayon :: l'erreur de 10 minutes		1.000000
: A celle de la latitude	46′,111 = 46′ 7″	1.663809

On peut s'en convaincre par expérience; car si l'on suppose la hauteur du Soleil 15° 26′, plus grande que la premiere de 10°, on dira;

Comme le sin. de la déclin.	19° 39′ 10″	Compl. arit.	0.473248
: est au rayon :: le sin. de la haut.	15 26		9.425073
: Au sinus de la latitude	52 18		9.898321
La premiere latitude étoit	51 32		
L'erreur est donc	0 46		

PROBLEME II.

La déclinaiſon étant donnée avec l'angle horaire, trouver à quelle erreur on s'expoſe dans la latitude par l'obſervation de l'angle Azimuthal?

PAr le 4ᵉ Art. de la 1ᵉ Regle, la variation du côté ZP, ou de la latitude, eſt à celle de l'angle azimuthal Z oppoſé au côté conſtant AP, comme la tangente du côsé AZ, ou cotangente de la hauteur, eſt au ſinus de l'angle Z.

Atnſi l'heure étant donnée, lorſqu'on veut conclure la latitude par l'angle azimuthal, il faut obſerver l'Aſtre dans le premier vertical, où le ſinus de l'angle Z eſt le plus grand de tous; & l'on dira: comme le ſinus de l'angle azimuthal eſt à la cotangente de la hauteur de l'Aſtre, ainſi l'erreur de l'angle azimuthal eſt à celle de la latitude. Par conſéquent plus la hauteur de l'Aſtre ſera grande dans le premier vertical, plus l'erreur de la latitude conclue par l'angle azimuthal ſera petite.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″ Nord, on a trouvé ſon azimuth à 8ʰ 30′ du matin, de 72° 12′ 54″, & on en a conclu la latitude 51° 32′. On demande quelle eſt l'erreur de la latitude, ſi l'on s'eſt trompé de 10′ dans l'obſervation de l'angle azimuthal?

Comme le ſinus de l'angle azimuthal	72° 12′ 54″ Comp.ar.	0.021268
: A la cotang. de la hauteur calculée	38 18 46	0.102310
: : Ainſi l'erreur de 10 minutes		1.000000
: A l'erreur de la latitude	13′,29 = 13′ 17″	1.123578

On peut vérifier ce calcul, en ſuppoſant l'angle azimuthal plus grand ou plus petit de 10 minutes, & calculant de nouveau la latitude.

PROBLEME III.

La hauteur d'un Aſtre & ſa déclinaiſon étant données, trouver l'angle horaire le plus propre à déterminer ſon azimuth ?

PAr l'Art. 4 de la 3ᵉ Regle, comme la tangente de l'angle horaire eſt à la tangente de l'angle azimuthal, ainſi la variation de l'angle horaire eſt à celle de l'angle azimuthal. Donc les Aſtres qui ſe trouvent auprès du cercle de ſix heures ſont les plus propres à cette obſervation, toutes choſes égales d'ailleurs ; parce que la tangente de l'angle horaire étant preſque infinie, la variation ou l'erreur de l'angle azimuthal eſt la moindre qui ſe puiſſe.

Exemple.

La déclinaiſon du Soleil étant 19° 39′ 10″, & ſa hauteur à 6 heures étant 13° 20′ 8″, on a trouvé ſon azimuth 75° 25′ 50″. Quelle ſera l'erreur de cet azimuth, ſi l'on s'eſt trompé dans l'angle horaire de 15′ ?

Comme le coſinus de la hauteur	13° 20′ 8″		Compl. ar.	0.011871
: Au coſinus de la déclinaiſon	19 39 10			9.973935
: : Le ſinus de l'angle horaire	90 15 0			9.999996
: Au ſinus de l'Azimuth	75 25 49			9.985802

Où l'on voit que 15′ d'erreur dans l'angle horaire n'ont alteré l'azimuth que d'une ſeconde.

Il y a encore un autre avantage à obſerver les Aſtres qui ſont ſous le cercle horaire de ſix heures ; c'eſt que l'erreur qu'on peut commettre dans la latitude n'influe point dans le calcul de l'azimuth, puiſque la latitude, comme on le voit, n'entre point dans ce calcul.

PROBLEME IV.

La déclinaiſon d'un Aſtre & la latitude du lieu ètant données, trouver la hauteur de l'Aſtre la plus propre à determiner ſon angle horaire ?

PAr l'Art. 2 de la 3e Regle, la variation de l'angle horaire eſt à celle de la hauteur de l'Aſtre, comme le quarré du rayon eſt au produit du coſinus de la latitude par le ſinus de l'angle azimuthal, ou au produit du coſinus de la déclinaiſon par le ſinus de l'angle de poſition. Car ces deux produits ſont égaux.

Donc l'erreur de l'angle horaire ſera d'autant plus petite, que le ſinus de l'angle azimuthal ſera plus grand ; & comme le plus grand ſinus eſt celui de 90.°, la moindre erreur de l'angle horaire ſera celle d'un Aſtre dont on aura obſervé la hauteur dans le premier vertical, quelleque ſoit cette hauteur, grande ou petite.

Sous l'équateur, où la latitude eſt zero, & ſon complément 90°, ſi l'on ſe trompe d'une minute en obſervant la hauteur du Soleil dans le premier vertical, l'erreur de l'angle horaire ne ſera que de 4″ de tems, ou d'une minute de degré ; parce que les deux variations ſont égales : dans la latitude de 45°, l'erreur de $5'' \frac{2}{3}$ de tems : dans celle de 50° elle ſera de $6'' \frac{2}{3}$, & dàns celle de 55° de $6'' \frac{37}{38}$.

De même, lorſque l'angle de poſition eſt droit, *la* moindre erreur de l'angle horaire ſera celle de l'Aſtre obſervé dans cette poſition.

PROBLEME V.

La déclinaison & la latitude étant dsnnéés, trouver la hauteur la plus favorable pour déterminer l'Azimuth?

PAr l'Art. 3 de la 3e Regle, la variation de l'angle azimuthal est à celle de la hauteur, comme la cotangente de l'angle de position est au cosinus de la hauteur.

Donc la moindre erreur de l'azimuth qui résulte de la hauteur d'un Astre, est lorsque l'angle de position est de 90°. Or par le 1er Cas des triangles rectangles, l'angle A (Fig.23) étant droit, le cosinus de PA, sinus de la déclinaison, est au rayon, comme le cosinus de ZP, sinus de la latitude, est au cosinus de ZA, sinus de la hauteur de de l'Astre. Fig. 23.

Plusieurs Aureurs ont démontré cette analogie par le calcul différentiel, en observant que tous les Astres, qui dans leur mouvement diurne passent entre le pole & le zénith, ont avant & après leur passage par le Méridien, une petite portion de leur parallèle qui se confond avec l'azimuth, leur cours étant alors perpendiculaire à l'horison ; ce qui fait qu'ils montent ou descendent, sans changer sensiblement d'azimuth, & que par conséquent on peut s'y tromper dans l'observation de la hauteur, sans que l'erreur influe sur la détermination de l'azimuth.

Il est évident que l'angle azimuthal qui répond à chaque partie du cercle que l'Astre décrit, doit croitre jusqu'à ce qu'il soit parvenu à cette partie qui est commune au parallèle & à l'azimuth, & que cet angle décroit aussi-tôt après. Il faut douc chercher le plus grand angle azimuthal. C'est ce qu'à fait M. de Maupertuis dans le Probl. X. de l'*Astronomie Nautique*. Nous trouvons la même chose sans ce grand appareil de calcul. Car l'angle A de position (fig. 49) étant droit, l'arc du parallèle Fig. 49

ſe confond avec le verrical ZA. On doit donc trouver la diſtance d'un Aſtre au Zénith, ou ſa hauteur, & le plus grand angle Z par le 1er Cas des triangles rectangles.

Quant aux Aſtres qui ne paſſent pas entre le Zénith & le pole, le plus grand angle de poſition eſt celui du 1er vertical avec le cercle de déclinaiſon. Car le ſinus de l'angle A, eſt au ſinus de ZP, comme le ſinus de l'angle Z eſt au ſinns de AP. Donc ZP & AP étant conſtans & invariables, le ſinus de l'angle A eſt le plus grand de tous, lorſque celui de l'angle Z eſt égal au rayon. Donc il faut obſetver ces Aſtres dans le premier vertical, pour avoir la moindre erreur dans l'azimuth.

Exemple.

La latitude étant 51° 32′ Nord, la déclinaiſon du Soleil 19° 39′ 10″ Nord, nous avons trouvé ſa hauteur dans le 1er vertical 25° 26′ 20″, & l'angle de poſition 41° 20′ 27″. On demande l'erreur de l'azimuth, qui réſulteroit de l'erreur de 2′ dans l'obſervation de la hauteur ?

Le coſinus de la hauteur	25° 26′ 20″ Comp. ar.	0.044291
: A la cotang. de l'angle de poſition A	41 20 27	0.055623
:: L'erreur de la hauteur 2′		0.301030
: A l'érreur de l'angle azimuthal 2′ ½		0.400944

PROBLEME VI.

La réfraction horiſontale étant donnée, trouver combien elle affecte l'amplitude d'un Aſtre, & le tems de ſon lever & de ſon coucher apparens ?

LA variation de la hauteur qui eſt ici la réfraction horiſontale, eſt à la variation de l'amplitude ou de l'azimuth, comme le rayon, qui eſt le coſinus de la hauteur apparente, eſt à la cotangente de l'angle de poſition. C'eſt la Regle inverſe du Probléme précédent.

Fig. 23. Par le 2d Art. de la 3e Regle, la variation de l'angle ho-

raire est à la réfraction horisontale, comme le quarré du rayon est au produit du cosinus de la latitude par le sinus de l'angle azimuthal, ou par le cosinus de l'amplitude.

Exemple.

La réfraction horisontale étant de 32′, la latitude Nord 43° 18′, la déclinaison Sud 19° 39′ 10″, le Soleil a paru se coucher à 4ʰ 44′ 38″ & son amplitude apparente a été 26° 57′ 36″. On demande la vraie amplitude & le vrai tems de son coucher?

Le produit du cos. de la lat.	43° 18′ 0″	Comp. ar.	0.138004
Par le cos. de l'amplitude observée	26 57 36	Comp. ar.	0.049965
: Au quarré du rayon : : la réfraction horisontale 32′			1.505150
: A la variation de l'angle horaire 49′, 33 = 49′ 20″			1.693119

Le tems apparent du coucher étoit en degrés 71° 9′ 30″. D'où il faut retrancher la variation, parce que le Soleil étoit couché alors, & on aura 70° 20′ 10″, & en tems 4ʰ 41′ 20″ ⅔.

Pour trouver l'amplitude vraie, je cherche d'abord l'angle de position, en disant :

Le sin. de ZA (*fig.* 23)	90° 32′ 0″	Compl. arithm.	0.000019
: Au sinus de ZPA	71 9 30		9.976081
: : Le sinus de ZP	46 42 0		9.861996
: Au sinus de l'angle A	43 32 8		9.838096
Ensuite, le rayon : à la cotang. de l'angle A			0.022210
: : La réfraction horisontale 32′			1.505150
: A la variation de l'amplitude 33′,679 = 33′ 41″			1.527360

Corollaire.

Si l'on connoit par une horloge bien reglée le tems du coucher apparent du Soleil, & par le calcul ordinaire le tems du vrai coucher, la différence des tems donnera la réfraction horisontale, en faisant : comme le quarré du rayon est au produit du cosinus de la latitude par le co-

ſinus de l'amplitude, ainſi la différence des tems eſt à la réfraction horiſontale.

PROBLEME VII.

La préceſſion des Equinoxes etant donnée, avec la déclinaiſon actuelle d'un Aſtre & ſon aſcenſion droite, trouver la variation de ſa déclinaiſon & de ſon aſcenſion droite?

Fig. 50 SOit (fig. 50) P le pole du Monde, Π le pole de l'Ecliptique, A l'aſtre; PΠ ſera une portion du colure des Solſtices égale à 23° 28′ 20″, qui eſt l'obliquité de l'écliptique. PA ſera le complément de la déclinaiſon de l'Aſtre; l'angle APΠ ſera ſon aſcenſion droite depuis le colure des Solſtices, & PΠA ſa longitude depuis le même colure. La préceſſion des Equinoxes n'eſt autre choſe que l'angle Π, qui croit toutes les années de l'Oueſt à l'Eſt de 50″, parce que l'Equinoxe recule d'autant. Or par le 2d Article de la 3e Regle, la variation de l'angle Π, ou la préceſſion des Equinoxes dans un tems donné, eſt à la variation de PA, ou de la déclinaiſon, comme le quarré du rayon eſt au produit du ſinus de PΠ, 23° 28′ 20″, par le ſinus de l'aſcenſion droite APΠ.

Exemple.

L'aſcenſion droite P de l'étoile polaire étoit au commencement de 1760, de 11° 6′ 4″ depuis le colure des Equinoxes, & de 78° 53′ 56″ depuis le colure PΠ des Solſtices, l'une étant complément de l'autre. Sa déclinaiſon étoit alors de 88° 1′ 19″. On demande ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon pour le commencement de 1764?

1°. Pour trouver ſa déclinaiſon, qui va toutes les années en croiſſant, on dira:

Comme le quarré du rayon est au produit du sin. de	23° 28′ 20″		9.600215
Par le sinus de l'ascension droite P	78 53 56		9.991797
Ainsi la précession des Equinoxes dans 4 ans, 200″			2.301030
Est à la variation de la décl. dans le même tems, 78″,17=1′ 18″			1.893042
Ce qui étant ajouté à la déclin. pour 1760		88° 1 19	
Donne la déclinaison pour 1764		88 2 37	
& la distance au Pole		1 57 23	

2°. Pour trouver l'escension, il faudroit employer le 1[er] article de la 3[e] Regle, qui suppose la connoissance de l'angle de position A. Mais il est plus court de chercher immédiatement l'angle P, par le 1[er] Cas des triangles obliquangles, puisqu'on a maintenant les trois côtés du triangle APΠ.

AP =	1° 57′ 23″	Distance de l'Etoile au Pole	
AΠ =	23 55 39	Compl. de la latitude constante de l'Etoile.	
PΠ =	23 28 20	Distance des deux poles P A Π	
Somme =	49 21 22		
½ somme =	24 40 41		
— AP =	1 57 23	Compl. ar. du sinus de AP	1.466752
1[er] reste =	22 43 18	Sinus du 1[er] reste	9.586874
— PΠ =	23 28 20	Compl. arithm. du sinus de PΠ	0,399785
2[d] reste =	1 12 21	Sinus du 2[d] reste	8.323132
		Somme	9.776543
½ somme, sin de la moitié de APΠ, 50° 38′ 20″			9.888271
APΠ =	101 16 40	depuis le colure des Solst.	
Ascension droite =	11 16 40	depuis le colure des Equin.	

PROBLEME VIII.

Réduire les distances apparentes des Etoiles à la Lune, à leurs distances véritables, & réciproquement.

SOit (fig. 51) L la Lune, E l'étoile, Z le zénith, EL la distance apparente de l'étoile à la Lune, *el* leur vraie distance qui abaisse l'étoile au-dessous de son lieu apparent E, & éléve la Lune en corrigeant la parallaxe Fig. 51.

toujours plus grande que la réfraction. Les véritables distances au Zénith seront Z*e*, & Z*l*. L'arc E*e* sera la réfraction de l'étoile qui la fait monter en E; & l'arc L*l* sera la parallaxe moins la réfraction de la Lune, qui la fait descendre en L.

L'angle Z n'étant affecté ni par la réfraction ni par la parallaxe & restant invariable, Mr. l'Abbé de la Caille emploie le 1er Article de la 1e Regle des variations, pour trouver la vraie distance *e l* de l'Etoile à la Lune. Mais comme cette méthode suppose le calcul des angles E & L; il vaut mieux ne calculer que l'angle Z, dans le triangle ELZ, par les trois distances apparentes EZ, LZ, EL; ce qui donnera le triangle E*l e*, où l'on a *e*Z par la réfraction, Z*l* par la parallaxe moins la réfraction de la Lune, & l'angle compris Z. On aura donc par le 3e Cas des obliquangles, la vraie distance *e l*.

Exemple.

La distance apparente EL d'une Etoile à la Lune a été trouvée de 8° avec un Octant; la hauteur du centre de la Lune étoit en même tems de 5°, sa parallaxe de 54′ & sa réfraction de 9′; la hauteur de l'Etoile de 11° & sa réfraction de 5′. On demande la vraie distance *e l*?

LZ =	85°	Dist. appar. de la Lune au Zénith	
EZ =	79	Dist. appar. de l'Etoile au Zénith	
EL =	8	Dist. appar. de l'Etoile à la Lune	
Somme	172		
½ somme	86		
— LZ =	85	Compl. arithm. du sinus de LZ	0.001656
1er reste =	1	Sinus du 1er reste	8.241855
— EZ =	79	Compl. arithm. du sinus de EZ	0.008053
2d reste =	7	Sinus du 2d reste	9.085894
		Somme	7.337458
½ somme, sinus de ½ EZL		2° 40′ 23″	8.668729
Donc angle Z =		5 20 46	

Z*e* =

$Ze = 79° 5'$ vraie distance de l'étoile au Zénith. $Zl =$ $84° 15'$ vraie dist. de la Lune.

1. Le Rayon est au cos. de l'angle Z	5° 20' 46"		9.998106
: : La tangente de Zl	84 15 0		0.996993
: A la tangente d'un arc M	84 13 30		0.995099
	$- Ze =$ 79 5 0		
	N = 5 8 30		
2. Le cosinus de M	84° 13' 30"	Compl. arith.	0.997307
: Au cosinus de N	5 8 30		9.998248
: : Le cosinus de Zl	84 15 0		9.000816
Au cos. de la vraie dist. $el =$	7 23 46		9.996371

Réciproquement si la vraie distance el est donnée, les trois côtés du triangle elZ donneront l'angle Z, & l'on trouvera la distance apparenre EL.

PROBLEME IX.

Trouver l'effet de la variation de l'obliquité de l'Ecliptique sur les longitudes, les latitudes les déclinaisons & les ascensions droites des Astres.

L'Observation des ascensions droites & des déclinaisons étant indépendante de l'obliquité de l'Ecliptique, l'angle APπ de l'ascension droite (fig. 50) & le côté PA de la déclinaison seront invariables, pendant que l'obliquité Pπ, l'angle π des longitudes, & le côté πA des latitudes varieront. Donc par l'Art. 1 de la 1ere Regle, on trouvera la variation de la latitude Aπ, en disant : comme le rayon est au cosinus de l'angle π de la longitude, ainsi la variation de l'obliquité Pπ, est à la variation du côté πA, ou de la latitude. Fig. 50.

Et par l'Art. 4 de la même Regle, la cotangente de la latitude, ou la tangente de πA, est au sinus de la longitude π depuis le colure des Solstices, comme la varia-

tion de l'obliquité PΠ est à la variation de l'angle Π des longitudes.

PROBLEME X.

La parallaxe verticale d'une Planète étant donnée, trouver sa parallaxe en longitude & en latitude ?

LA *parallaxe* étant la différence entre le lieu vrai d'une Planéte, ou vû du centre de la Terre, & son lieu apparent, où vû de la surface de la Terre ; elle altére la longitude, la latitude, la déclinaison, l'ascension droite & la hauteur des Astres. Nous avons expliqué pag. 86. la parallaxe *verticale* ou *de hauteur*. La *parallaxe en longitude* est la différence entre la *longitude vraie* & la *longitude apparente*. Il en est de même de la *parallaxe en latitude*, *en ascension droite*, &c.

Soit (fig. 52) Z le Zénith, Π le pole de l'Ecliptique,
Fig. 52. A la Planéte. L'angle Z & le côté ZΠ ne variant point par l'action de la parallaxe, qui abaisse l'Astre A dans le vertical ZA, on aura par le 1^er^ art. de la 1^re^ Regle, le rayon est au cosinus de l'angle de position A, comme la variation de ZA, c'est-à-dire, la parallaxe verticale, est à la variation de ΠA, ou à la parallaxe de latitude.

Et par le 5^e^ Art. de la même Regle, le sinus de ΠA, ou le cosinus de la latitude, est au sinus de l'angle A, comme la parallaxe verticale, ou variation de ZA, est à la variation de l'angle Π, ou à la parallaxe de longitude.

PROBLEME XI.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales du Soleil, lorsque sa déclinaison a varié dans l'intervalle des deux observations? C'est le Probl. 12 de l'Astron. Naut.

POur déterminer l'instant du midi vrai, on observe après midi des hauteurs du Soleil égales à celles qu'on a observées le matin, en marquant le tems de chaque observations. Si la déclinaison du Soleil n'a pas varié sensiblement dans l'intervalle des observations égales & correspondantes, on partage en deux également cet intervalle, & l'on a le tems marqué par l'horloge au moment du passage du Soleil par le Méridien. On peut par cette méthode trouver exactement le passage des Etoiles par le Méridien, parce que leur déclinaison ne souffre aucune variation sensible dans 24 heures.

La déclinaison du Soleil varie peu dans le tems des Solstices; mais elle varie beaucoup dans les Eqninoxes, & cette variation exige une correction pour le midi. soient (Fig. 23) Z le Zénith, A le Soleil, P le pole, ZPA Fig. 23. l'angle horaire pour chaque observation correspondante. Par le 3^e^ Art de la 3^e^ Regle, le sinus de PA, ou le cosinus de la déclinaison, est à la cotangente de l'angle de position A, comme la variation de la déclinaison, ou de PA, depuis midi, est à la variation de l'angle horaire ZPA, parce que les côtés ZP & ZA sont invariables.

Dans nos climats, lorsque le Soleil est dans les signes ascendans, c'est-à-dire, lorsqu'il s'approche de notre Zénith, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait, si sa déclinaison n'avoit pas changé; & lorsqu'il est dans les signes descendans, il y arrive plutôt. Le milieu du tems entre les observations correspondantes ne répond pas exactement à midi; & il faut y ajouter la variation lorsque le Soleil s'éloigne Zénith, & la retrancher lorsqu'il s'en approche.

Exemple I.

Le Soleil ayant en Janvier à midi 20° 10′ 20″ de déclinaiſon méridionale, à 50° de latitude Nord, on a obſervé ſa hauteur le matin à 9ʰ 28′ 17″, & le ſoir il eſt revenu à la même hauteur à 2ʰ 38′ 41″. On demande le tems de l'horloge au moment de ſon paſſage par le Méridien?

Ajoutez à	9ʰ 28′ 17″
2ʰ, ou plutôt	14 38 41
Somme	24 6 58

La ½ ſomme 12ʰ 3′ 29″ feroit le tems que l'horloge marquoit au moment de midi, ſi la déclinaiſon du Soleil n'avoit pas varié dans l'intervalle des deux obſervations. Mais on trouve par les Tables, que la différence des déclinaiſons étoit dans cet intervalle, de 2′ 43″ & par conſéquent la demi-différence, ou la variation croiſſante depuis midi 1′ 21″½, ou 81″½. & le demi-intervalle 2ʰ 35′ 12″ en tems, ou 38° 48′ 0″ en degrés.

Pour corriger cette obſervation, il nous faut d'abord trouver l'angle de poſition A du triangle ZPA, dans lequel nous avons deux côtés & l'angle horaire = 38° 48′ 0″.
½ ZPA = 19 24 0.

PA =	110° 10′ 20″
PZ =	40 0 0
Somme	150 10 20
Differ.	70 10 20
½ ſomme	75 5 10
½ differ.	35 5 10

1. Le ſinus de la ½ ſomme	Compl. arithm.	0.014882
: Au ſinus de la ½ differ.		9.759522
:: La cotang. de ½ ZPA		0.453265
: A la tang. de la ½ differ. des angles 59° 22′ 26″		0.227669

2. Le cos. de la ½ somme des côtés	Compl. arithm.	0.589447
: Au cos. de leur ½ differ.		9.912907
: : La cotang. de ½ ZPA		0.453265
: A la tang. de la ½ somme des angles	83° 40′ 47″	0.955619
— la demi-differ.	59 22 26	
Le moindre angle A =	24 18 21	

3. Le cosinus de la déclinaison	20° 10′ 20″	Compl. ar.	0.027492
: A la cot. de l'angle de position A	24 18 21		0.345208
: : La variation de la déclinaison	81″,5		1.911158
: A la correct. cherchée 192″,24 = 3′ 12″¼, & en tems 12″ 49‴			2.283858

Il faut la soustraire du midi trouvé 12^h 3′ 29″ 0‴, parce que le Soleil est dans les signes ascendans, & l'on aura le vrai midi à 12 3′ 16″ en négligeant quelques tierces.

Exemple 2.

La première observation a été faite le 22 Septembre à 9 heures du matin, & la seconde à 3 heures du soir à des hauteurs égales ; la latitude Nord étant 43° 17′ 40″, & la déclinaison du Soleil à midi 0° 2′ 20″ Nord. On demandoit le tems que marquoit l'horloge à midi.

L'intervalle des observations est ici de 6 heures, & le demi-intervalle de 3^h qui valent 45°. S'il n'y avoit point eu de variation dans la déclinaison du Soleil, l'horloge auroit marqué 12 heures à midi. Mais dans le demi-intervalle de 3 heures, la variation de la déclinaison étoit ce jour-là de 2′ 56″ = 176″.

PA =	89° 57′ 40″	Compl. de la déclin. Nord.
PZ =	46 42 20	Compl. de la latitude Nord.
Somme	136 40 0	Angle horaire ZPA = 45°
Differ.	43 15 20	½ ZPA = 22 30′
½ somme	68 20 0	
½ differ.	21 37 40	

1. Le sinus de la ½ somme des côtés	68° 20′ 0″	Comp. ar.	0.031822
: Au sinus de leur ½ différence	21 37 40		9.566526
: : La cotang. de ½ ZPA	22 30 0		0.382776
: A la tang. de la ½ differ. des angles	43 45 19		9.981124

2. Le cosinus de la ½ somme des côtés		Compl. arithm.	0.432731
: Au cosinus de leur ½ différence			9.968295
: : La cotang. de ½ ZPA			0.382776
: A la tang. de la ½ somme des angles	80° 39′ 28″		0.783802
— la ½ différence	43 45 19		
L'angle de position A =	36 54 9		

3. Le cosinus de la déclinaison	0° 2′ 20″	Comp. ar.	0.000000
: A la cotang. de l'angle A	36 54 9		0.124424
: : La variation de la déclinaison 176″			2.245513
: A la correction 234″ 389‴ = 3′ 54″ ½			2,369937

Et en tems 15″ 37‴, qu'il faut ajouter à 12 heures, parce que le Soleil étoit dans les signes descendans.

La correction que donne Mr. *de Maupertuis* d'après Mr. *Euler* peut s'exprimer en cette manière : le petit arc de l'Equateur qu'il faut ajouter ou soustraire, est égal au produit du petit arc du cercle de déclinaison (ou de la variation) par la différence de deux quantités, qui sont la tangente de la latitude divisée par le sinus de l'angle horaire, & la tangente de la déclinaison divisée par la tangente de l'angle. Ainsi dans le 1er Exemple nous avons.

Tang. de la latitude 50°	0.0761865		
— sin. de l'angle horaire 38° 48′	9.7969930	*Nombres naturels.*	
Logar. de la 1e partie	0.2791935	1e Partie =	1,9019253
Tang. de la décl. 20° 10′ 20″	9.5651132	2d Partie =	0,4569261
— tang. de l'angle hor. 38° 48′ 0″	9.9052672	Somme =	2,3588514
Logar. de la 2e partie	9.6598460		
Logar. de la somme des 2 parties	0.3727005		
Logar. de la variation 81″,5	1.9111577		
Logar. de la correction	2.2838582 la même que ci-devant.		

On a pris la somme, au lieu de la différence des deux parties, parce que la déclinaison est Méridionale.

PROBLEME XII.

Trouver par obſervation l'angle de poſition A ? (Fig. 23). Fig. 23.

OBſervez le tems que le Soleil emploie à monter ou à deſcendre de tout ſon diamètre, & par le 2d Art. de la 3e Regle, l'intervalle du tems, qui eſt la variation de l'angle P, eſt au diamètre du Soleil, qui eſt la variation de ZA, comme le quarré du rayon, eſt au produit du ſinus de AP par le ſinus de l'angle A. Donc en renverſant cette analogie, on dira; comme le produit du coſinus de la déclinaiſon par le tems obſervé réduit en degrés, eſt au quarré du rayon, ainſi le Diamètre du Soleil eſt au ſinus de l'angle de poſition.

Cette méthode ne ſuppoſe ni la hauteur du Pole, ni l'heure de l'obſervation, ni même la hauteur du Soleil. Mr. l'Abbé *de la Caille* nous aſſure dans les Mémoires de l'Academie de 1741, qu'il l'a verifiée par un très-grand nombre d'obſervations qu'il a faites en différens endroits du Royaume & qu'il a calculées de deux manières différentes. A peine, dit-il, ai-je trouvé une demi-ſeconde de différence.

PROBLEME XIII.

Corriger le midi trouvé par deux hauteurs égales, lorſqu'on a navigué Eſt-Oueſt, *ſans changer de latitude.*

SOit (Fig. 53) P le Pole du monde, Z le zénith du Navire au moment de la 1e obſervation, Z" au moment de la 2e, les diſtances du Zénith au pole ayant été toujours égales, puiſqu'on n'a pas changé de latitude; il eſt évident que le Méridien PZ' déterminé par l'obſervation de deux hauteurs égales, coupera l'angle horaire ZPZ" correſpondant au chemin du Navire, en deux parties égales, ayant égard à la petite correction du Probl. XI. Mais Fig. 53.

ce tems appartient au Méridien où le Navire s'est trouvé dans ce moment ; de sorte que s'il s'est écoulé, par exemple, quatre heures entre les deux momens des hauteurs égales, & que le Navire ait parcouru dans cet intervalle un degré de longitude de l'Ouest à l'Est, il s'ensuit qu'il étoit midi deux heures avant la 2[e] observation, non pas sous le Méridien PZ″ où elle s'est faite, mais sous le Méridien PZ′ éloigné de PZ″ vers l'Ouest de 30′, qui valent 2′ des tems.

Donc on doit compter sous Z″2 heures & 2′ après midi au tems de la 2[e] observation, & sous Z au tems de la 1[e] 9[h] 58′ avant midi. Ce seroit tout le contraire, si l'on avoit fait route de l'Est à l'Ouest, sans changer de latitude.

PROBLEME XIV.

Corriger le midi trouvé par des hauteurs égales, lorsqu'on a navigué Nord & Sud, *sans changer de Méridien?*

Fig. 54. DAns le triangle ZPA (fig. 54). On suppose toujours la distance PA de l'Astre au pole constante, ou que du moins on a corrigé par le Probl. XI. l'effet de sa variation. La distance ZA du Soleil au Zénith a été observée la même avant & après le passage de cet Astre au Méridien. Mais la distance ZP du Zénith au pole ayant varié, & sa variation étant égale à la route du Navire du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, l'angle horaire a dû varier. Or par l'Art. 3 de la 3[e] Regle, la variation de l'angle P, est à celle du coté ZP, ou de la latitude, comme la cotangence de l'angle Z opposé au côté AP, est au sinus du côté ZP. On dira donc : comme le sinus de la latitude est à la cotangente de l'angle azimuthal, ainsi la variation trouvée de la latitude, ou de la route Nord & Sud, est à celle de l'angle horaire.

Exemple.

La hauteur du Soleil étant 20° 10′, ſa déclinaiſon Sud 19° 39′ 10″, on a trouvé par deux obſervations de hauteurs égales avant & après midi, que ſi la latitude n'avoit pas varié, l'angle horaire ZPA auroit été après midi 32° 54′ 28″, ou 2^h 11′ 38″, l'angle PZA 146° 58′ 16″ $\frac{2}{3}$ ſupplément de l'angle azimuthal, & la latitude 43° 18′ Nord. On demande quelle a été la variation de l'angle horaire, ou quelle eſt l'heure vraie de la 2^e obſervation, ſi le Navire a parcouru 18′ du Nord au Sud ?

Le coſinus de la latitude	43° 18′ 0″	Comp. arithm.	0.138004
: A la cotang. de l'angle Z	146 58 16 $\frac{2}{3}$		0.187006
: : La variation de la latitude 18′			1.255272
: A la variation de l'angle P, 38′,044 = 38′ 3″ & en tems 2′ 32″			1.580282

On voit que ZP ayant augmenté de 18′, & l'angle PZA étant obtus, AZ & AZ′ ſubſiſtant, le Soleil étant immobile en A, l'angle horaire ZPA a du augmenter de la quantité ZPZ′, c'eſt-à-dire, de 2′ 32″, & que le tems de la 2^e obſervation qui paroiſſoit être 2^h 11′ 38″, étoit réellement 2^h 14′ 10″.

Si l'on veut s'en aſſurer mieux, on calculera le nouveau triangle AZ′P, dont on a les trois côtés, AZ′ qui n'a pas varié, 69° 50′, AP = 109° 39′ 10″, & Z′P = 47° 0′. On trouvera APZ′ = 33° 31′ 58″, & en tems 2^h 14′ 8″, comme on l'avoit trouvé, à 2′ près ; ce calcul étant plus exact que le premier, qui ſuppoſe les variations très-petites.

Corollaire.

Si dans cet Exemple, le Navire avoit fait route entre le Sud & l'Oueſt, & que ſa latitude ayant diminué de 18′, ſa longitude eut diminué en même tems d'un degré, l'erreur auroit été par la latitude de 2′ 32″, & par la longitude de 2′, comme on là vu dans le Probléme précédent.

Donc en conséquence de ces deux mouvemens, il auroit fallu compter 4′ 32″ de plus, parce qu'ils concourent tous deux à augmenter l'angle horaire.

Si au contraire sa route avoit été entre le Sud & l'Est, l'erreur de 2′ provenant de la longitude auroit diminué d'autant celle de la latitude qui étoit de 2′ 32″; ainsi il n'auroit fallu ajouter à l'heure trouvée que 32″, & le tems de la 2^{e} observation auroit été 2^{h} 12′ 10″.

Cette correction est très-importante, sur tout dans la recherche des Longitudes.

CHAPITRE VI.

Manière de trouver la longitude en Mer, par l'Obſervation des Aſtres.

CE fameux Probléme ſe réduit à trouver l'heure qu'il eſt ſur le Navire, & en même tems l'heure qu'il eſt ſous un Méridien dont la longitude eſt connue. La différence des heures donnera la différence des Méridiens. Quant à l'heure du Méridien du Navire, l'Aſtronomie fournit divers moyens pour la déterminer à tous les inſtans, comme on l'a vu dans le Chapitre IV. Reſte donc à conſtruire une horloge, dont la marche uniforme malgré l'agitation de la Mer, conſerve toujours l'heure qu'il eſt ſous un autre Méridien, par exemple, ſous le Méridien du départ, ou bien à déterminer immédiatement cette différence des heures par les reſſources que préſente l'Aſtronomie. On n'aura rien à deſirer ſur la première méthode, lorſque l'Angleterre aura rendu publique la belle découverte de MM. *Harriſon*. Mais comme ce n'eſt point trop dans une affaire ſi importante à la Navigation, de réunir tous les moyens connus, nous rapporterons d'abord ce que l'on ſçait de l'invention de MM. *Harriſon* & de ſes ſuccés; après quoi nous expoſerons les ſecours que l'on peut tirer de l'Aſtronomie, pour ſuppléer à cette horloge, ou pour s'en ſervir plus utilement.

On publia en Angleterre en 1714, la 12[e] année du Regne de la Reine Anne, un acte du Parlement, par lequel la nation Britannique promit 20000 livres ſterling de recompenſe à celui qui découvriroit les longitudes en Mer à un demi-degré près ou 10 lieues marines; 15000 liv., ſi on ne les découvroit qu'à deux tiers de degré près; & 10000 à un degré près. On établit en même tems des Commiſſaires pour juger du mérite des recherches qui ſeroient préſentées

fur cet objet. Cette commiſſion fut nommée le Bureau des longitudes.

En conſéquence de ces encouragemens, Mr. *Jean Harriſon* fit en 1726 une Pendule qui pendant dix ans de ſuite ne s'écarta du ciel que d'environ une ſeconde par mois. Mr. *Martin Folkes* , Préſident de ſociété Royale en 1749 nous apprend que la première idée de Mr. *Harriſon* fut de faire mouvoir dans le bois les pivots de cuivre, ſans y emploier aucune goute d'huile, parce que l'huile en ſe raréfiant ou en ſe condenſant dérange les horloges, & oblige à les démonter de tems en tems pour les nettoyer & les remettre en mouvement.

Il s'apperçut enſuite qu'au lieu de faire engrainer les roues dans les pignons ſelon la méthode commune, il valoit mieux leur oppoſer des rouleaux cylindriques de bois, arrêtés par des pointes de cuivre à une diſtance convénable de l'axe des pignons. Il vint à bout par ce moyen de diminuer conſidérablement l'effet des frottemens.

Pour les détruire autant qu'il étoit poſſible, il appliqua aux palettes du Pendule, une eſpèce de charniere, qui empêchoit les palettes de gliſſer à l'ordinaire ſur les dents de cette roue.

Il fallut enſuite s'oppoſer aux differens effets de la chaleur & du froid qui allongent & raccourciſſent alternativement le Pendule ; ce qui rend ſes vibrations inégales. Il parvint à détruire ces inégalités par le moyen d'un chaſſis compoſé d'acier & de cuivre, ſemblable à peu près à un gril, de manière que la contraction & la dilatation inégale de ces deux métaux conſervoit toujours au centre de gravité du Pendule la même diſtance au point de ſuſpenſion. Ce chaſſis lui ſervoit de Pendule. Après un grand nombre d'expériences, il le rendit ſi parfait, qu'ayant placé en 1726 deux horloges ſemblables en différens endroits de ſa maiſon, elles ne varierent que d'une ſeconde dans un mois ; & les ayant enſuite réglées ſur une étoile fixe, elles ne varierent en dix ans que d'une minute.

Il s'apperçut bientôt que pour rendre ſes découvertes utiles à la Mer, il ne falloit pas que ſon premier moteur fut un

poid, mais un ressort, & que son régulateur devoit être un balancier & non un Pendule. Il employa deux balanciers placés dans le même plan, & il donna à leurs vibrations des directions contraires, afin que si quelque secousse du Navire dérangeoit un des deux balanciers, la même secousse fut favorable à l'autre.

Comme l'uniformité des vibrations dans les Montres dépend beaucoup du ressort spiral, M^r. *Harrison* s'est procuré cette égalité par quatre ressorts cylindriques de même force, qu'il a placés au-dessus & au-dessous des extrémités de chaque balancier.

On sçait que plus le ressort qui fait agir les balanciers est fort, & plus les vibrations sont promptes, & au contraire. D'où il suit que le froid augmentant la force des ressorts, comme la chaleur les affoiblit, il faut nécessairement que les Montres avancent ou retardent à proportion. Il remédia à cet inconvénient par le moyen d'un chassis composé d'acier & de cuivre, comme le Pendule dont nous avons parlé. Les dilatations inégales du fer & de l'acier conservoient aux ressorts la même force.

Il appliqua des palettes au balancier à peu près comme au Pendule, & il détermina autant qu'il étoit possible tous les frottemens. On montoit la Montre une fois le jour, & par un autre ressort on conservoit aux roues leur mouvement dans cet intervalle. Tout cet assemblage étoit suspendu dans le gout des compas de variation, mais avec beaucoup plus d'art.

Lorsque M. *Harrison* eut achevé cette Montre, il en fit l'essai dans un grand bâteau sur une riviere par un tems orageux. Le succès surpassa ses espérances. Il la transporta sur un Vaisseau jusqu'à Lisbonne, & de Lisbonne en Angleterre, & à l'entrée de la Manche elle donna exactement la différence entre le Méridien de Lisbonne & celui du Navire, tandis que l'estime s'en écartoit d'un degré & demi.

C'est sur le certificat qui lui en fut délivré, qu'il s'adressa aux Commissaires des longitudes, pour leur pro-

poser le projet qu'il avoit de construire une autre Montre plus petite que la première, aussi parfaite & moins embarrassante dans un Vaisseau. Il en fit une qu'il réduisit à la moitié de l'espace de la première. Il en a fait ensuite une troisième qui n'occupoit que quatre pieds quarrés. Ces deux dernières se sont trouvées plus parfaites que les premières, y ayant diminué le nombre des roues dont la multiplicité nuit à l'exactitude de leur marche. Il n'y a que deux roues dans l'une, & seulement une dans l'autre pour ce qui concerne la mesure uniforme du tems; les roues n'y sont emploiées que pour développer les ressorts, & par conséquent leurs frottemens ne nuisent point à l'égalité des vibrations.

En 1735 il obtint un certificat de tout ce que nous venons de rapporter, signé par MM. *Halley*, *Smith*, *Bradley*, *Machin* & *Graham*; c'étoient les principaux membres de la Société Royale. Ils déciderent que les principes de ces machines promettoient un grand degré d'exactitude.

En 1737 les Commissaires des longitudes l'exhorterent à poursuivre son entreprise, & lui donnerent une somme d'argent pour l'encourager & l'aider.

En 1739 M^r^. *Harrison* produisit sa seconde machine. On en fit diverses expériences, dont le résultat fut qu'elle étoit assez regulière & assez exacte, pour faire espérer qu'elle donneroit la longitude du Navire dans les limites de l'Acte du Parlement.

Ce succès encouragea M^r^. *Harrison*, & lui fit entreprendre une autre machine plus parfaite. Il la produisit en Janvier 1741, & douze membres de la Société Royale attesterent que cette 3^e^ machine étoit plus commode, plus simple que les deux premières, moins sujette à se déranger, & qu'elle pouvoit servir de modèle aux ouvriers pour en faire de semblables, ensorte que les Navires pourroient s'en procurer à un prix modique. » Notre avis donc, » ajoutent-ils, est que ces machines seront d'un excellent » usage, tant pour déterminer la longitude à la Mer,

» que pour corriger les cartes & la position des côtes;
» & nous ne sçaurions trop recommander M. *Harrison*
» aux Commissaires des longitudes, comme un homme
» qui mérite toute sorte d'encouragemens & de secours,
» pour l'aider à mettre la dernière main à cette troisième
» machine ».

Ce certificat fut signé par M. *Folkes* qui étoit alors Président de la Société Royale, par le Comte de *Macclesfield* qui l'est aujourd'hui, par le D^r. *Smith*, le D^r. *Bradley*, le Professeur *Calson*, MM. *George Graham* & *Guillaume Jones*, les D^rs. *Halley* & *Jurin*, le Lord *Charles Cavendish*, MM. *de Moivre* & *Jean Hedley*, le 16 Janvier 1742.

En 1749 sur l'exposé de M. *Folkes*, dont on a vu ci-devant l'extrait, la Société Royale accorda à M^r. *Harrison* une Médaille d'or, destinée à récompenser annuellement les plus belles découvertes.

En 1758 M^r. *Harrison* mit la dernière main à sa troisième machine, & en imagina une quatrième. Mais étant bien persuadé que la troisième étoit assez exacte pour mériter la plus haute récompense selon l'acte de la Reine Anne, il présenta un Mémoire aux Commissaires des longitudes, pour qu'il fut ordonné de faire l'essai de cet Instrument dans un voyage aux Isles Occidentales, conformément à l'acte du Parlement. Le 12 Mars 1761 il reçut ordre des Commissanres d'embarquer son fils *Guillaume* à *Portsmouth* avec la 3^e machine, sur le Vaisseau du Roi le *Dorsetshire*, Capitaine *Jean Campell*, qui devoit faire voile pour la *Jamaïque*. Mais ce Vaisseau ayant eu une autre distination, M. *Guillaume Harrison* après cinq mois de séjour à *Portsmouth*, revint à *Londres*.

Dans cet intervalle M^r. *Harrison* présenta un nouveau Mémoire aux Commissnires des longitudes, ce qui détermina ces Messieurs à demander l'avis de la Société Royale sur les mesures qu'il y avoit à prendre pour faire l'expérience de l'Instrument de M. *Harrison*. On délibera sur cette affaire dans les assemblées du 25 Juin & du 3 Juillet 1761, & l'on envoia le plan suivant aux Lords de l'Amirauté.

[1°. Il faut qu'on obſerve le tems vrai à *Portſmouth*, qu'on régle la Montre de M. *Harriſon* ſur ce tems vrai, & qu'on envoye aux Lords de l'Amirauté le détail exact de cette obſervation. M^r. *Robertſon*, Maître de l'Académie Royale à *Portſmouth* peut être chargé de cette opération.

2°. Il eſt à propos de nommer des témoins qui accompagnent M. *Harriſon* & qui ſoient préſens toutes le fois qu'ils viſitera ſa Montre. Quelques Officiers du Vaiſſeau ſuffiſent pour cette fonction.

3°. Il faut embarquer pour la *Jamaïque* avec M. *Harriſon*, un Obſervateur qui ſoit en état de prendre exactement le tems vrai, dès qu'on ſera arrivé à la *Jamaïque*, & qui marque le tems de la Montre. Cette obſervation doit être ſcellée & atteſtée, pour être envoyée aux Lords de l'Amirauté.

4°. Les Aſtronomes qu'on enverra à la *Jamaïque*, doivent y reſter pour obſerver les Eclipſes des Satellites de Jupiter, & pour déterminer par ce moyen la différence des longitudes, pendant qu'un autre Aſtronome fera des obſervations correſpondantes à *Portſmouth* ſur les mêmes Satellites. Il faudra auſſi ſceller ces obſervations, & les envoyer aux Lords de l'Amirauté. M^r. *Bliſſ*, Profeſſeur à *Oxford* veut bien ſe charger de cette opération à *Portſmouth*. La Société en propoſera inceſſamment un ou deux autres pour la *Jamaïque*.

Enfin on doit recommander au Bureau des longitudes, de faire enſorte que les Inſtrumens dont on ſe ſervira à *Portſmouth* & à la *Jamaïque*, ſoient de même force & de même longueur focale.

Ces Inſtrumens ſont celui des hauteurs égales, un téleſcope de réflexion de deux pieds de foïer, & une Pendule aſtronomique.. On demande auſſi qu'on marque dans un regître au moins une fois le Jour, les tems reſpectifs de la Pendule & de la Montre.]

Il eſt hors de doute que ſi ce plan avoit été communiqué à M. *Harriſon*, il n'auroit pas approuvé l'obſervation

tion des Satellites du Jupiter ; parce qu'il est prouvé par les observations des plus habiles Astronomes, qu'en observant les éclipses correspondantes du premier Satellite, on y a trouvé une erreur de plus de deux minutes de tems, qui valent plus d'un demi-degré, au lieu que pour le 1^er^ prix des longitudes auquel M^r^. *Harrison* prétend, il faut que sa Montre n'expose pas à une erreur d'un demi-degré. Si l'on observoit dans les deux endroits le même Satellite à la même hauteur, avec des Instrumens égaux & par un tems également serein ; il n'y auroit point d'erreur. Mais toutes ces circonstances sont difficiles à réunir dans des climats aussi éloignés.

Le 4^e^ Instrument étant achevé, M^r^. *Harrison* écrivit le 3 Octobre 1761 aux Commissaires des longitudes, pour les prier de faire embarquer son fils avec cette Montre sur le Vaisseau qui devoit conduire à la *Jamaïque* le Gouverneur *Littelton*, & de prendre toutes les précautions nécessaires pour constater le succès de la découverte. Il demanda les mêmes précautions pour son retour de la *Jamaïque* à *Portsmouth*. Par ce moyen on auroit une double preuve de la bonté de l'Instrument, quoique l'Acte du Parlement n'exige qu'un seul voyage aux Indes Occid.

Le 14 d'Octobre 1761 M. *Harrison* reçut du Secrétaire de l'Amirauté les instructions des Commissaires. Il n'y étoit point question des Satellites de Jupiter, peut-être à cause des raisons ci-dessus alleguées, ou bien parce que la saison n'étoit pas propre à ces observations, ou enfin parce que la longitude de la *Jamaïque* avoit été exactement déterminée par l'observation du passage de Mercure sur le Soleil en 1743.

Au mois de Novembre 1761, M. *Harrison* le fils s'embarqua à *Portsmouth* sur le *Deptford*, Capitaine *Digges*. Les Commissaires des longitudes lui donnerent les instructions suivantes.

[1.° La Montre sera fermée sous quatre serrures différentes. M. *Harrison* aura la clef de l'une de ces serrures, le Gouverneur *Littelton* aura la clef d'une autre, le Ca-

pitaine du *Deptford* aura celle de la 3e & le premier Lieutenant celle de la 4e.

2. Avant le départ Mr. *Robertſon* Maître de l'Académie Royale à *Portſmouth* ſera chargé de régler la Montre au tems vrai de ce port, & d'en envoyer une information exacte bien ſcellée aux Lords de l'Amirauté. Cette obſervation des hauteurs égales ſera faite en préſence du Commiſſaire *Hugues*, du Capitaine du *Deptford* & de M. *Harriſon* le fils.]

Par les hauteurs égales priſes à *Portſmouth* le 28 Octobre 1761 on trouva que la Montre avançoit ſur le tems moyen de 0h 3′ 21″

Car les hauteurs égales donnerent ce jour-là à midi	11h	47′	2″
Ajoutant l'équation pour la déclinaiſon	0	0	19
On a le midi vrai ou apparent	11	47	21
Ajoutant l'équation du tems	0	16	0
On a le midi tems moyen	12	3	21

On trouva par les hauteurs égales le 6 Novembre que la Montre avançoit ſur le tems moyen de 0h 2′ 57″

Car ce jour-là les hauteurs égales donnerent à midi	11h	46′	37″
Ajoutant l'équation pour la déclinaiſon	0	0	17
On trouve le midi vrai	11	46	54
Ajoutant l'équation du tems	0	16	3
On a le midi moyen	12	2	57

Il ſuit de-là que la Montre dans 9 jours a retardé de 24 ſecondes, c'eſt-à-dire, de 2″,66 par jour.

Le 7 Novembre on la retarda de 3 minutes en préſence du Commiſſaire *Hugues* & de pluſieurs autres; de ſorte que le 6 elle ſe trouva retarder à *Portſmouth* ſur le tems moyen de 3″.

Le 18 Novembre 1761 le Vaiſſeau partit de *Portſmouth*. Le 6 Décembre ſelon la Montre on étoit à 15° 19′ Oueſt de *Portſmouth*, tandiſque l'eſtime de premier Pilote ne donnoit que 13° 50′. Ainſi la différence étoit preſque d'un degré & demi; & l'eſtime de pluſieurs autres les portoit preſque auſſi loin à l'Eſt de la Montre que celle du

premier Pilote, de ſorte que la plûpart opineſent que la Montre ne valoit rien. Car, diſoient-ils, ſi la Montre de M. *Harriſon* avoit porté à l'Eſt, cela auroit eu quelque apparence de vrai, puiſque dans ces Mers le Vaiſſeau de guerre *Litllefield* avoit autant dérivé à l'Eſt, auſſi bien que pluſieurs autres Vaiſſeaux; au lieu qu'il n'y avoit aucun exemple d'un Navire qui eut autant dérivé à l'Oueſt, que l'auroit fait le *Deptford* ſelon la Montre.

Le 8 Décembre le *Deptford* ſe trouva par obſervation à 35° 17' de latitude Nord, & par la Montre à 15° 17' Oueſt de *Portſmouth*, tandiſque l'eſtime ne donnoit que 1° $\frac{1}{2}$ Oueſt de *Portſmouth*, & les Pilotes comptoient ſi fort ſur leur eſtime, qu'ils furent d'avis de mettre le Cap un peu plus à l'Oueſt, n'ayant plus de biere, & craignant de perdre du tems.

Mais le Capitaine ne voulut point changer de route, quoiqu'il eut parié cinq contre un que les trois derniers jours on avoit trop porté à l'Eſt. Il remit au lendemain matin à changer de route, parce que M. *Harriſon* aſſuroit que ſi l'Iſle de *Porto-Santo* étoit bien placée ſur la Carte, on la reconnoitroit le lendemain. Effectivement le lendemain matin à ſept heures on découvrit cette Iſle; ſur quoi le Capitaine & tout l'équipage firent de grands remercimens à M. *Harriſon*, vû que ſans le ſecours de ſa Montre, ils auroient été à l'Oueſt de *Madere* dans le tems qu'ils s'en croyoient à l'Eſt, & qu'ils auroient manqué cette Iſle où ils comptoient trouver de la biere.

Le *Beaver*, Vaiſſeau du Roi d'Angleterre, avoit fait voile de *Portſmouth* dix jours avant le *Deptford* pour l'Iſle de *Madere*; il avoit pluſieurs Lettres pour donner ordre aux Marchands de cette Iſle de préparer les Marchandiſes dont le Gouverneur *Litteltoń* pouvoit avoir beſoin. Le *Deptford* arriva à *Madere* trois jours avant le *Beaver*. Si celui-ci avoit connu ſa longitude auſſi bien que le *Deptford*, il y ſeroit arrivé quinze jours avant le *Deptford*, & par l'eſtime des Pilotes il étoit beaucoup à l'Eſt de *Porto-Santo*, tandiſque réellement il en étoit un peu à l'Oueſt. Il porta

donc à l'Ouest, jusqu'à ce que les Pilotes reconnoissant leur méprise, revirerent à l'Est.

Cette méprise est si commune, que plusieurs Vaisseaux Marchands qui étoient avec le *Deptford* & qui avoient été souvent à la *Jamaïque* pour leur commerce, n'avoient jamais vu l'Isle de *Porto-Santo.*

En allant de *Madere* à la *Jamaïque*, la Montre corrigea les erreurs du Lock, qui furent plus grandes qu'elles n'avoient été de *Portsmouth* à *Madere*, le Pilote du *Deptford* se trouvant à trois degrés loin de la vraie longitude, & l'estime de plusieurs Pilotes du Convoi s'en écartant de 5 degrés.

La Montre continua à déterminer si exactement la longitude, que le *Deptford* trouva *la Desirade* & toutes les autres Isles qui étoient sur la route jusqu'à son arrivée à la *Jamaïque* à point nommé, comme la montre les annonçoit; ce qui prouve incontestablement qu'elle avoit conservé l'égalité de son mouvement pendant tout le voyage.

Le *Deptford* arriva à la *Jamaïque* le 19 de Janvier 1762.

On fit au *Port Royal* le 26 du même mois les observations suivantes.

Par des hauteurs égales, la Montre marqua au midi moyen	4h	59′	10″,5
Car les hauteurs égales donnerent à midi	5	12	21,5
D'où il faut soustraire l'équation pour la déclinaison	0	0	6
Pour avoir le midi vrai	5	12	15,5
Il faut encore soustraire l'équation du tems	0	13	8
Pour avoir le midi moyen	4	59	7,5
Ajoutez le retardement de la Montre, qui étoit à *Portsmouth*	0	0	3
Vous aurez le midi moyen au *Port Royal*	4	59	10,5
Il faut aussi ajouter 2″,66 pour chaque jour depuis le 6 de Novembre où l'observation des hauteurs égales fut faite à *Portsmouth*, jusques au 26 Janv. où elle a été répétée au *Port-Royal*. Cet intervalle est de 81 jours, qui valent.	0h	3′	35″,4
Ce qui donne midi moyen au *Port Royal*	5	2	45,9
Mais par l'observation du passage de Mercure 1743, ce tems devoit être	5	2	51
Donc la différence entre la longitude trouvée par la Montre & celle qui avoit été déterminée par le passage de Mercure, est	0	0	5,1

Ces 5 secondes de tems par la latitude de la *Jamaïque* ne valent qu'environ un mille.

Par l'observation du passage de Mercure sur le Soleil le 25 Octobre 1743, telle qu'on la trouve dans les transactions Philosophiques, l'Observatoire de *Greenwick* est à l'Est de *Kingston* dans la *Jamaïque* de	5h 6′ 52″
Le *Port Royal*, selon une Carte exacte qui est entre les mains de l'Amiral *Knowles*, est à l'Ouest de *Kingston*, de	0 0 10
Donc le *Port Royal* est à l'Ouest de l'Observ. de *Greenw.* de	5 7 2
Portsmouth est à l'Ouest de l'observ. de *Greenwich*, selon la Montre de M. *Harrison*, tant en allant à *Portsmouth* qu'en revenant, de	0 4 11
Donc le *Port Royal* est à l'Ouest de *Portsmouth* de	5 2 51

Dès qu'on eut fait ces observations à la *Jamaïque*, Mr. *Harrison* se procura un certificat du Gouverneur *Littelton*, du Capitaine & du premier Lieutenant du *Deptford*; & deux jours après il s'embarqua avec M. *Robison* sur un petit bâtiment nommé *le Merlin*, pour revenir en Angleterre. Il essuya une violente tempête, qui l'obligea à déplacer son instrument qui étoit exposé à être inondé; il fut forcé de le mettre dans un endroit où il éprouva les plus violentes secousses, ce qui devoit nécessairement retarder son mouvement.

Le 23 du mois de Mars il rencontra l'*Essex*, Capitaine *Schomberg*, & la Montre se trouva presque d'accord avec l'estime de l'*Essex*, qui le soir d'auparavant avoit rectifié son point son à la vue des terres.

Le 26 Mars il arriva à *Portsmouth*, & le tems ne permit pas de faire aucune observation jusqu'au 2 Avril, où par un milieu entre trois hauteurs correspondantes, on trouva que la Montre marquoit à midi.	11h 55′ 27″,5
Retranchez l'équation pour la déclinaison	0 0 18
Vous aurez le tems vrai ou apparent	11 55 9,5
Otez encore l'équation du tems	0 3 38
Vous aurez le midi moyen	11 51 31,5
Donc la Montre retardoit de	0 8 28,5
Mais selon les observations faites à *Portsmouth* avant le départ, elle perdoit chaque pour 2″,66, ce qui pour 147 jours donne, à retrancher	0 6 31
Reste	0 1 57,5

D'où il faut ôter le retardement de la Montre à *Portſmouth*	o	o	3
Ainſi l'erreur totale occaſionnée par la tempête a été de	o	1	54,5

ce qui vaut 28,5 minutes de longitude, & par la latitude de *Portſmouth* environ 18 milles; tandiſque l'acte du Parlement étend la plus grande récompenſe juſques à 30 milles ou un demi-degré de grand cercle.

Le 3 de Juin de la même année, on propoſa dans le Bureau des longitudes quelques objections contre les expériences de M. *Harriſon*. La première étoit qu'on avoit déplacé l'Inſtrument des hauteurs égales, pour les obſerver plus commodément après midi. Il eſt ſurprenant qu'on ait fait en Angleterre une pareille objection. Pour la détruire, M. *Robiſon* prit à *Greenwich* 49 hauteurs égales, en déplaçant matin & ſoir l'Inſtrument, & la plus grande erreur ne fut que de deux ſecondes. On objecta enſuite qu'on n'avoit pris qu'un ſeul jour les hauteurs égales, ce qui, diſoit-on, ne ſuffiſoit pas pour déterminer le tems avec certitude. Les 49 hauteurs toutes égales détruiſent encore cette difficulté. Enfin on trouvoit mauvais que M. *Harriſon* n'eut pas ſuivi les inſtructions de la Société Royale. Il répondit qu'on ne les lui avoit pas communiquées.

Le 17 du mois d'Août, on aſſembla de nouveau les Commiſſaires, & l'on prétendit que la longitude de *Kingſton* dans la *Jamaïque* n'étoit peut-être pas auſſi exactement déterminée par le paſſage de Mercure, qu'on l'avoit ſuppoſé, & qu'il auroit mieux valu la déduire des éclipſes du 1er Satellite de Jupiter. Nous ſupprimerons le détail des réponſes que l'on fit à cette difficulté. Il en reſulte que la longitude de *Kingſton* eſt auſſi ſûre qu'on puiſſe le déſirer, & qu'il y a bien plus à compter ſur le paſſage de Mercure ſur lequel elle eſt établie, que ſur les obſervations des Satellites de Jupiter.

Mais, ajoutoit-on, quelle que ſoit la longitude de la *Jamaïque*, toujours eſt-il vrai que l'erreur de la Montre dans le voyage n'a été que de 18 milles, tant en allant de *Portſmouth* à la *Jamaïque*, qu'en revenant de la *Jamaïque* à *Portſmouth*, ce qui eſt un peu plus de la moitié de l'erreur tolerée par l'acte du Parlement, qui n'exige qu'un ſeul voyage aux *Indes Occidentales*.

On objecta encore que peut-être l'Instrument n'avoit pas conservé l'égalité du tems dans tout le voyage. Mais il faut que les erreurs ne soient pas bien grandes, si elles se compensent les unes les autres, de maniere qu'à la fin du voyage on se trouve dans les limites prescrites. Dans le cas présent on ne peut pas supposer sans absurdité que les erreurs occasionnées par le froid & le chaud, s'il y en a eu, se soient corrigées mutuellement jusqu'à devenir insensibles à la fin. Car le voyage de la *Jamaïque* a été fait en Décembre, tems où le Vaisseau passa d'un froid extrême à une extrême chaleur, & le retour quatre mois après se trouva dans une température très-différente. Mais sans avoir recours à cette réponse, la découverte de *Madere*, de la *Désirade* & des autres Isles en allant à la *Jamaïque*, l'accord des longitudes avec l'estime corrigée de l'*Essex* au retour, prouvent assez que la Montre n'a pas varié.

Malgré ces réponses qui paroissent décisives, le Bureau des longitudes statua le 17 Août 1762, que M: *Harrison* feroit un second voyage aux *Indes Occidentales*, qu'on lui accorderoit pour ce voyage 2500 livres sterling à compte des 20 mille qu'il recevroit lorsque le succès seroit conforme à l'acte du Parlement, & qu'il auroit donné au public tous les principes de sa Montre. Il consentit à tout à condition qu'on lui accorderoit quatre ou cinq mois de délai pour faire quelques changemens à sa Montre & la rendre plus parfaite. Cependant il fit imprimer le projet suivant, de l'avis de quelques membres de la Société Royale.

Après avoir exposé les objections & les réponses dont nous avons parlé, il nous apprend qu'en 1740 le D^r^. *Halley* avoit proposé un moyen plus efficace que celui du Parlement, pour connoître l'utilité de la Montre de M^r^. *Harrison* par rapport à la découverte des longitudes. Il faut, dit-il, la placer à bord d'un Navire, & faire rouler ce Navire pendant quelques mois autour des Dunes, où il éprouveroit toutes les diverses agitations qu'il pourroit essuyer dans un long voyage. Il faudroit en même-

tems avoir une des meilleures Pendules de M. *Graham*, la tenir bien reglée dans un Fort pour la comparer par des ſignaux avec la Montre de M. *Harriſon*.

Cette méthode eſt inconteſtablement la meilleure ; elle n'expoſeroit point la vie ni la ſanté du fils de M. *Harriſon*, & elle ſeroit à l'abri de l'incertitude des obſervations Aſtronomiques pour la détermination de la longitude.

Pour la mettre à exécution, il faudroit que la Pendule du Fort fut reglée au moins une fois chaque ſemaine par des hauteurs égales. Pour comparer le tems de la Pendule à terre avec le tems de la Montre à bord du Navire, voici les précautions que l'on pourra prendre. On hiſſera un Pavillon dans le Fort vers midi. Ceux qui auront la Montre à bord, ſeront avertis par ce ſignal de la tenir prête, & dans un tems convenable lorſqu'on amenera le Pavillon, on marquera au même inſtant le tems de la Montre & celui de la Pendule. On répétera cette opération une fois par ſemaine pendant le nombre de mois qu'on aura déterminé ; on marquera chaque fois en préſence de quelques témoins de part & d'autre ce qu'on aura obſervé : on ſcellera le paquet, pour l'envoyer quelque tems après au Secrétaire de l'Amirauté. Mais on ne levera le ſcellé qu'en préſence des Commiſſaires, lorſqu'on aura fini toutes les obſervations.

On peut encore placer un Thermométre dans la boëte de la Montre, en échauffer l'air juſques au plus haut degré connu de la *Jamaïque*, & le laiſſer en cet état auſſi long tems que les Commiſſaires le jugeront à propos. On marquera la plus grande & la moindre hauteur du Thermométre dans chaque jour de comparaiſon, & ces notes ſeront ſcellées comme ci-devant. La boëte aura pluſieurs ſerrures, dont les clefs ſeront entre les mains de M. *Harriſon*, & des Officiers du Navire. La Pendule aſtronomique ſera de même fermée à pluſieurs clefs, & ces diverſes clefs ſeront remiſes à ceux qui ſeront nommés par les Commiſſaires des longitudes & par M. *Harriſon*, & on ne permettra à perſonne de regler ſa Montre ſur cette pendule.

Cette expérience avoit été faite par M. *Harriſon* ſur la ſeconde Montre. Il l'avoit priſe à l'épreuve du feu & du froid, & il l'avoit agitée pendant pluſieurs heures de ſuite, ſans pouvoir ralentir ni accélerer ſon mouvement.

Ce projet n'a point été exécuté. Mais pour terminer tous ces débats, M. *Harriſon* s'adreſſa au Parlement d'Angleterre, ſeul interprête légitime de l'Acte de la Reine Anne, & Juge en dernier reſſort du mérite des inventions propoſées pour cet objet. On y reconnut l'utilité de ſa Montre que le voyage de la *Jamaïque* rendoit inconteſtable, & on ordonna qu'on lui remettroit 5 mille livres ſterling, à compte de la recompenſe entière de 20 mille livres qui lui ſeroient payés après une nouvelle expérience, & lorſqu'il auroit développé la conſtruction de ſa machine. Lorſqu'il eut reçu cette ſomme, il s'embarqua pour la *Barbade* ſur le Vaiſſeau de guerre la *Princeſſe-Louiſe*, après avoir pris à *Portſmouth* des hauteurs correſpondantes dans trois jours différens en préſence de M. *Bradley* & du Capitaine *Hugues*, & avoir reglé ſa Montre avec toutes les précautions qu'on y avoit apportées dans le premier voyage. Il partit de *Portſmouth* le 28 de Mars 1764, arriva à la *Barbade* le 13 de Mai, & fut de retour en Angleterre le 18 Septembre.

Le Bureau des longitudes, après avoir examiné tous les certificats que lui apporta M. *Harriſon*, décida le 9 Février 1765 d'un conſentement unanime, que la Montre de M. *Jean Harriſon* avoit déterminé la longitude dans le voyage de *Portſmouth* à la *Barbade* beaucoup en deça des limites preſcrites par l'acte de la Reine Anne; mais que comme il n'avoit pas encore développé les principes de la conſtruction de ſa Montre, ni la manière d'en faire de ſemblables, les Commiſſaires ne ſe croyoient pas autoriſés à lui adjuger le prix total de 20 mille livres ſterling juſqu'à ce qu'il eut rempli ces deux conditions; cependant ils opinerent qu'on devoit préſenter Requête au Parlement pour lui faire accorder encore 5 mille livres outre les 5 mille qu'il avoit déja reçues, & réſerver les autres dix

mille livres pour les lui remettre, lorſqu'il auroit dévoilé le ſecret de ſa méthode & qu'il l'auroit miſe à la portée de tout le monde.

En conſéquence de cette réſolution M. *Jean Harriſon* livra ſa Montre aux Commiſſaires & aux Lords de l'Amirauté, leur en donna l'explication par écrit, & s'offrit à dreſſer un nombre ſuffiſant d'ouvriers pour conſtruire autant de Montres qu'il en faudroit pour fournir tous les Vaiſſeaux de guerre & même les Vaiſſeaux marchands d'Angleterre, dès qu'il auroit reçu le reſte de la récompenſe promiſe. Il prétend auſſi obtenir les récompenſes qu'ont promis les autres nations, auxquelles il ſe propoſe de découvrir le ſecret de ſa méthode.

Nous avons tiré tout le détail qu'on vient de lire de deux brochures Angloiſes publiées par M. *Harriſon* en 1763 & 1765.

En attendant que nos Marins puiſſent ſe procurer des Montres auſſi parfaites que celles de Mrs. *Harriſon*, ils pourront ſe ſervir utilement de quelque bonne Montre, en prenant les précautions ſuivantes.

1.° Avant que de s'embarquer, il faut régler la Montre par des hauteurs égales, & lui faire marquer le tems moyen à midi. Quelques jours après, on réglera de nouveau la Montre par des hauteurs égales, pour ſçavoir de combien de ſecondes elle avance ou retarde chaque jour ſur le tems moyen. On conçoit qu'une pareille Montre doit marquer les ſecondes, & qu'elle doit ſortir des mains d'un habile Ouvrier. Si l'on trouve par les hauteurs égales que cette Montre avance & retarde alternativement ſans aucune régle, il faut la rejetter. Les bonnes Montres n'ont pas ce défaut.

2.° Lorſqu'on aura reglé la Montre, on l'enfermera dans une boëte qu'on garnira en dedans de coton fin. Ce coton qui environnera la Montre, la préſervera de l'humidité, & ſi on la tient bien ſuſpendue dans un lieu ſec & tempéré, elle ſera auſſi exacte ſur Mer que ſur terre.

3.° Lorſqu'on voudra connoître la longitude du Navire,

on observera l'heure du Soleil par quelqu'une des méthodes que nous avons données dans le Chapitre IV. L'observation donnera l'heure vraie du Navire, & la Montre donnera pour le même instant l'heure moyenne du lieu du départ. Mais la différence en longitude n'est autre chose que la différence entre l'heure vraie du lieu du départ & l'heure du Navire ou de l'arivée. Il faut donc réduire l'heure moyenne de la Montre à l'heure vraie. Cette réduction se fait par le moyen de la Table I. de l'*Equation du tems* pour tous les jours de l'année en observant que si l'équation est additive pour changer le tems vrai en tems moyen, il faut la soustraire pour changer le tems moyen en tems vrai, & réciproquement.

Cette équation est quelquefois additive de 16′ 9″ vers le 10ᵉ degré du *Scorpion*, & d'autres fois soustractive de de 14′ 41″ au 22ᵉ degré du *Verseau*. C'est sans doute ce qui a dérouté les Marins qui ont essayé de chercher la longitude par le moyen d'une bonne Montre. S'ils n'ont pas fait attention à l'équation du tems, une Montre excellente les aura trompé de 4 degrés en longitude, qui répondent à 16′ de tems, sans avoir seulement varié d'une seconde.

Une bonne Montre divise le tems également, & le Soleil, à cause de l'obliquité de l'Ecliptique & de quelques inégalités dans son mouvement, divise le tems fort inégalement. Si le Soleil étant au 25ᵉ degré du *Bélier*, vous avez fait marquer midi à votre Montre au moment du passage du Soleil par le Méridien, elle retardera de 16′ 9″ lorsque le Soleil sera dans le 10ᵉ degré du *Scorpion*.

M. *Huygens* avoit proposé cette méthode en 1664, & voici quel en fut le succès. Le Major *Holmes* regla ses pendules avant son départ de l'*Isle S.Thomés* sous la ligne équinoxiale, & les ayant embarquées, il fit route directement à l'Ouest. Il parcourut 7 à 8 cents lieues, sans changer de route; après quoi trouvant le vent favorable, il revira vers les cotes d'Afrique au NNE. Ayant parcouru sur ce Rumb de vent deux ou trois cents lieues,

les Capitaines des autres Navires qui étoient ſous ſes ordres, lui propoſerent d'aller faire de l'eau à la *Barbade*, parce qu'ils appréhendoient que l'eau ne leur manquât avant que d'atteindre la Côte d'Afrique. Le Major les aſſembla, & leur demanda leurs Journaux : il trouva leur eſtime différente de la ſienne, dans les uns de 80 lieues, dans les autres d'environ cent, & dans quelques-uns encore plus. Mais il jugea par ſes pendules qu'il n'étoit qu'à 30 lieues de l'*Iſle de Feu* l'une des *Iſles du Cap verd*, & qu'on la découvriroit le lendemain ; & comme il comptoit beaucoup ſur ſes pendules, il ordonna qu'on mit le Cap ſur l'endroit où il jugeoit qu'étoit cette Iſle. On la découvrit en effet le lendemain à midi.

Cet heureux ſuccès encouragea M. *Huygens*, & il donna aux Marins les inſtructions ſuivantes, qui ont été publiées dans les tranſactions Philoſophiques pour le mois de Mai 1669.

1.° Ceux qui veulent employer les Pendules à la Mer pour la découverte des longitudes, doivent au moins en avoir deux, afin que ſi l'une vient à s'arrêter, l'autre reſte en mouvement.

2.° Ces Pendules doivent être placées dans un lieu fermé & à l'abri de la pouſſiere & de l'humidité. Il faut ſurtout que perſonne ne puiſſe les toucher & les déranger.

3.° Avant que de les embarquer, il eſt à propos de leur faire marquer le tems moyen, ce qui rendra leur uſage plus commode.

4.° Pour les bien régler, il faut tracer une ligne Méridienne, & ſuſpendre directement ſur cette ligne deux fils à plomb, à la diſtance de deux ou trois pieds l'un de l'autre. Vers le midi on placera l'œil de manière que les deux fils ne paroiſſent qu'une ſeule ligne, & l'on attendra le moment où ils couperont exactement le milieu du Soleil, employant, s'il eſt néceſſaire, un verre obſcur, ou une glace ternie par la fumée d'une chandelle. On verra l'heure, la minute & la ſeconde que marque la Pendule, & on lui fera marquer, non pas midi, mais

un peu plus ou un peu moins, ſelon l'équation du tems. Par exemple, ſi l'obſervation a été faite le 21 Mars, ou le jour de l'équinoxe du Printems, lorſque le Soleil entre dans le *Bélier*, l'équation étant ce jour-là $7'\,35''$, il faut faire marquer aux Pendules $12^h\,7'\,35''$ pour avoir le tems moyen au midi vrai.

N. B. M. *Huygens* a employé une Table différente de la nôtre, ſelon laquelle il faut toujours ſouſtraire l'équation pour changer le tems vrai en tems moyen. Nous avons cru plus à propos d'appliquer ſon inſtruction à la Table VII. qui a été calculée avec beaucoup de ſoin par M. *de la Lande.*

5°. Quelques jours après il faudra répéter la même obſervation & appliquer l'équation convenable à l'heure moyenne qui ſera marquée par la pendule, pour la changer en tems vrai. S'il en réſulte préciſément 12 heures à midi, la pendule eſt bien reglée. Mais s'il y a quelque différence, il faut la diviſer par le nombre des jours écoulés entre les deux obſervations, pour ſçavoir combien elle avance ou retarde chaque jour.

Suppoſons par exemple que la 2e obſervation ait été faite huit jours après la 1e, & que les deux fils de la Méridienne paroiſſant couper le Soleil par le milieu, la pendule ait marqué $12^h\;7'\;35''$
L'équation de ce jour eſt ſouſtrac. $0\;\;5\;\;4$ On la ſouſtr. du tems marq.; & l'on aura le tems vrai $12\;\;2\;\;31$

Si l'on avoit trouvé préciſément 12 heures, la pendule auroit été au mouvement moyen; mais l'excès $2'\,31''$ nous apprend qu'elle a marché trop vîte dans cet intervalle. Il faut donc diviſer cet excès $151''$ par 8, pour avoir $18''\frac{7}{8}$ pour chaque jour.

6.° Si l'on n'a pas le tems, ou ſi l'on ne veut pas ſe donner la peine d'allonger le Pendule pour rendre l'horloge plus exacte (ce qui n'eſt pas néceſſaire) il faudra noter cette différence journaliere, pour y avoir égard dans la ſuite. Il eſt aiſé de voir à quelles erreurs on s'expoſeroit, ſi on laiſſoit ainſi accumuler de jour en jour.

7.° On peut encore regler l'horloge à bord du Navire, lorsqu'on a mouillé dans quelque Rade. Observez l'heure, la minute & la seconde du lever du Soleil, si la pendule est en mouvement ; ou bien si elle est arrêtée, vous lui ferez marquer l'heure qu'il vous plaira. Observez de même l'heure, la minute & la seconde du coucher du Soleil. Comptez le tems qui s'est écoulé depuis le lever jusqu'au coucher du Soleil, prenez-en la moitié & ajoutez-la a l'heure du lever, vous aurez l'heure que l'horloge marquoit au moment du midi (ayant égard à la correction des hauteurs égales). Appliquez à ce tems l'équation convenable pour avoir le midi moyen.

Quelques jours après vous répéterez cette opération. L'intervalle ne sçauroit être trop grand. Si l'heure de la seconde observation est la même que celle de la première, ayant égard à l'équation du tems, l'horloge est bien reglée. Si elle n'est pas la même, il faut en diviser la différence par le nombre des jours écoulés depuis la première observation, pour avoir la différence journalière ; ou bien il faut allonger le pendule, si l'horloge va trop vite ; & le racourcir, si elle va trop lentement.

On peut aussi au lieu du lever & du coucher du Soleil, prendre des hauteurs égales du Soleil, l'une avant & l'autre après midi.

8.° Donnez un nom ou une marque à chaque pendule, comme A, B, C, & faites leur marquer le tems moyen du lieu du départ. Si elles ne sont pas d'accord entr'elles, il faudra prendre une note de leurs différences.

9.° Lorsque vous voudrez connoitre chaque jour la longitude du lieu de l'arrivée, vous observerez le Soleil ou les Etoiles, pour sçavoir aussi exactement qu'il sera possible, l'heure du Navire, & vous remarquerez en même tems l'heure, la minute & la seconde des trois Pendules. Vous les réglerez par le moyen de la différence journalière & de l'équation du tems, pour avoir le tems vrai du lieu du départ. Si ce tems est le même que celui qui a été observé, vous êtes sous le Méridien du départ. Si le tems observé

eſt plus grand que celui de la Pendule, vous êtes ſous un Méridien plus oriental que celui du départ; Si ce tems eſt moindre, vous êtes ſous un Méridien plus occidental. Réduiſant ce tems en degrés & minutes par le moyen de la Table VIII. vous aurez la différence en longitude.

Par exemple, ſuppoſons que les trois Pendules A, B, C ayent été reglées au lieu du départ le 20 Février par l'obſervation du Soleil dont la longitude étoit 0.° des poiſſons, & par conſéquent l'équation du tems 14′ 19″ ſouſtractive pour avoir le tems vrai; que de plus la Pendule A ait ſuivi dans ſa marche le tems moyen, mais que la Pendule B ait perdu 7″ par jour, tandis que la Pendule C a avancé de 12″ par jour. On veut quelque tems après, par exemple le 5 Mai, trouver la longitude du Navire.

J'obſerve l'heure au Soleil, par exemple	5^h	18′	10″
Je vois que dans ce moment la Pendule A marque	2	6	0
Et que la Pendule B marque en même tems	1^h	57′	22″
Mais celle-ci perd chaque jour 7″, qui en 74 jours, depuis le 20 Février juſqu'au 5 Mai, font	0	8	38″
Ce qui étant ajouté au tems de la Pendule B, donne comme la Pendule A	2	6	0
Je vois auſſi que la Pendule C dans le même tems donne	2^h	20′	48″
Mais elle a avancé chaque jour de 12″, & en 74 jours de	0	14	48
Ce qui étant retranché du tems de la Pendule, C il reſte comme A & B.	2	6	0

Par conſéquent les trois Pendules corrigées ſont parfaitement d'accord.

La longitude du Soleil le 5 Mai, eſt ♉ 15° & l'équation du tems ſelon la Table I. eſt 3′ 38″ additive, pour avoir le tems vrai. Il faut donc l'ajouter au tems des trois Pendules 2^h 6′ 0″ & l'on aura le tems vrai du lieu du

les Capitaines des autres Navires qui étoient ſous ſes ordres, lui propoſerent d'aller faire de l'eau à la *Barbade*, parce qu'ils appréhendoient que l'eau ne leur manquât avant que d'atteindre la Côte d'Afrique. Le Major les aſſembla, & leur demanda leurs Journaux : il trouva leur eſtime différente de la ſienne, dans les uns de 80 lieues, dans les autres d'environ cent, & dans quelques-uns encore plus. Mais il jugea par ſes pendules qu'il n'étoit qu'à 30 lieues de l'*Iſle de Feu* l'une des *Iſles du Cap verd*, & qu'on la découvriroit le lendemain ; & comme il comptoit beaucoup ſur ſes pendules, il ordonna qu'on mit le Cap ſur l'endroit où il jugeoit qu'étoit cette Iſle. On la découvrit en effet le lendemain à midi.

Cet heureux ſuccès encouragea M. *Huygens*, & il donna aux Marins les inſtructions ſuivantes, qui ont été publiées dans les tranſactions Philoſophiques pour le mois de Mai 1669.

1.° Ceux qui voulent employer les Pendules à la Mer pour la découverte des longitudes, doivent au moins en avoir deux, afin que ſi l'une vient à s'arrêter, l'autre reſte en mouvement.

2.° Ces Pendules doivent être placées dans un lieu fermé & à l'abri de la pouſſiere & de l'humidité. Il faut ſurtout que perſonne ne puiſſe les toucher & les déranger.

3.° Avant que de les embarquer, il eſt à propos de leur faire marquer le tems moyen, ce qui rendra leur uſage plus commode.

4.° Pour les bien régler, il faut tracer une ligne Méridienne, & ſuſpendre directement ſur cette ligne deux fils à plomb, à la diſtance de deux ou trois pieds l'un de l'autre. Vers le midi on placera l'œil de manière que les deux fils ne paroiſſent qu'une ſeule ligne, & l'on attendra le moment où ils couperont exactement le milieu du Soleil, employant, s'il eſt néceſſaire, un verre obſcur, ou une glace ternie par la fumée d'une chandelle. On verra l'heure, la minute & la ſeconde que marque la Pendule, & on lui fera marquer, non pas midi, mais

un peu plus ou un peu moins, ſelon l'équation du tems. Par exemple, ſi l'obſervation a été faite le 21 Mars, ou le jour de l'équinoxe du Printems, lorſque le Soleil entre dans le *Bélier*, l'équation étant ce jour-là $7' 35''$, il faut faire marquer aux Pendules $12^h 7' 35''$ pour avoir le tems moyen au midi vrai.

N. B. M. *Huygens* a employé une Table différente de la nôtre, ſelon laquelle il faut toujours ſouſtraire l'équation pour changer le tems vrai en tems moyen. Nous avons cru plus à propos d'appliquer ſon inſtruction à la Table VII. qui a été calculée avec beaucoup de ſoin par M. *de la Lande*.

5°. Quelques jours après il faudra répéter la même obſervation & appliquer l'équation convenable à l'heure moyenne qui ſera marquée par la pendule, pour la changer en tems vrai. S'il en réſulte préciſément 12 heures à midi, la pendule eſt bien reglée. Mais s'il y a quelque différence, il faut la diviſer par le nombre des jours écoulés entre les deux obſervations, pour ſçavoir combien elle avance ou retarde chaque jour.

Suppoſons par exemple que la 2^e obſervation ait été faite huit jours après la 1^e, & que les deux fils de la Méridienne paroiſſant couper le Soleil par le milieu, la pendule ait marqué $12^h 7' 35''$

L'équation de ce jour eſt ſouſtrac. 0 5 4 On la ſouſtr. du

tems marq.; & l'on aura le tems vrai 12 2 31

Si l'on avoit trouvé préciſément 12 heures, la pendule auroit été au mouvement moyen; mais l'excès $2' 31''$ nous apprend qu'elle a marché trop vîte dans cet intervalle. Il faut donc diviſer cet excès $151''$ par 8, pour avoir $18'' \frac{7}{8}$ pour chaque jour.

6.° Si l'on n'a pas le tems, ou ſi l'on ne veut pas ſe donner la peine d'allonger le Pendule pour rendre l'horloge plus exacte (ce qui n'eſt pas néceſſaire) il faudra noter cette différence journaliere, pour y avoir égard dans la ſuite. Il eſt aiſé de voir à quelles erreurs on s'expoſeroit, ſi on laiſſoit ainſi accumuler de jour en jour.

7.° On peut encore regler l'horloge à bord du Navire, lorsqu'on a mouillé dans quelque Rade. Obſervez l'heure, la minute & la ſeconde du lever du Soleil, ſi la pendule eſt en mouvement ; ou bien ſi elle eſt arrêtée, vous lui ferez marquer l'heure qu'il vous plaira. Obſervez de même l'heure, la minute & la ſeconde du coucher du Soleil. Comptez le tems qui s'eſt écoulé depuis le lever juſqu'au coucher du Soleil, prenez-en la moitié & ajoutez-la a l'heure du lever, vous aurez l'heure que l'horloge marquoit au moment du midi (ayant égard à la correction des hauteurs égales). Appliquez à ce tems l'équation convenable pour avoir le midi moyen.

Quelques jours après vous répéterez cette opération. L'intervalle ne ſçauroit être trop grand. Si l'heure de la ſeconde obſervation eſt la même que celle de la première, ayant égard à l'équation du tems, l'horloge eſt bien reglée. Si elle n'eſt pas la même, il faut en diviſer la *différence* par le nombre des jours écoulés depuis la première obſervation, pour avoir la différence journalière ; ou bien il faut allonger le pendule, ſi l'horloge va trop vite ; & le racourcir, ſi elle va trop lentement.

On peut auſſi au lieu du lever & du coucher du Soleil, prendre des hauteurs égales du Soleil, l'une avant & l'autre après midi.

8.° Donnez un nom ou une marque à chaque pendule, comme A, B, C, & faites leur marquer le tems moyen du lieu du départ. Si elles ne ſont pas d'accord entr'elles, il faudra prendre une note de leurs différences.

9.° Lorſque vous voudrez connoitre chaque jour la *longitude* du lieu de l'arrivée, vous obſerverez le Soleil ou les Etoiles, pour ſçavoir auſſi exactement qu'il ſera poſſible, l'heure du Navire, & vous remarquerez en même tems l'heure, la minute & la ſeconde des trois Pendules. Vous les réglerez par le moyen de la différence journalière & de l'équation du tems, pour avoir le tems vrai du lieu du départ. Si ce tems eſt le même que celui qui a été obſervé, vous êtes ſous le Méridien du départ. Si le tems obſervé

eſt plus grand que celui de la Pendule, vous êtes ſous un Méridien plus oriental que celui du départ; Si ce tems eſt moindre, vous êtes ſous un Méridien plus occidental. Réduiſant ce tems en degrés & minutes par le moyen de la Table VIII. vous aurez la différence en longitude.

Par exemple, ſuppoſons que les trois Pendules A, B, C ayent été reglées au lieu du départ le 20 Février par l'obſervation du Soleil dont la longitude étoit 0.° des poiſſons, & par conſéquent l'équation du tems 14′ 19″ ſouſtractive pour avoir le tems vrai; que de plus la Pendule A ait ſuivi dans ſa marche le tems moyen, mais que la Pendule B ait perdu 7″ par jour, tandis que la Pendule C a avancé de 12″ par jour. On veut quelque tems après, par exemple le 5 Mai, trouver la longitude du Navire.

J'obſerve l'heure au Soleil, par exemple	5h 18′ 10″
Je vois que dans ce moment la Pendule A marque	2 6 0
Et que la Pendule B marque en même tems	1h 57′ 22″
Mais celle-ci perd chaque jour 7″, qui en 74 jours, depuis le 20 Février juſqu'au 5 Mai, font	0 8 38″
Ce qui étant ajouté au tems de la Pendule B, donne comme la Pendule A	2 6 0
Je vois auſſi que la Pendule C dans le même tems donne	2h 20′ 48″
Mais elle a avancé chaque jour de 12″, & en 74 jours de	0 14 48
Ce qui étant retranché du tems de la Pendule, C il reſte comme A & B.	2 6 0

Par conſéquent les trois Pendules corrigées ſont parfaitement d'accord.

La longitude du Soleil le 5 Mai, eſt ♉ 15° & l'équation du tems ſelon la Table I. eſt 3′ 38″ additive, pour avoir le tems vrai. Il faut donc l'ajouter au tems des trois Pendules 2h 6′ 0″ & l'on aura le tems vrai du lieu du

départ	$2^h\ 9'\ 38''$
Mais le tems obſervé & calculé pour le Méridien du Navire eſt	5 18 10
Différence	3 8 32

Donc le Méridien du Navire étoit le 5 Mai, plus oriental que celui du départ, de $3^h\ 8'\ 52''$, qui valent en degrés $47^\circ\ 8'\ 0''$.

Il eſt vrai qu'on pourroit conclure que l'on eſt encore plus à l'Eſt de 180°, parce que l'aiguille des heures fait tout le tour du cadran dans 12 heures : mais cette erreur eſt ſi énorme, qu'on ne peût pas y tomber. D'ailleurs on peut faire enſorte que l'aiguille n'acheve ſa révolution qu'en 24 heures.

10.° On ne ſçauroit obſerver trop exactement l'heure du Navire ; puiſqu'une minute d'erreur dans le tems en produit une de 15 minutes dans la longitude, qui valent 15 milles auprès de l'équateur, mais beaucoup moins dans les grandes latitudes. Or pour trouver l'heure avec certitude, le meilleur moyen eſt d'obſerver la hauteur du Soleil dans le premier vertical où elle varie plus promptement que partout ailleurs, & cette hauteur étant donnée avec celle du Pole & la diſtance du Soleil au Pole, on calculera l'heure (Voyez le Probl. IV du Chap. V).

11.° Voici une autre manière. Obſervez le tems du lever & du coucher du Soleil : & prenez le milieu de cet intervalle pour avoir le midi. Appliquez à ce tems l'équation pour le jour de l'obſervation. Si la ſomme eſt préciſément de 12 heures, on n'a point changé de Méridien. Si elle ſurpaſſe 12 heures, le Navire a été à midi dans un Méridien plus occidental que celui de la Pendule, & ſi cette ſomme eſt moindre, il a été dans un Méridien plus oriental, & cela à raiſon de 15° par heure, & $15'$ pour $1'$ de tems.

Suppoſons, par exemple, que les Pendules A & B ayent été reglées au Soleil, lorſqu'on eſt parti, le 20 Février, & que les aiguilles ayent marqué l'heure, la minute & la ſeconde

seconde du Soleil, eu égard à l'équation du tems, qui étoit ce jour-là 14′ 19″. Supposons encore qu'ayant reglé parfaitement la Pendule A, l'autre B ait retardé chaque jour de 7″. Le 22 Mai on a voulu calculer la longitude du Vaisseau, & l'on a trouvé que la Pendule A marquoit

au lever du Soleil	2h 30′ 10″
Et au coucher du Soleil elle marquoit	3 8 40
Otez de 12h le tems du lever, le reste sera	9 29 50
Ajoutez à ce reste, le tems du coucher,	
Vous aurez l'intervalle des deux observations	12 38 30
Dont la moitié	6 19 15
Etant ajoutée au tems du lever	2 30 10
Donnera le tems que la Pend. A marquoit à midi	8 49 25

Vous trouverez de même le tems que la Pendule B marquoit à midi. Supposons que ce soit 8h 38′ 48″

Cette Pendule retardant de 7″ par jour, c'est en 91 jours	0 10 37
Qu'il faut ajouter au midi trouvé, pour avoir le tems qu'elle marquoit à midi	8 49 25
Le même que celui de la Pendule A.	
Mais la longitude du Soleil le 22 Mai, étoit ♊ 2° & l'équation du tems pour changer le tems moyen en tems, vrai, est additive	0h 3′ 45″
Ce qui étant ajouté au tems des deux Pendules à midi, on aura	8 53 10

C'est le cercle horaire du lieu du départ dans le moment où le Soleil étoit dans le Méridien du Navire. La différence entre midi & ce cercle horaire est 3h 6′ 50″.

Donc le Méridien du Navire est plus oriental de cette quantité que celui du départ; & cette différence réduite en degrés, donne 46° 42′ 30″ pour la différence en longitude.

On voit que par ce moyen on ne trouve que la longitude du Navire à midi, laquelle peut différer de celle du soir; mais on peut par le Lock ou par les autres pratiques de la Navigation, trouver à fort peu près cette différence.

On peut aussi, au lieu d'observer le lever & le coucher

du Soleil le même jour, obſerver le coucher & enſuite le lever du lendemain, en marquant chaque fois le tems indiqué par les pendules. On trouvera par ce moyen, la longitude du Soleil à minuit.

Enfin on peut, au lieu du lever & du coucher du Soleil, prendre des hauteurs égales, & l'on doit préférer celles du premier vertical.

12.° On peut encore prendre deux hauteurs égales de quelque Etoile connue, pour avoir le tems de ſon paſſage par le Méridien ; ce qui donnera l'heure par le moyen de l'aſcenſion droite de l'Etoile comparée à celle du Soleil. On aura ainſi la longitude pour le moment du paſſage de l'Etoile au Méridien.

13.° Si les horloges viennent à ſe déranger, de manière que l'une aille plus vîte que l'autre, il faut préférer celle qui va plus vite, à moins qu'il n'y ait quelque raiſon particulière de s'en défier, par exemple quelque défaut dans la denture. C'eſt que les horloges à pendule ſont plus diſpoſées à retarder qu'à avancer à la Mer. Car le pendule peut bien s'allonger par l'agitation du Vaiſſeau, mais cette agitation ne peut pas l'accourcir, ou lui donner plus de vîteſſe. Le poids peut deſcendre, mais il ne ſçauroit monter. Il n'y a que le froid qui puiſſe raccourcir le pendule.

14.° Lorſqu'on ſe trouve dans un Port, dans une Iſle, ou ſur une côte, on ne doit pas manquer d'en déterminer la longitude, auſſi exactement qu'il eſt poſſible, par le moyen des régles précédentes, afin de corriger les cartes marines qui ſont toutes défectueuſes dans le ſens Eſt & Oueſt.

15.° Si par quelque malheur ou négligence toutes les horloges viennent à s'arrêter, il faut les remettre en mouvement dans un lieu dont on connoiſſe la longitude. On le regardera pour le reſte de la route comme le lieu du départ.

16.° Si ce malheur arrive en pleine Mer, il faudra encore les remettre en mouvement pour ſçavoir combien on avancera vers l'Eſt ou vers l'Oueſt.

M[r]. *de Radouay* dans ses *Remarques sur la Navigation*, nous donne p. 20 un extrait de Journal fort curieux sur l'usage d'une Montre.

» Du 4 Juillet au coucher du Soleil, par la latitude » Nord de 44° 30′ nos Pilotes se faisant par les 340° de » longitude de Ténérif, la Montre en question avance sur le » Soleil d'une heure 58 minutes; sur quoi l'équation de » l'horloge de la connoissance des tems, fait retrancher 8 » minutes, la Montre ayant été mise à Brest avec le Soleil » le 20 Mai. Elle n'avance donc sur notre Méridien que » d'une heure 50 minutes, c'est-à-dire que, selon ce qu'elle » marque, je ne suis qu'à 27° 30′ du Méridien de Brest, » qu'il faut ôter de 371°, parce que Brest est à 11° à » l'Est du Méridien de Ténérif, reste 343° 30′; ce qui » donne 3° 30′ de différence d'avec l'estime de nos Pilo- » tes. Il faut suspendre son jugement jusqu'à la sonde du » grand banc, qui fera connoître la meilleure estime.

» Du 14 Juillet 1722 par les 44° 20′ de latitude Nord » & par les 330° de longitude, suivant les points & cartes » de nos Pilotes, la Montre marque au moment du cou- » cher du Soleil de 7[h] 34′, *dix heures quatre minutes*; » d'où il faut ôter 9 minutes pour l'équation de l'horloge; » reste donc que la Montre avance sur le Soleil de 2 » heures 21 minutes; c'est-à-dire qu'elle nous fait à 35° » 15′ du Méridien de Brest. Otons-en 11°, & il restera » 24° 15′, qu'il faut ôter de 360° pour avoir 335° 15′ » (il devoit dire 335° 45′) de longitude; ce qui me met » de l'arriere de nos Pilotes de 5° 15′ (5° 45′) qui par » notre latitude font environ 90 lieues.

» Enfin ce matin 21 Juillet nous avons trouvé la sonde » de l'accord de l'Est du Grand-banc, & il est manifeste » par les points des Pilotes, qu'ils se sont tous faits au » moins 170 lieues de l'avant du Navire; & la Montre, » déduction faite, me donne 330° de longitude de l'Isle » de Fer; c'est-à-dire que je ne suis qu'à 5° du Méridien » du Cap-Raze, ce qui quadre avec la nouvelle carte » du Sieur des Longchamps Enseigne du Port de Brest.

» Une bonne *Montre*, ajoute-t-il p. 22, est sur-tout né-
» cessaire dans les parages sujets aux courans ; car alors
» la bonté de la carte, ni la mesure exacte de la ligne du
» Lock, ne sçauroient nous redresser sur la longitude. Il
» n'y a qu'une bonne Montre qui puisse le faire, comme
» on vient de voir qu'elle a marqué assez juste la
» longitude des accords de l'Est du Grand-banc ».

Le 4[e] Chapitre de la 2[e] Partie des Remarques de M. *de Radouay* p. 82 mérite d'être placé ici.

» Il est a propos de rapporter ici la justesse avec laquelle
» la Montre citée p. 20 a marqué nos changemens de lon-
» gitude dans notre retour du Grand-banc en 1722 ; cette
» épreuve ayant été faite publiquement, afin que les Of-
» fficiers vissent les avantages qu'ils peuvent retirer d'une
» bonne Montre.

» Nous débanquames le 5 Octobre au matin par les 44°
» 30′ de latitude, & suivant notre réduction, environ par
» les 328° de longitude du Méridien de Ténérif. La Mon-
» tre avançoit alors de 2 heures 48′ sur le Soleil, & le 24
» Octobre que nous trouvâmes la première sonde à l'Ouest
» du banc des Soles le plus Nord, la montre au Soleil
» couchant n'avançoit plus que de 30′. Les vents nous ayant
» ensuite contrariés pendant 12 jours, & ayant pris hau-
» teur le 4 Novembre, & vu coucher le Soleil, la Mon-
» tre s'est trouvée n'avancer que de 5 minutes, lesquelles
» par la latitude de 48° 30′ où nous étions, ne valent que
» 17 lieues. En effet nous n'étions pas plus loin de Brest,
» où nous entrâmes le lendemain.

» M[r]. *de Beaufort*, Enseigne sur le Vaisseau, avoit
» aussi laissé sa montre sur le Méridien de l'accord
» de l'E du Grand-banc, & elle a fort bien marqué nos
» différences en longitudes jusqu'à la sonde, où il oublia
» de la monter.

» Il faut toujours, autant qu'on le pourra, se munir de
» bonnes Montres. Car outre ce que l'on vient de dire,
» on a vu p. 21 qu'elles ont fait éviter une erreur con-
» sidérable en allant à l'Ouest. Elles feront aussi fort bien
» connoitre les erreurs dans lesquelles on donne souvent

» dans les longues routes, qui tiennent beaucoup du Nord » ou du Sud. Par exemple, supposons qu'un Vaisseau tra- » verse de la rivière des Amazones aux accords du » Grand-banc, & qu'un Officier s'apperçoive que le sil- » lage du Navire excéde de beaucoup la différence de sa » latitude observée ; il en conclura avec raison qu'il y a » des courants ; mais il ne sçauroit décider avec connois- » sance de cause, ni aucun Pilote du monde, de quel cô- » té ces courans portent. Or une Montre passablement » bonne le fera connoitre évidemment : il n'y a qu'à écrire » la différence de l'heure qu'elle marque d'avec celle du » lever ou coucher du Soleil par la latitude où l'on sera. » Car dès le lendemain, ou les jours suivans la Montre » avancera ou retardera sur le Soleil. Dans le 1^er^ Cas on » dérive vers l'Ouest, & dans le second c'est vers l'Est.

» Certainement nous pouvons retirer cet avantage de » nos Montres; car il y en a beaucoup de passablement bon- » nes dans la Marine, & elles pourroient nous donner de » la certitude sur cet article. On a vû ci-devant qu'il s'en est » trouvé quatre par hazard sur l'Eclatant en allant au Grand- » banc. Je n'ai fait mention que de trois, ne voulant pas citer » la mienne. C'est pourquoi j'ai fait toutes mes observations » sur la Montre de M^r^. *de Montlouet* & entre ses mains.

» Il faut bien prendre garde de ne point omettre, en » faisant l'observation des courans dont je viens de parler, » de retrancher à l'heure que donnera la Montre, ce que l'on » trouvera marqué dans la Table de la connoissance des » tems pour la différence de l'heure du lever ou du cou- » cher du Soleil par les différentes latitudes où l'on aura » observé. Car supposant que le 21 Janvier 1723 par les » 42° de latitude, la montre au lever du Soleil marque » *telle heure*, & que le lendemain au lever par les 46.° » elle marque 12 minutes de plus, on n'aura pas fait » pour cela 3 degrés à l'Ouest ; on n'a pas même changé » de Méridien, la table marquant 12 minutes de retar- » dement pour différence du lever du Soleil par ces deux » latitude, & ce n'est qu'au cas que la Montre avançât

» plus de 12 minutes au lever du Soleil, qu'on doit avoir
» dérivé dans l'Oueſt; & au contraire la dérive ſera vers
» l'Eſt, ſi la Montre avance moins ſur le Soleil que les 12
» minutes de retardement, ou que tout autre retardement
» que l'on trouvera marqué dans la table pour la différen-
» ce des jours & des latitudes où l'on aura confronté l'heu-
» re de la Montre avec le Soleil.

» Quand on ne verroit ni le lever ni le coucher du
» Soleil, on ne laiſſeroit pas de vérifier où portent les
» courants en obſervant l'heure que la montre marquera à
» midi. Cette ſeconde manière convient mieux aux Pilotes,
» n'ayant pas beſoin de calcul. Car la montre doit ſe
» trouver preſque au même point 24 heures après, ſi l'on
» eſt reſté ſous le même Méridien.

Le même Auteur [page 87] ajoute une autre *manière d'obſerver la longitude.*

» Ayant obſervé exactement la variation, je dis que ſi
» quelqu'une des Etoiles nommées dans la Table des aſ-
„ cenſions droites de la connoiſſance des tems ſe rencontre
„ dans le Méridien en même tems que la Lune, on peut
„ ſçavoir à peu de choſe près la longitude du lieu de cette
„ obſervation. Car l'on a par les Tables des aſcenſions
„ droites de la Lune, ce qu'elle en avoit en paſſant par
„ le Méridien de Paris, & l'on n'ignore pas ce qu'elle en
„ a dans l'inſtant de l'obſervation, puiſque c'eſt la même
„ aſcenſion que celle de l'Etoile. Or la différence de ces
„ deux aſcenſions droites de la Lune, cauſée par ſa rétro-
„ gradation depuis le Méridien de Paris juſqu'au lieu de
„ l'obſervation, donnera la différence en degrés de ce Mé-
„ ridien à celui de Paris, par la différence qu'on trouvera
„ marquée dans la Table pour l'aſcenſion droite de la Lu-
„ ne d'un jour à l'autre; car la plus grande aſcenſion
„ droite eſt la même choſe que la plus grande longitude.
„ Faiſant donc la Regle de trois ſuivante, l'on aura la
„ différence en longitude qu'on cherche.

» Si la différence aſcenſionnelle de la Lune d'un jour à
„ l'autre, donne 360° de longitude, combien la diffé-
» rence aſcenſionnelle de Paris ici en donnera-t-elle?

» On ne croit pas qu'on puisse rien objecter de solide » contre cette observation. Car de dire qu'on ne connoit » pas assez la théorie de la Lune, c'est dire qu'on ne sçau- » roit par cette voie, s'assurer d'une grande précision, » j'en tombe d'accord ; mais qu'on avoue aussi qu'il est » très-important de pouvoir approcher du point de la lon- » gitude à la mer ; & c'est sur ce fondement que je dis » que la théorie de la Lune est suffisamment connue pour » nous. . . . Ce seroit un grand avantage de sçavoir notre » longitude à vingt lieues près. Ainsi ce n'est pas le peu » de connoissance de la théorie de la Lune, qui est le dé- » faut de ces observations ; mais c'est la rareté des occa- » sions d'observer. . . . On ne rencontre pas souvent une » Etoile dans le Méridien avec la Lune. »

REMARQUE.

La difficulté de trouver une Etoile qui passe par le Méridien en même tems que la Lune, forme en effet une objection à laquelle il est difficile de répondre. La méthode que nous allons donner, est beaucoup plus exacte, & l'on peut l'employer presque tous les jours.

Maniere de calculer la longitude & la latitude de la Lune par les nouvelles Tables de Mr. Tobie Mayer.

Ces Tables ont paru pour la première fois dans les Mémoires de Gottingen en 1742. On les a comparées à plus de deux cens observations, non-seulement de notre siécle, mais encore du siécle précédent, & à peine en a-t-on trouvé dix qui se soient éloignées du calcul d'une minute & demie. La plupart ont été d'accord avec le calcul à moins d'une minute près, & aucune ne s'en est écartée de deux minutes ; tandisque les meilleures Tables s'écartent souvent des observations de quatre ou cinq minutes.

L'usage de ces Tables est plus facile que celui des autres ; parce que le nombre des *Equations* ou corrections n'est pas aussi grand, & qu'on y trouve fort aisément la partie proportionnelle, en negligeant même les secondes

de l'*argument*, c'eſt-à-dire, de la quantité qui ſert à déterminer les équations.

Les inégalités du mouvement de la Lune ſont dérivées de la théorie inconteſtable de Mr. *Newton* & de l'analyſe de Mr. *Euler* qui s'eſt appuyé uniquement ſur cette théorie. Ainſi ces Tables ne ſont pas uniquement fondées ſur un grand nombre d'obſervations, mais en partie ſur les obſervations, & en partie ſur une théorie générale qui renferme toutes les obſervations poſſibles.

On y corrige la longitude de la Lune par le moyen de treize équations, dont les plus conſidérables ſont les XI, XII & XIII; preſque toutes les autres dépendent de ces trois-là. La XI, qu'on appelle autrement *Equation du centre*, vient de l'excentricité de l'orbite de la Lune; elle eſt entièrement conforme à la Loi de *Kepler* que Mr. *Newton* a demontrée. Selon cette Loi, les aires decrites par le rayon mené du foyer de l'orbite à la Lune ſont proportionnelles aux tems. La quantité de cette équation dépend des obſervations, & l'action du Soleil ſur la Lune n'y a aucune part.

L'équation XII dépend en même tems de l'action du Soleil ſur la Lune & de l'excentricité de l'orbite. Elle diſparoitroit, ſi le Soleil n'agiſſoit pas ſur la Lune, ou ſi l'orbite perdant ſon excentricité devenoit circulaire. Quelques Auteurs la nomment *Evection*. Elle ſuit rigoureuſement la Loi de Kepler; mais elle varie par deux principes. L'un eſt la diſtance inégale du ſoleil à la terre; car dans ſon *Apogée*, ou lorſqu'il en eſt fort éloigné, ſon action eſt moindre, & par conſéquent l'évection; elle eſt au contraire fort grande dans ſon *perigée*, ou lorſque le Soleil eſt fort près de la Terre. Le ſecond principe eſt la diſtance inégale de la Lune à la Terre, qui rend cette équation plus grande dans le perigée de la Lune, & moindre dans ſon apogée. La Table ne donne que la quantité moyenne de cette équation, & les équations IV, & V avec la X & la XIII corrigent ce qu'il y a de variable par les deux principes précédents.

Tycho-Brahé eſt le premier qui ait decouvert la XIII[e]

équation. Il la nomma *Variation*, & Mr. *Bouillaud* l'appelle *reflexion*. Elle ne vient que de l'action du Soleil, & elle subsisteroit, quand même l'orbite de la Lune & celle de la Terre n'auroient aucune excentricité. Elle dépend un peu de la parallaxe du Soleil, que Mr. Mayer a supposée de 11″ $\frac{1}{2}$. Sa quantité moyenne est exactement la moitié de l'évection. Je dis sa quantité moyenne ; car elle varie selon les distances du Soleil & de la Lune à la Terre. Ces variations produisent les petites équations II & III, & celles qui viennent des distances de la Lune sont corrigées par la VI[e] équation, & en partie par la XII[e].

L'équation I. de la longitude de la Lune vient de l'action du Soleil & de l'excentricité de l'orbite de la Terre. Si ces deux causes disparoissoient, l'équation I. s'anéantiroit. Cette équation accélére le mouvement de la Lune, lorsque le Soleil est dans son apogée, & le retarde dans le perigée. Comme elle varie par les distances inégales de la Lune à la Terre, il a fallu la corriger par la petite équation VIII.

Les équations VII & IX dépendent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'Ecliptique. Car le Soleil agissant obliquement sur la route de la Lune, doit nécessairement la détourner un peu. Outre cela l'excentricité de l'orbite de la Lune rend cette action plus grande, lorsque la Lune est dans son apogée, que dans son perigée.

La réduction à l'Ecliptique est comme la XIV[e] équation de la longitude. On la fait ici constante, quoique l'inclinaison de l'orbite d'où elle dépend soit variable ; mais l'équation XIII corrige d'avance cette variation.

Nous avons encore tiré de M. Mayer deux Tables pour calculer la latitude de la Lune. La 1[e] donne sa quantité moyenne, qui est indépendante de l'action du Soleil, & dans la 2[e] on trouve les variations de la latitude qui résultent de l'action du Soleil. Ces dernières Tables ne sont point aussi exactes que celles de la longitude de la Lune, & l'Auteur en convient lui-même. Heureusement il est très rare que les Marins ayent besoin de calculer la latitude de la Lune, & il leur suffit presque toujours de pouvoir déterminer exactement sa longitude.

M. Mayer a donné encore quelques Tables pour la parallaxe de la Lune, que nous n'avons pas mises ici, parce que nous supposons qu'on trouve cette parallaxe dans les Ephémérides, ou la *Connoissance des Mouvemens celestes.*

On voit dans ces Tables que le mouvement moyen de la Lune est dans l'espace de 60 ans de 1ſ. 10° 43′ 24″. tandisque dans les autres Tables il n'est que de 1ſ. 10° 41′ 10″, & dans quelques-unes 1ſ. 10° 42′ 15″. L'Auteur en donne la raison tirée des observations de ce siécle & du siécle précédent.

Regles & modele du Calcul.

Partagez votre calcul en plusieurs colonnes. Vous écrirez dans la 1e à main gauche, l'année, le jour du mois, l'heure, les minutes & les secondes du tems moyen pour lequel on demande la longitude du Soleil & de son apogée, celle de la Lune, de son apogée & de son nœud ascendant, qui doivent remplir les colonnes suivantes.

On placera dans la 2e colonne la longitude du Soleil, & dans la 1e ligne celle de l'année proposée, que l'on trouvera dans la Table II des Epoques (page 3), dans la 2e ligne le mouvement du jour du mois pris dans la Table III *page* 4 & *suiv.*, dans la 3e ligne le mouvement de l'heure donnée, & dans la 4e & 5e celui des minutes & des secondes tirés de la Table IV pag. 7.

On placera de même dans la 3e colonne la longitude de l'apogée du Soleil pour l'année & le jour proposés, dans le même ordre qu'on a placé la longitude du Soleil. On trouve l'une & l'autre dans les mêmes Tables. On doit faire attention que dans les années bissextiles, il faut retrancher un jour dans les mois de Janvier & de Février; par exemple en 1740, au lieu du 12 Février il faut prendre le 11.

Ajoutez ensemble les nombres de chaque colonne, en observant que 30° valent un signe, qu'il faut retenir, & que la longitude des Astres ne doit pas surpasser 12 signes. Vous aurez dans cet exemple, la longitude moyenne du Soleil 6ſ. 1° 3′ 8″, & la longitude moyenne de son apo-

gée, ou de sa plus grande distance à la Terre, 3f. 8° 30′ 20″.

Portez la longitude moyenne du Soleil dans la 3ᵉ colonne sous celle de son apogée, pour soustraire de celle-là la longitude de l'apogée. Le reste se nomme *Anomalie moyenne* du Soleil. Elle est ici de 2f. 22° 32′ 48″. A l'égard de ces sortes de soustractions qui reviennent souvent ici, il est bon d'avertir que lorsque la quantité à soustraire surpasse celle d'où se doit faire la soustraction, on emprunte 12 signes dont on augmente celle-ci.

La longitude moyenne du Soleil suppose que cet Astre se meut dans un cercle. Mais comme il paroit réellement se mouvoir dans une ellipse, il faut corriger cette longitude par une équation qu'on nomme pour cette raison *Equation du centre*. L'anomalie moyenne du Soleil en est l'*argument* & sert à la trouver. On la retranche de la longitude moyenne du Soleil dans les six premiers signes de son anomalie moyenne, marqués au haut de la Table V *page* 8 & 9, & on l'ajoute dans les six autres signes marqués en bas. Les degrés croissent en descendant pour les six premiers signes, & en montant pour les six derniers signes d'anomalie moyenne. Les différences qu'on a mises à côté servent à prendre la partie proportionnelle pour les minutes d'anomalie moyenne. Ainsi dans notre exemple l'anomalie moyenne étant 2f. 22° 32′ 48″, je trouve dans la colonne marquée II en descendant vis-à-vis le 22ᵉ degré — 1° 54′ 1″, & vis-à-vis le 23ᵉ degré — 1° 54′ 19″. La différence marquée à main droite entre ces deux quantités est 18″. Je dis donc 60′ : 18″ :: 32′,8 : 10″, qu'il faut ajouter à l'équation pour le 22ᵉ degré — 1° 54′ 1″, pour avoir celle de 22° 32′ 48″, qui sera — 1° 54′ 11″, parce que ces équations vont en augmentant. On aura donc la longitude du Soleil *égalée* 5f. 29° 8′ 57″.

On en vient ensuite à la longitude de la Lune & à son apogée, que l'on calcule de la même manière qu'on a fait la longitude & l'apogée du Soleil, en y employant les Tables de la Lune depuis page 13 jusqu'à page 22 inclusivement. Ces Tables donnent en même tems la longitude

moyenne du Nœud aſcendant marqué ☊. Mais il faut faire attention que le mouvement du Nœud étant rétrograde, on doit ſouſtraire de la longitude de l'époque la ſomme des mouvemens particuliers ; ainſi dans notre exemple, il faut ſouſtraire de 1ſ. 25° 43′ 32″, la ſomme des mouvemens 14° 2′ 27″ pour avoir le lieu moyen du Nœud aſcendant 1ſ. 11° 41′ 5″.

Il faut auſſi ajouter à la longitude moyenne de la Lune, ſon accélération que l'on trouve au bas de la page 15. Elle étoit de près de 2″ en 1743.

On ſouſtraira la longitude de l'apogée de la Lune 9ſ. 5° 36′ 52″ de la longitude moyenne de la Lune 7ſ. 19° 54′ 17″ en augmentant celle-ci de 12ſ., comme on l'a dit. La différence ſera l'*anomalie moyenne* de la Lune 10ſ. 14° 17′ 25″.

On écrira dans la 2e colonne ſous la longitude du Soleil égalée, la longitude de la Lune que l'on vient de trouver,

trouver,	7ſ.	19°	54′	17″
On en retranchera la longitude du Soleil égalée	5	29	8	57
Pour avoir la diſtance de la Lune au Soleil en négligeant les ſecondes.	1	20	45	

C'eſt une Regle générale que lorſqu'on demande la diſtance d'un Aſtre à un autre, il faut ſouſtraire le lieu de celui-ci de celui du premier ; ainſi pour avoir la diſtance de la Lune au Soleil, on ſouſtrait le lieu du Soleil de celui de la Lune ; & pour avoir la diſtance du Soleil à la Lune, c'eſt le lieu de la Lune qu'on doit ſouſtraire de celui du Sol.

Doublez la diſtance trouvée de la ☾ au ☉	3ſ.	11°	30′
Ecrivez en deſſous l'anomalie moyenne de la ☾	10	14	17
Et le lieu moyen du ☊	1	11	41
Que vous ſouſtrairez du lieu moyen de la ☾, pour avoir la diſtance de la ☾ au Nœud	6	8	13
Doublez cette diſtance	0	16	26

Vous aurez par ce moyen, ſous les yeux, les élémens des 10 premiers argumens qu'il faut former ſelon les titres des 10 Tables compriſes dans les pages 23 & ſuiv.

Chacun de ces argumens donnera une petite équation en + ou en —. On placera ces argumens & les équations correſpondantes dans la 3e & 4e colonne, en diſtinguant les + des — ; & en ayant fait deux ſommes, on aura par la ſouſtraction l'équation totale, qui eſt ici + 12′ 42″.

On corrigera le Nœud & l'anomalie moyenne de la Lune par la table qui ſuit l'équation X, pag. 27, & qui donne ici pour le Nœud + 10′ 10″, & le double + 20′ 20″ pour l'anomalie moyenne corrigée 10ſ. 14° 37′ 45″.

On appliquera à cette anomalie moyenne corrigée, & à la longitude moyenne de la Lune le réſultat des 10 petites équations + 12′ 42″.

L'anomalie moyenne doublement corrigée formera l'argument XI, qui donnera l'équation du centre de la Lune (pag. 28).

De la longitude de la Lune corrigée ſeulement par les 10 premieres équations, on otera la longitude du Soleil corrigée ; on prendra le double de ce reſte, & on en retranchera l'anomalie de la Lune doublement corrigée. Le reſte ſera l'argument XII de l'*évection.* L'équation du centre & l'évection étant appliquée à la longitude de la Lune corrigée, donneront ſa longitude égalée.

L'argument XIII donnera la *variation* qu'il faut appliquer à la longitude égalée, pour avoir la longitude de la Lune dans ſon orbe.

L'argument XIV donnera la reduction à l'Ecliptique qu'on appliquera à la longitude dans l'orbe, & l'on aura la longitude reduite par rapport à l'Equinoxe moyen. Enfin la table qui ſuit donnera la correction qui convient à la préceſſion des Equinoxes, & l'on aura la longitude reduite à l'Equinoxe vrai, qui eſt ici 7ſ. 24° 11′ 46″.

Par les Obſervations de Mr. Bradley, cette longitude s'eſt trouvée le même jour au même inſtant vraie 7ſ. 24° 10′ 57″, ayant égard aux différences des Méridiens de Greenvich & de Paris, dont l'erreur des Tables n'eſt que de 49″.

Les deux autres Tables donnent la latitude de la Lune. Les argumens ſont trop aiſés à former pour nous y arrêter

On demande le lieu du Soleil & de la Lune pour le 22 Sep-

Longitude du ☉.				
1743	9f.	9°	42′	44″
22 Sept.	8	21	11	47
3 heures			7	24
29′			1	11
49″				2
Long. moy.	6	1	3	8
Equation du centre	—	1	54	11
Long. ☉ égalée	5	29	8	57
Long. moy. ☾	7	19	54	17
Dist. ☾ au ☉		1	20	45
Double dist.		3	11	30
Anom. moy. ☾		10	14	17
Longit. moy. ☊		1	11	41
Dist. ☾ au ☊		6	8	13
Double dist. ☾ au ☊		0	16	26
Equat. du nœud		+	10′	10″
Equat. de l'anom. ☾		+	20′	20″
Lieu du ☊ corrigé	1f.	11°	51′	15″
Anom. moy. ☾ cor.	10	14	37	45
Equation		+	12	42
XI. Anom. ☾ doubl. corr.	10	14	50	27
Long. ☾ corrigée	7	20	6	59
Long. ☉ corr.	5	29	8	57
Dist. ☾ au ☉ corr.		1	20	58
Double dist.		3	11	56
Argument XII		4	27	6
XIII		1	24	30
XIV		6	12	23

Apog. du ☉.				
	3f.	8°	29′	34″
				46
	3	8	30	20
	6	1	3	8
Anomalie moy.	2	22	32	48

Argumens.				Equations. +	−
I	2f.	22°	33′	11′ 11″	
II	6	4	3	0 4	
III	0	18	58		0′ 20″
IV	7	19	46		1 23
V	2	4	41	1 5	
VI	1	25	48	1 15	
VII	2	2	9	0 51	
VIII	7	21	45		0 32
IX	7	12	42	0 47	
X	3	6	28		0 16
Som. des Eq.			+	15 13	2 31
			—	2 31	

Equat. totale + 12 42

Argum. I de latitude, 6f. 12° 23′ 38″

Argum. II de latitude, 8 29 32 26

tembre 1743 à 3 heures 29′ 49″, tems moyen à Paris.

Longit. ☾.	Apog. ☾.	Long. du ☊.
11ſ. 6° 14′ 22″	8ſ. 6° 4′ 31″	1ſ. 25° 43′ 32″
8 11 44 42	0 29 31 23	14 1 59
1 38 49	50	24
15 55	8	4
27	Long. Apog.	14 2 27
Accélération. 2	9 5 36 52	Long. moy. ☊.
Long. moy. 7 19 54 17	7 19 54 17	1 11 41 5
Equat. + 12 42	An. moy. ☾. 10 14 17 25	

7 20 6 59		
Equat. du centre. + 4 15 46		
7 24 22 45		
Eveɛtion — 44 19		
7 23 38 26	Long. ☾ égalée.	
Variation + 36 27		
7 24 14 53	Long. ☾ dans ſon orbe.	
Reduɛtion — 2 55		
Lon. ☾ 7 24 11 58	reduite à l'Equinoxe moyenne.	
Preceſ. des Eq. — 12		
Lon. ☾ 7 24 11 46	par rapport à l'Equinoxe vrai.	
Obſer. 7 24 10 57		
Differ. 49		

I. Latit. auſt. 1° 6′ 15″

II. Latit. auſt. 8 50

Vraie lat. 1° 15′ 5″ auſtrale.

PROBLEME I.

L'heure étant donnée avec la hauteur apparente de la Lune & sa distance à une Etoile connue, trouver la longitude du lieu de l'observation?

Fig. 55. SOIT P, le Pole; Z, le Zénith; L & E, les lieux apparens du centre de la Lune & de l'Etoile, *l* & *e*, leurs lieux vrais, & LE, leur distance apparente.

1.° La différence des ascensions droites du Soleil & de l'Etoile & l'angle horaire du Soleil, détermineront l'angle horaire ZP*e* de l'Etoile; on aura donc par le 3^e^ cas des obliquangles, l'angle PZ*e* & le côté Z*e*, d'où soustrayant la refraction E*e*, on aura la distance apparente ZE de l'Etoile au Zenith.

2.° Les trois côtés connus du triangle LZE donneront l'angle LZE, & par conséquent *l*ZP; & retranchant de LZ la parallaxe moins la refraction, on aura *l*Z qui est dans le vertical LZ.

3.° Dans le triangle *l*ZP, on a deux côtés & l'angle compris; on aura donc ZP*l* & le côté P*l*; & par conséquent *l*P*e*, & l'ascension droite de la Lune par sa différence *l*P*e* avec l'ascension droite de l'Etoile *l*P, donne aussi sa déclinaison. On aura donc la longitude de la Lune.

4.° Dans le livre de la Connoissance des mouvemens célestes, on trouve cette longitude pour tous les jours de l'année à midi & à minuit sous le Méridien de Paris. Si la longitude observée approche de l'une des longitudes calculées pour midi & pour minuit du Méridien de Paris, on prendra la différence entre les deux longitudes calculées. On prendra aussi la différence entre la longitude observée & l'une des deux calculées, & l'on dira: comme la premiere différence est à 12 heures, ainsi la seconde est au tems qu'il faut ajouter à midi ou à minuit, ou qu'il en faut retrancher pour avoir le tems du Méridien de Paris, lorsque la Lune avoit la longitude qu'on a observée

vée. La différence de ce tems à celui de l'observation sera la différence des méridiens à fort peu près. Si l'on n'a pas ce livre, il faut se procurer les Ephémérides de feu Mr. l'Abbé de la Caille, qui peuvent servir pendant dix ans. Ce calcul suppose que le mouvement de la Lune est uniforme pendant 12 heures, & comme il est variable dans cet intervalle, on trouvera plus exactement le tems du méridien de Paris, en cherchant dans les tables, la longitude de la Lune pour le tems de Paris qu'on aura trouvé par la précédente analogie.

Exemple.

Le 5 Juillet 1764 par la latitude boréale 32° 12'; deux Observateurs se sont accordés à observer dans le même instant à 7h 38' ¼ la plus courte distance de Regulus au bord éclairé de la Lune 41° 19' 40", & l'autre a observé la distance apparente du centre de la Lune au Zénith, 52° 6'. On demande la longitude du lieu de l'observation.

On trouve dans les Ephémérides la longitude du Soleil vers le tems de l'observation, en prenant la partie proportionnelle,

	3f. 14°	9'	10"
La reduction à l'Equateur est dans la table	+ 1	13	11"
Donc l'ascension droite du Soleil étoit	105	22	21
L'ascension droite de Regulus étoit alors	148	57	8
La différence des deux *e* P S	43	34	47
L'angle horaire ZPS du Soleil, 7h 38' ¼ étoit	114	33	45
Donc l'angle horaire ZP*e* de l'Etoile étoit	70	58	58
La déclinaison de Regulus en Juillet 1764 étoit boréale	13	6	44
Donc sa distance au pole P*e* étoit	76	53	16

Triangle Z P *e*.

Pe =	76° 53′ 16″				
ZP =	57 48 0				
Somme	134 41 16				
Différ.	19 5 16				
½ Som.	67 20 38		compl. ar. finus		0.034877
½ Differ.	9 32 38		finus		9.219592
½ ZP*e*	35 29 29		Cotang.		0.146870
		Tang. ½ différ. des angles	14° 8′ 31″		9.401339
2 Cofin demi-fomme			67° 20′ 38″	compl. ar.	0.414315
: Cofin. demi-différ.			9 32 38		9.993947
: : Cotang. ½ ZP*e*			35 29 29		0.146870
: Tang. ½ fom. des angles			74° 26′ 10″		0.555132
		½ Differ.	14 8 31		
Donc PZ*e* = PZE =			88 34 41		
		P*e*Z =	60 17 39		
3 Le Rayon : au cof. de ZP*e*,			70° 58′ 58		9.513021
: : la tang. de ZP			57 48 0		0.200843
: à la tang. de M			27 21 32		9.713864
		P*e*	76 53 16		
		Donc N =	49 31 44		
4 cof. M			compl. ar.		0.051516
: cof. N					9.812288
: cof. ZP					9.726626
: cof. Z*e*	67° 4′ 51″				9.590430
— la réfraction	2 33				
Donc ZE =	67 2 18				
Diftance au bord	41 19 40				
+ le demi-diamètre	16 0				
Donc LE	41 35 40				

Triangle ZLE.

LE =	41° 35′ 40″
ZE =	67 2 18
LZ =	52 6 0

Somme 160° 43′ 58″
$\frac{1}{2}$ somme 80 21 59

— LZ	52	6	0	compl. ar. sin.	0.102877
1er reste	28	15	59	sinus	9.675386
— EZ	67	2	18	compl. ar. sin.	0.035851
2d reste	13	19	41	sinus	9.362720
				somme	9.176834

$\frac{1}{2}$ somme, sin. $\frac{1}{2}$ LZE 22° 48′ 25″ $\frac{1}{2}$ — 9.588417

Donc LZE = 45 36 51
EZP = 88 34 41

Donc LZP = *l*ZP = 134 11 32

La parallaxe horisontale étant dans les Ephémérides 58′ 40″, il faut en conclure la parallaxe de hauteur par cette analogie :

Le rayon : au sinus de ZL,	52° 6′ 0″	9.897123
: : la parallaxe horisontale	58′,666	1.768391
: A la parallaxe de hauteur	46′,293	1.665514
	ou 46′ 17″	
	Refr. 1 22	
	Diff. 44 55	
qu'il faut ôter de LZ,	52° 6′ 0	
pour avoir *l*Z	51 21 5	

Triangle PZ*l*.

PZ = 57° 48′ 0″
*l*Z = 51 21 5

Som. 109 9 5
Diff. 6 26 55
$\frac{1}{2}$ som. 54 34 32 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ diff. 3 13 27 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ *l*ZP = 67 5 46

1 Le sin. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés	compl. ar.	9.688905
: Au sin. de leur $\frac{1}{2}$ differ.		8.750089
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ *l*ZP		9.625823
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ differ des ang.	1° 40′ 13″	8.464817
2 Le cos. de la $\frac{1}{2}$ som. des côtés	compl. ar.	0.236853
: Au cos. de leur $\frac{1}{2}$ differ.		9.999312
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ *l*ZP		3.625824
: A la tang. de la $\frac{1}{2}$ som. des angles	36° 2′ 44″	9.861988

½ *som.* des angles	36° 2′ 44″	
½ Differ.	1 40 13	
Donc Z*l*P =	37 42 57	
ZP*l* =	34 22 31	
ZP*e* =	70 58 58	
*l*P*e* =	36 36 27	

3 *Le rayon* : au cosin de PZ*l*	134° 11′ 32″	9.843275
: : *La* tang. de PZ	57 48 0	0.200843
: A *la* tang. de M, *obtus*	132 5 41	0.044118
— Z*l* =	51 21 5	
Donc N =	80 44 36	

4 Le cos. de M	132° 5′ 41″	compl. ar.	0.173693
: Au cos. de N	80 44 36		9.206441
: : Le cos. de PZ	57 48 0		9.726626
: au cos. de P*l* *obtus*	97 20 47		9.106760

Ascension droite de Regulus	148° 57′ 8″
+ *l*P*e*	36 36 27
Asc. droite de la Lune	185 33 35
qu'il faut ôter de	270 0 0
pour avoir *l*Pπ (fig. 56)	84 26 25 au col. des solstices.

*Triangle l*Pπ (fig. 56).

P*l* = 97° 20′ 47″
Pπ = 23 28 21

Som.	120 49 8	demi som.	60° 24′ 34″
Diff.	73 52 26	demi differ.	36 56 13
*l*Pπ	84 26 25	demi *l*Pπ	42 13 12 ½.

1 Le sinus de la ½ somme des côtés.	compl. ar.	0.060692
: Au sinus de leur ½ différ.		9.778828
: : La cotang. ½ *l*Pπ		0.042208
: A la tang. de la ½ differ. des angl.	37° 17′ 34″	9.881728

2 Le cos. de la ½ som. des côtés	compl. ar.	0.306450
: au cos. de leur ½ differ.		9.902707
: : La cotang. ½ *l*Pπ		0.042208
: A la tang. de la ½ som. des angl.	60° 43′ 34″	0.251365
½ Différence	37 17 34	
*l*πP =	98 1 8	

Donc long. de la Lune obser.	6ſ	8°	1′	8″	
A minuit,	6	5	52	58	selon le Livre de la
A midi le jour suiv.	6	12	51	14	*connoiſ. des mouv. cel.*
Différ. en 12 heur.	0	6	58	16	
Entre l'obſ. & minuit	0	2	8	10	

La 1^re^ différence eſt à 12h, comme la 2^e^ eſt à	3h 40′ 24″
qu'il faut ajouter à mi nuit pour avoir	15 40 24
En ſuppoſant le mouv. uniforme ;	
mais le tems de l'obſervation étoit	7 38 15
Donc la diff. des Méridiens ſeroit dans cette hypotheſe,	8 2 9

Mais comme le mouvement de la Lune eſt variable dans l'intervalle de 12 heures, il faut chercher la longitude pour le tems qu'on vient de trouver ; ce qui donnera une longitude de la Lune fort approchante de celle qui a été obſervée ; & par la comparaiſon de cette nouvelle longitude avec celle de minuit, on trouvera plus exactement le tems du Méridien de Paris où la Lune a eu la longitude obſervée.

Nous avons calculé pour cet inſtant la longitude de la Lune d'après les Tables de M. Mayer ; nous en ſupprimerons ici le détail : on en a vu ci-deſſus un modele ; il ſuffit d'en donner le réſultat. A 15h 40′ 24″, tems vrai au Méridien de Paris ; ces Tables donnent la longitude de la Lune 6ſ 8° 1′ 46″

La longitude obſervée eſt	6	8	1	8
Différence	0	0	0	38
A minuit long. de la Lune	6	5	52	58
A 15h 40′ 24″	6	8	1	46
Differ. 3 40 24 Differ.	0	2	8	48

Ainſi on dira : 2° 8′ 48″ ou 7728′. : 3h 40′ 24″, ou 13224″ : : 38″ : 65″, ou 1′ 5″ qu'il faut ſouſtraire de 15h 40′ 24′., pour avoir le tems vrai de l'obſervation au Méridien de Paris, la longitude obſervée étant moindre que la longitude calculée.

On aura donc le tems vrai de l'obſervation au Méridien de Paris	15h 39′ 19″
Mais ce tems étoit dans le Mérid. de l'obſerv.	7 38 15
Donc la differ. des Mérid. eſt en tems	8 1 4
& en degr.	120 16 0

Il arrive souvent qu'on ne peut pas observer la hauteur de la Lune parce que l'horison est trop embrumé. Il faut alors recourir au Probléme suivant qui donne la longitude du lieu de l'observation par la seule distance de la Lune à deux Etoiles connues.

PROBLEME II.

L'heure étant donnée, avec la hauteur du pole & la seule distance de deux Etoiles connues au bord éclairé de la Lune, trouver la longitude du lieu de l'observation ?

LA plus courte distance de chaque Etoile au bord éclairé de la Lune (fig. 57), donnera toujours l'arc de grand cercle qui passe par le centre de la Lune, & l'on aura la distance de cette Etoile au centre de la Lune par
Fig. 57. le moyen du demi-diamètre de la Lune, qu'on trouve dans les Ephémérides.

L'heure étant donnée, on connoît, comme dans le premier Probléme les angles Z P *e*, ZP*a* des Etoiles *e* & *a* & leurs distances au pole P*e*, P*a*. On a donc dans chaque triangle ZP*e*, ZP*a*, deux côtés & l'angle compris. On aura donc les bases Z*e*, Z*a* & les angles en Z, en *e* & en *a*. On aura donc aussi les réfractions E*e*, A*a*, & par conséquent les arcs ZE, ZA; & les angles en Z ne variant pas par les réfractions, on aura deux côtés & l'angle compris dans le triangle EZA. On aura donc sa base EA & l'angle ZEA. Ayant les trois côtés LE, LA, EA du triangle LEA, on aura l'angle LEA, & par conséquent ZEL.

Dans le triangle ZEL, on a deux côtés & l'angle compris ZEL; on aura donc l'angle EZL, & par conséquent LZP ou *l*ZP. On aura aussi LZ; d'où retranchant la parallaxe, moins la réfraction, on aura la vraie distance *l*Z de la Lune au Zenith.

Enfin, on résoudra le triangle *l*ZP, & l'on aura la longitude ☾ observée comme dans le premier Probléme, & par conséquent la longitude du Navire.

Exemple.

Le 5 Juillet 1764 par la latitude boréale 32° 12', deux observateurs se sont réunis pour observer dans le même instant à 7h 38' ½ la plus courte distance de deux étoiles connues au bord éclairé de la Lune. L'un a trouvé la distance de Regulus à ce bord 41°. 19' 40", & l'autre celle de *η* du Lion 44° 3' 0".

Dans l'exemple du premier Probléme on a trouvé l'angle horaire ZP*e* de Regulus 70° 58' 58". PZE = PZ*e* = 88° 34' 41". Z*e* 67° 4' 51" & ZE 67° 2' 18".

La distance de Regulus au bord éclairé de la Lune étant	41° 19' 40"
On doit lui ajouter le demi diamètre de la Lune	16' 4
Pour avoir la distance apparente LE du centre à l'Etoile	41 35 44
On a aussi trouvé l'ascension droite du Soleil	105 22' 21"
Celle de *η* du Lion étoit en Juillet 1764	148 36 56
Donc sa distance *a*PS du Soleil étoit	43° 14 35
Et l'angle horaire ZPS au Soleil étant	114 33 45
L'angle horaire de l'Etoile *a*, ZP*a* sera	71 19 10
La distance *a*P de cette Etoile au pole, étoit en Juillet	72 5 45

Les deux côtés ZP, P*a* & l'angle compris ZP*a*, donneront

PZ*a* = 83° 48' 44"	P*a*Z = 62° 8' 16"	& Z*a* = 65° 23' 19"
PZ*e* = 88 34 41		— la refraction 2 21
*e*Z*a* = 4 45 57		donc ZA = 65 20 58

Triangle ZAE.

ZE = 67° 2' 18
ZA = 65 20 58

Som.	132 23 16	demi s.	66°	11'	38"
Differ.	1 41 20	demi dif.	0	50	40
EZA =	4 45 57	demi EZA	2	22	58 ½

1 Le sinus de la ½ somme des côtés	compl. ar.	0.038619
: Au sinus de leur ½ différence		8.168433
: : La Cotang. de ½ EZA		1.380763
: A la tang. de la ½ différence des angles 21° 9' 40"		9.587815

2 Le cos. de la $\frac{1}{2}$ somme des côtés compl. ar. 0.394003
: Au cos. de leur $\frac{1}{2}$ differ. 9.999953
: : La cotang. de $\frac{1}{2}$ EZA 1.380763

: A la tang de la $\frac{1}{2}$ somme des angles 89° 2′ 15″ 1.774719
$\frac{1}{2}$ Differ. 21 9 40

Donc ZEA 67 52 35

3 Le rayon : au cos. de EZA 9.998496
: : La tang. de ZA 0.338279

Fig. 56. : A la tang. de M 65° 16′ 27″ 0.336775
ZE = 67 2 18

Differ. N = 1 45 51

4 Le cos. de M compl. ar. 0.378536
: Au cos. de N 9.999794
: : Le cos. de ZA 9.620222

: Au cos. de AE 4° 40′ 24″ 9.998552

Distances au bord éclairé par l'observation. } 41° 19′ 40″ / 44 3 0
Ajoutez le $\frac{1}{2}$ diam. 0 16 4

Vous aurez LE = 41 35 44
& LA = 44 19 4

Triangles LAE & ZEL.

LE = 41° 35′ 44″
LA = 44 19 4
AE = 4 40 24

Somme 90 35 12
$\frac{1}{2}$ Som. 45 17 36

— LE 41 35 44 Compl. ar. sin. 0.177918
1er. reste 3 41 52 Sinus 1er reste 8.809517
— AE 4 40 24 Compl. ar. sin. 1.088978
2e. reste 40 37 12 Sinus 2e reste 9.813607

Somme 9.890020
$\frac{1}{2}$ somme, Sinus de $\frac{1}{2}$ LEA 61° 46′ 18″ 9.945010
Donc LEA = 123 32 36
ZEA = 67 52 35

ZEL = 55 40 1

ZE = 67° 2′ 18″
LE = 41 35 44

Somme 108 38 2
Differ. 25 26 34
½ Som. 54 19 1
½ diff. 12 43 17
½ ZEL 27 40 0½

1 Le sinus de la ½ somme	54° 19′ 1″	compl. ar.	0.090307
: Au sin. de la ½ differ.	12 43 17		9.342838
: : Cotang. de ½ ZEL	27 50 0½		0.277376
: A la tang. de la ½ dif. des angl.	27 10 46		9.710521
2 Le cos. de la ½ somme	54 19 1	compl. ar.	0.234107
: Au cos. de la ½ différence	12 43 17		9.989206
: : La cot. de ½ ZEL	27 50 0½		0.277376
: A la tang. de la ½ som. des ang.	72 28 40		0.500689
½ Differ.	27 10 46		
Donc LZE =	45 17 54		
EZP =	88 34 41		
LZP =	133 52 35		
3 Le rayon : au cos. de ZEL	55° 40′ 1″		9.751281
: : La tang. de LE	41 35 44		9.948268
: A la tang. de M	26 35 44		9.699549
ZE	67 2 18		
Donc N =	40 26 34		
4 Cos. M		compl. ar.	0.048571
: Cos. N			9.881416
: : Cos. LE			9.873814
Cos. LZ 50° 28′ 6″			9.803801
Le rayon : au sinus de ZL			9.887208
: : La parallaxe horisontale	58′, 333		1.770358
: : A la parallaxe de hauteur	45, 453 = 45′ 27″		1.657566
— la refraction	1 26		
Différence	44 1		
Otez de LZ 50°	28 6		
Reste lZ 49	44 5		

Triangle PZ*l*.

PZ = 57° 48′ 0″
Z*l* = 49 44 5

Som. 107 32 5
Differ. 8 3 55
$\frac{1}{2}$ *som.* 53 46 2 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ Differ. 4 1 57 $\frac{1}{2}$
PZ*l* 133 52 35
$\frac{1}{2}$ PZ*l* 66 56 17 $\frac{1}{2}$

1 Le sin. de la $\frac{1}{2}$ som. des côtés compl. ar.		9.093330
: Au sin. de lenr demi differ.		8.847108
: : Cotang. $\frac{1}{2}$ PZ*l*		9.629153
: Tang. $\frac{1}{2}$ differ. des angl.	2° 7′ 33″	8.569591
2 Cos. $\frac{1}{2}$ som. des côtés compl. ar.		0.228364
: Cos. $\frac{1}{2}$ differ.		9.998923
: : Cotang. $\frac{1}{2}$ PZ*l*		9.629153
: Tang. $\frac{1}{2}$ som. des angl.	35° 41′ 43″	9.856440
$\frac{1}{2}$ differ.	2 7 33	
ZP*l* =	33 34 10	
ZP*e* =	70 58 58	
*e*P*l* =	37 24 48	
Ascens. droite de *e*	148 57 8	
Donc celle de la Lune	186 21 56	
& *l*Pπ =	83 38 4	

3 Le rayon au cos. de PZ*l*	133° 52′ 35″	9.840799
: : La tang. de PZ	57 48 0	0.200843
: A la tang. de M *obtus*	132 15 26	0.041642
	Z*l* 49 44 5	
Différence N	82 31 21	
4 Cos. M compl. ar.		0.172334
: Cos. N		9.114400
: : Cos. PZ		9.726626
: Cos. P*l* *obtus*	95° 55′ 9″	9.013360

Triangle *l*Pπ.

P*l* = 95° 55′ 9″
Fig. 56. Pπ = 23 28 21

Som. 119 23 30
Differ. 72 26 48
$\frac{1}{2}$ Som. 59 41 45
$\frac{1}{2}$ Differ. 36 13 24
$\frac{1}{2}$ *l*Pπ 41 49 2

1 sin. $\frac{1}{2}$ som. des côtés compl. ar.		0.063809
: Sin. de leur $\frac{1}{2}$ differ.		9.771539
: : Cotang. $\frac{1}{2}$ *l*Pπ		0.048349
: Tang. $\frac{1}{2}$ differ. des angl.	37° 25′ 56″	9.883697
2 Cos. $\frac{1}{2}$ som. des côtés compl. ar.		0.297061
: Cos. $\frac{1}{2}$ differ.		9.906722
: : Cotang. $\frac{1}{2}$ *l*Pπ		0.048349
; Tang. $\frac{1}{2}$ som. des angl.	60° 46′ 9″	0.252132
$\frac{1}{2}$ Differ.	37 25 56	
Pπ*l* =	98 12 5	

Longitude ☾ obſervée	6ſ	8°	12′	5″
Long. ☾ à minuit, ſelon la *connoiſſance des mouv. celeſt.*	6	5	52	58
A midi le jour ſuivant	6	12	51	14
1re. Différence dans l'intervalle de 12 heures	0	6	58	16
2e. Différence entre minuit & le tems de l'obſervation	0	2	19	7
La 1re. différence eſt à 12 heures comme la ſeconde eſt à		3h	59	28
Qu'il faut ajouter à minuit pour avoir le tems à peu près		15	59	28
D'où retranchant le tems de l'obſervation		7	38	15
On aura la différence des Méridiens en tems		8	21	13

Ce qui ſuppoſe le mouvement de la Lune uniforme pendant 12 heur.

Pour avoir ce tems plus exactement, on cherchera la longitude de la Lune pour un autre tems qui approche plus que minuit de 15h 59′ 28″, ſans qu'il ſoit néceſſaire de ſe gêner à ce tems trouvé.

Prenons donc la longitude qui convient à 15h 40′ 24″.
Nous l'avons trouvée dans l'exemple précédent 6ſ 8° 1′ 46″
Et ſa différence entre minuit & ce tems dans 3h 40′ 24″
2° 8′ 48″
La différence entre la longitude obſervée & celle de minuit 2° 19′ 7′

Diſons donc par les logarithmes, 2° 8′ 48″ ou 2, 1466 compl. ar. 9.668235
eſt à 2° 19′ 7″ ou 2, 317 0.364926
Comme 3h 40′ 24″ ou 3h 67333 0.565060

A 3h 9648 = 3h 57′ 52″ 0.598221
qu'il faut ajouter à minuit pour avoir le tems de Paris
15h 57′ 52″
Celui de l'obſerv. 7 38 15

Differ. des Mérid. 8 19 37 au lieu de 8h 21′ 13″. La différence eſt 1′ 36″, d'où il ſuit qu'il faut néceſſairement calculer la longitude de la Lune pour un tems fort approchant de celui qu'on a trouvé par la partie proportionnelle.

PROBLEME III.

Trouver la longitude du Navire par les obſervations des deux Problêmes précédents, lorſqu'on n'a pas pu les faire dans le même inſtant.

OBſervez une ſeconde fois la diſtance de l'une des deux Etoiles à la Lune,& prenez la différence de ces deux diſtances ; enſuite vous direz : comme l'intervalle entre ces deux dernieres obſervations eſt à cette différence, ainſi l'intervalle entre les deux premieres obſervations eſt à la différence entre la premiere diſtance obſervée & celle qu'on eut obſervé dans le même inſtant, ce qui donnera l'équivalent de deux obſervations faites en même tems.

Exemple 1.

Le 5 Juillet 1764 par la latitude boreale 32° 12′, on a obſervé à 7h 38′15″ la diſtance du centre de la Lune au Zenith 52° 6′; & enſuite à 7h 42′ 15″, on a obſervé la plus courte diſtance de Regulus au bord éclairé de la Lune 41° 21′ 0″, & enfin à 7h 50′ 15″, on l'a trouvée 41° 25′ 40″. On demande quelle a du être cette diſtance au moment de la premiere obſervation.

L'intervalle entre les deux dernieres obſervations eſt de 8′, & la différence des diſtances eſt de 4′ 40″. L'intervalle entre les deux premieres obſervations eſt de 4′. Diſons donc, comme 8 eſt à 4, ainſi 4′ 40″ eſt à 2′ 20″ dont on doit diminuer la premiere diſtance de l'Etoile à la Lune pour la reduire au moment de la premiere obſervation. On aura donc pour ce moment la diſtance de Regulus au bord éclairé de la Lune 41° 19′ 40″, & l'on trouvera la longitude du Navire comme dans le premier Probléme.

Exemple 2.

Le 5 Juillet 1764 par la même latitude 32° 12′ on a trouvé à 7h 38′ 15″ la plus courte distance de Regulus au bord éclairé de la Lune 41° 19′ 40″ & à 7h 42′ 15″ celle de η du Lion 44° 6′. Ensuite on a observé de nouveau la distance de η du Lion ; & à 7h 50′ 15″, on l'a trouvée de 44° 12′.

Les deux intervalles sont 8′ & 4′, & la derniere différence 6′ ; donc la premiere étoit 3′ qu'il faut soustraire de 44° 6′ pour avoir 44° 3′, parce que la Lune s'est écartée de l'Etoile qui étoit à son occident. On trouvera donc la longitude comme dans l'exemple du 2e Probléme.

PROBLEME IV.

L'heure étant donnée avec la seule distance d'une Etoile connue au bord éclairé de la Lune, trouver la longitude du lieu de l'observation?

LES Marins connoissent ordinairement à trois ou quatre degrés près leur longitude, & de là ils peuvent conclure l'heure du Méridien de l'Observatoire de Paris, en ajoutant au tems donné 4 minutes pour chaque degré de longitude si Paris est à l'Est du Navire, ou en les retranchant s'il est à l'Ouest. Fig. 57.

On cherchera donc pour l'heure présumée de Paris la longitude, la latitude, la parallaxe & le diamètre de la Lune. Cet angle horaire joint à la différence des ascensions droites du Soleil & de l'Etoile, donnera l'angle horaire ZP*e*. La différence des ascensions droites de la Lune & de l'Etoile donnera *l*P*e* & ZP*l* ; sa déclinaison donnera P*l* ; on aura donc Z*l*, PZ*l*, *e*Z*l*, & la parallaxe moins la réfraction donnera ZL, la réfraction de l'Etoile donnera ZE, & dans le triangle LEZ, ayant deux côtés & l'angle compris, on aura la base LE, qui est la distance apparente de l'Etoile an centre de la Lune. On ôtera de cette

distance le demi diamètre de la Lune, si l'on a pris la distance de l'Etoile au bord le plus proche, ou bien on l'ajoutera si l'on a pris la distance au bord éloigné; ensuite on prendra la différence entre la distance observée & la distance calculée, & l'on diminuera ou l'on augmentera le tems présumé pour avoir une nouvelle distance calculée. Enfin par la regle de fausse position on trouvera, comme dans les Problémes précédens, le tems vrai de l'Observatoire de Paris, & la longitude du Navire.

Exemple.

Le 21 Décembre 1725 à 11h 14′ tems vrai, ou 11h 13′ tems moyen à l'Ouest du Méridien de Paris par la latitude de 40° Nord, on a observé la plus courte distance de γ du Lion au bord le plus proche de la Lune, & on l'a trouvée 20° 50′. On demande la différence des longitudes.

On présume que la différence des tems est 2h 17′ 20″, laquelle étant ajoutée au tems moyen de l'observation 11h 13′ donne 13h 30′ 20″ pour le tems moyen à Paris.

On trouvera par les tables de Mr. Mayer pour ce tems la longitude du Soleil 9s 0° 15′ 47″; son ascension droite 270° 17′ 14″.

La longitude de la Lune 4s 4° 5′ 39″, sa latitude boreale 4° 59′ 38″, sa parallaxe horizontale 60′ 24″, son diamètre horizontal 32′ 55″, ce qui donne dans le triangle Fig. 58. lPπ, l'angle π = 34° 5′ 39″, le côté $l\pi$ = 85° 0′ 22″ & Pπ en 1725 = 23° 28′ 37″; on aura donc lPπ = 142° 16′ 42″, l'ascension droite de la Lune 127° 43′ 18″ & sa distance lP au pole = 65° 52′ 22″.

L'angle horaire ZPS de 11h 14′ est de 168° 30′ 0″.

L'arc γZS de l'ascension droite du Soleil étant de plus de trois quarts de cercle, & s'étendant de l'Occident à l'Orient, le Belier est entre le Zenith & le Soleil dans ZS. Donc en retranchant cet arc γZS = 270° 17′ 14″ de 360°, on aura l'angle γPS de 89° 42′ 46″ & γPZ = ZPS — γPS sera = 78° 47′ 14″; c'est l'ascension droite du Méridien ZP.

L'arc γZl de la Lune eſt 127° 43′ 18″, & γZE de l'Etoile γ du Lion eſt 151° 11′ 32″. Otant de ces deux arcs l'aſcenſion droite γZ du Méridien, on aura les angles horaires $ZPl = 48° 56' 4''$ & $ZPe = 72° 24' 18''$.

Dans le triangle ZPl on a les deux côtés $ZP = 50°$. $Pl =$ 65° 52′ 22″ & l'angle compris ZPl 48° 56′ 4″. On aura donc l'angle $lZP = 95° 59' 14''$ & la baſe $Zl = 43° 46'$ 44″, & pour avoir la diſtance apparente ZL on dira: le rayon eſt au ſinus de Zl, comme la parallaxe horizontale 60′ 4″ à la 1re parallaxe de hauteur 41′ 47″ qu'il faut ajouter à Zl pour avoir 44° 28′ 31″. Le rayon eſt à cette nouvelle diſtance 44° 28′ 31″, comme la parallaxe horizontale 60′ 4″ eſt à la vraie parallaxe Ll 42′ 19″ qu'il faut ajouter à la diſtance Zl 43° 46′ 44″ pour avoir la diſtance apparente ZL 44° 29′ 3″, d'où il faut encore retrancher la refraction 1′ 5″, & ZL ſera 44° 27′ 58″.

Dans le triangle ZPe on a les deux côtés ZP, 50° & Pe 68° 47′ 21″, complément de la déclinaiſon de l'Etoile. On a auſſi l'angle compris $ZPe = 72° 24' 18''$. On aura donc l'angle PZe 83° 50′ 1″, qui étant ſouſtrait de PZL, 55° 59′ 14″ donne LZE 12° 9′ 13″; on aura auſſi $Ze =$ 63° 21′ 23″, d'où ſouſtrayant la refraction Ee, 2′ 11″, on aura ZE = 63° 19′ 12″.

Enfin dans le triangle LZE on a deux côtés LZ = 44° 27′ 58″, ZE = 63° 19′ 12″ & l'angle LZE = 12° 9′ 13″; on aura donc la baſe LE 21° 12′ 6″, d'où il faut ôter le demi diamètre de la Lune corrigé 16′ 40″, eû égard à la hauteur de la Lune pour avoir ſa diſtance 20° 55′ 26″ au bord le plus proche. Mais l'obſervation donne 20° 50′ 0″

Différence 5′ 26″

Le tems ſuppoſé a donc donné 5′ 26″ plus que l'obſervation; & comme la Lune s'approche de l'Etoile qui eſt plus orientale, il nous faut augmenter ce tems de 15′ & les ajouter au tems moyen de Paris 13^h 30′ 20″ pour avoir 13^h 45′ 20″; il faut auſſi chercher la longitude de la Lune & ſa diſtance à l'Etoile, comme l'a fait M. Halley dans le même exemple.

Les Tables de M^r^. Mayer donnent la longitude du Soleil $9^s 0^\circ 16' 25''$, son ascension droite $270^\circ 17' 52'$. γPS $89^\circ 42' 8''$, ZPS $168^\circ 30' 0''$, γPZ $78^\circ 47' 52''$, γZe $151^\circ 11' 32''$, ZPe $72^\circ 23' 40''$. La longitude de la Lune $4^s 4^\circ 14' 43''$, $L\pi P = 34^\circ 14' 43''$, sa latitude Nord $4^\circ 59' 37''$, $\pi l = 85^\circ 0' 23''$, sa parallaxe horizontale $60' 24''$, son demi diamètre $16' 27'' \frac{1}{2}$.

Dans le triangle $lP\pi$ on a $l\pi$, πP & l'angle $l\pi P$. Donc on aura $lP\pi = 142^\circ 7' 23''$, & l'ascension droite de la Lune $\gamma Pl = 127^\circ 52' 37'$; donc $ZPl = 49^\circ 4' 45''$. On aura aussi $Pl = 65^\circ 55' 36''$.

Dans le triangle ZPl on a les deux côtés ZP, Pl, & l'angle compris ZPl, on aura donc l'angle $PZl = 95^\circ 57' 12''$, & la base Zl $43^\circ 55' 8''$, à laquelle on ajoutera la premiere parallaxe de hauteur $41^\circ 54'$ pour avoir $44^\circ 37' 2''$ qui servira à trouver la vraie parallaxe $42' 25''$ qu'il faut ajouter à Zl $43^\circ 55' 8''$ pour avoir $44^\circ 37' 33''$; & ôtant la refraction $1' 6''$; on aura la distance apparente $ZL = 44^\circ 36' 27''$

Le triangle ZPe donne PZe =	$83^\circ 50' 23''$
PZL =	$95^\circ 57' 12$
Et Ze =	$63^\circ 20' 54$
— la refr.	$2' 12$
Donc ZE =	$63^\circ 18' 42$
Enfin dans le trian. LZE on a LZ	$44^\circ 36' 27$
Et LZE =	$12^\circ 6' 50$
On aura donc LE =	$21^\circ 2' 47$
Demi diam. horizontal	$16' 27 \frac{1}{2}$
Augmentation	$12 \frac{1}{2}$
Vrai demi diam.	$16' 40$
Distance de l'Etoile au bord	$20^\circ 46' 7$
Observation	$20^\circ 50' 0$
Différence	$3' 53$
Premier calcul	$20^\circ 55' 26$
Différence des calculs	$9' 19''$ en $15'$

La Lune a donc parcouru dans $15'$ de tems un arc de $9' 9''$.

9′ 19″ & le premier calcul étant éloigné de la vraie distance observée de 5′ 26″, on dira ; comme 9′ 19″ sont à 15′ de tems, ainsi 5′ 26″ sont à 8′ 45″ qu'il faut ajouter au premier tems supposé 13^h 30′ 20″ pour avoir

	13^h 39′ 20″	à Paris
Et le tems moyen de l'observation étant	11^h 13′ 0	on aura
la différence des tems entre Paris & le Navire	2^h 26′ 20	
Et entre Greenvich & le Navire retranchant	9′ 10	
La différence sera	2^h 17′ 10	
Les Tables de Mr. Halley lui ont donné	2^h 18′ 33	
Différence	1′ 23″	en deg. 20′ 45″

REMARQUES.

Cette méthode de Mr. Halley ne suppose qu'une seule observation qu'on peut faire en tous tems, & c'est un avantage qu'elle a sur les deux méthodes précédentes ; mais elle a quelques défauts qu'on ne doit pas dissimuler.

1.° Mr. Halley avoue qu'on ne peut pas déterminer assez exactement la distance apparente de la Lune à l'Etoile, sans observer immédiatement leurs hauteurs apparentes, lorsque ces hauteurs sont fort différentes, à cause, dit-il, de la trop grande différence des refractions ; & lorsque les deux hauteurs ne different pas beaucoup, il corrige la distance observée en lui ajoutant autant de secondes qu'elle contient de degrés, ce qui abrege un peu le calcul. Ce défaut est commun aux trois méthodes & exige la même correction.

2.° Cette méthode introduit dans le calcul la latitude de la Lune qui n'est pas aussi certaine que sa longitude, de l'aveu de Mr. Mayer ; les deux premieres méthodes n'y ont aucun égard.

3.° Dans cette méthode on fait dépendre la longitude du Navire du mouvement de la Lune par rapport aux Etoiles fixes. Or, il est évident que ce mouvement n'est jamais aussi rapide que celui de sa longitude ; car, soit Fig. 59. Π le pole de l'Ecliptique, E l'Etoile, L la Lune, LE = λE la distance de la Lune à l'Etoile, & *l*E, sa *distance* à *la* même Etoile dans un tems donné, l'arc *l*λ mesure le mouvement qui éloigne la Lune de l'Etoile & l'angle *l*ΠL mesure son mouvement en longitude, qui est égal à l'arc de l'Ecliptique compris entre les deux cercles *l*Π, LΠ ; or cet arc est beaucoup plus grand que l'arc *l*λ. Le mouvement *l*λ seroit encore plus petit si l'Etoile étoit en *e* dans le cercle de longitude ΠL, ce qui approcheroit λ de *l*. C'est ce qui nous a déterminé à préférer le mouvement de longitude à tout autre mouvement. Les Etoiles connues ne doivent servir qu'à déterminer la longitude de la Lune dans le moment de l'observation.

4.° La méhode de Mr. Halley est indirecte. Elle suppose qu'on connoit à peu près la longitude que l'on cherche. Feu Mr. l'Abbé de la Caille a senti cette difficulté, & il a voulu y suppléer par son Almanach nautique, qui donne l'heure de la distance de plusieurs Etoiles au bord éclairé de la Lune. Mais cet Almanach nautique n'existe pas; & si un Astronome laborieux vouloit le donner au public, il seroit forcé de se borner à quelques Etoiles, & la méthode par conséquent ne seroit pas générale.

5.° Cette méthode de Mr. l'Abbé de la Caille suppose trois observations qui auroient été faites successivement, & elle réduit les hauteurs apparentes de la Lune & de l'Etoile à celles qu'on auroit trouvées si les trois observations avoient été faites dans un même instant; il emploie pour cela la methode des variations & un chassis de réduction qui exige une grande dextérité dont les Marins ne sont gueres capables. S'ils s'exercent au calcul, ils y trouveront plus de facilité & d'exactitude.

PROBLEME V.

Etant donné le tems vrai du passage de la Lune par le Méridien, & de l'observation de sa distance à une Etoile connue, trouver la longitude du lieu de l'observation?

L'Intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien & le moment où l'on a observé sa distance apparente LE, donne l'angle horaire ZPL, l'ascension droite de l'Etoile donne ZP*e*, sa déclinaison donne P*e* & par conséquent Z*e*; & ôtant la refraction E*e*, on aura ZE. On aura donc aussi ZPE & PE, & par conséquent LPE; donc dans le triangle LPE on a deux côtés LE, EP & l'angle LPE opposé à LE; on aura donc LP & LZP & dans le triangle LPZ ayant deux côtés & l'angle compris, on aura LZ, d'où il faudra ôter la parallaxe moins la refraction pour avoir *l*Z. Dans le triangle LZP, on aura *l*P & *l*PZ, & par conséquent l'ascension droite, la déclinaison & la longitude de la Lune comme dans les deux premiers Problémes; on aura donc la longitude du lieu de l'observation. Fig. 6

On trouve les variations de LP & de LPZ, de *e*P & de *e*PZ par le premier & le cinquieme Article de la premiere régle des variations.

Exemple.

Le 5 Juillet 1764 par la la latitude Nord 32° 12′. Le centre de la Lune a passé au Méridien à 5h 18′ 54″, & l'on a trouvé à 7h 38′ 15″ que la plus courte distance de Regulus au bord éclairé de la Lune étoit 41° 19′ 40″; on demande la longitude du lieu de l'observation.

L'angle horaire ZPL est de 2h 19′ 21″ qui valent 34° 50′ 13″.

Le triangle ZP*e* dont on a P*e* = 76° 53′ 16″ par la déclinaison de l'Etoile, ZP = 57° 48′ par la latitude, &

ZPe = 70° 58′ 58″ par l'ascension droite du Soleil, son angle horaire, & l'ascension droite de l'Etoile, donne Ze = 67° 4′ 51″. Ee = 2′ 23″ = 2′, 55. ZE = 67° 2′ 18″, & PeZ = 6° 17′ 39″, comme dans l'exemple du premier Probléme.

Par le premier article de la premiere regle des variations, on dira : le rayon est au cosinus de PeZ, comme la variation Ee est à la variation du côté Pe que l'on trouvera = 1′ 16″, retranchez-la de Pe 76° 53′ 16″ vous aurez PE = 76° 52′ 0″.

Par le 5e article de la même regle, on dira : le sinus de Pe : au sinus de PeZ, comme la variation Ee : à la variation EPl = 2′ 11″ qu'il faut soustraire de ZPe 70° 58′ 58″, pour avoir ZPE = 70° 56′ 57″ ;
mais ZPL = 34 50 13,
donc LPE = 36 6 34

Triangle LPE

Dont on a LE = 41° 35′ 40″, en ajoutant le demi-diamètre ☾ 16′ à la distance observée PE = 76 52 0, & LPE 36° 6′ 34″ ; donc par le cinquieme cas on dira :

1 Le ray. est au Cos. de LPE	36°	6′	34″		9.907354	
: : La tang. de PE	76	52	0		0.632047	
: A la tang. de M aigu	73	53	29		0.539401	
2 Le Cos. de PE	76	52	0	compl. ar.	0.643557	
Au Cos. de LE	41	35	40		9.873822	
: : Le Cos. de M	73	53	29		9.443199	
Au Cos. de N aigu	24	2	42		9.960578	
LP = M + N =	97	56	11			

Triangle LZP, dont on a

LP =	97°	56′	11″	1 Le sinus de la ½ som. compl. ar.	0.009809
ZP =	57	48	0	: Au sinus de la ½ differ.	9.535469
				: : Cot. ½ ZPL	0.503438
Som.	155	44	11	: A la tang. ½ diff. des angl. 48° 12′ 25″	0.048716
Differ.	40	8	11		
ZPL	34	50	13		

Demi som. 77° 52′ 5″ ½	2 Cos. de la ½ som.		compl. ar.		0.677447
½ Differ. 20 4 5 ½	: Au Cos. de la ½ differ.				9.972797
½ ZPL 17 25 6 ½	: : Cotang. ½ ZPL				0.503438
	: Tang. ½ som. des angl.			85° 59′ 4″	1.153682
	½ Differ.			48 12 25	
	Donc PZL =			134 11 29	
	PLZ =			37 46 39	

3 Le ray. : au cos. ZPL	34° 50′ 13″		9.914227
: : La tang. ZP	57 48 0		0.200843
: A Tang. de M *aigu*	52 30 11		0.115070
LP	97 56 11		
Différence N	45 26 0		
4 Cos. M	52 30 11	compl. ar.	0.215584
: Cos. N	45 26 0		9.846175
: : Cos. ZP	57 48		9.726626
: Cos. LZ	52 5 54		9.788385
Le rayon : au sin. LZ			9.897113
: : La paral. horiz. 58′, 666			1.768386
: A la paral. de hauteur. 46, 291 = 46′ 17″			1.665499
— la refraction 1 25			
*L*l = 44 52			
LZ = 52° 5 54			
*l*Z = 51 21 2			

Triangle lZP, dont on a

PZ = 57° 48′ 0″	1 Le sinus de la ½ somme compl. ar.	0.088908
*l*Z = 51 21 2	: au sinus de la ½ differ.	8.750140
	: : Cotang. ½ *l*ZP	9.625832
Som. 109 9 2	: Tang. ½ differ. des angl. 1°. 40′ 14″	8464880
Diff. 6 26 58		
*l*ZP 134 11 29	2 Cosin de la ½ somme compl. ar.	0.236847
Demi som. 54 34 31	: Au cosin de la ½ differ.	9.999312
½ Differ. 3 13 29	: : Cotang. ½ *l*ZP	9.625832
½ *l*ZP 67 5 44½	: Tang. ½ som. des angles 36° 2′ 45″	9.861991
	½ Differ. 1 40 14	
	Donc ZP*l* = 34 22 31	

Et le reste comme dans le Probléme I.

PROBLEME VI.

L'angle horaire ZPL *de la Lune étant donné comme dans le Probléme précédent, avec sa distance apparente au Zenith* ZL, *trouver la longitude?*

Fig. 61. DAns le triangle ZPL on a deux côtés ZP, ZL & l'angle ZPL opposé à ZL ; on aura donc par le cinquieme cas des obliquangles, les deux autres angles & le troisieme côté LP ; ensuite retranchant de ZL la parallaxe moins la refraction, on aura *l*Z.

Dans le triangle *l*ZP on a deux côtes *l*Z, ZP & l'angle compris. On aura donc le vrai angle horaire ZP*l*, & le complément *l*P de la déclinaison, & par conséquent l'ascension droite de la Lune, en comparant cet angle horaire avec celui du Soleil & avec son ascension droite ; on aura donc la longitude comme dans les autres Problémes.

Exemple.

Le 5 Juillet 1764 à 32° 12′ latit. Nord, la Lune a passé au Méridien à 5h 18′ 54″ & sa distance au Zénith a été observée à 7h 38′ $\frac{1}{4}$ égale à 52° 5′ 54″. On demande la long.?

L'angle ZPL est de 34° 50′ 13″, ZP = 57° 48′, & LZ = 52° 5′ 54″ ; on a donc,

1 Le rayon : au cos. ZP	57° 48′ 0″			9.726626
2 : Tang. ZPL	34 50 13			9.842593
4 Cot. *m aigu*	69 39 6 $\frac{1}{2}$			9.569219
2 Tang. ZL	52 5 54		compl. ar.	9.891273
3 Tang. ZP	57 48 0			0.200843
1 : Cos. *m*	69 39 6 $\frac{1}{2}$			9.541235
4 Cos. *n aigu*	64 32 23 $\frac{1}{2}$			9.633351
m + *n* = PZL =	134 11 30			

Otant de LZ, la parallaxe moins la réfraction 44′ 52″ on aura *l*Z = 51° 21′ 2″, & tout le reste comme dans le Probléme précédent.

PROBLEME VII.

Le supplément LZP *de l'angle azymuthal étant donné (comme* 134° 11′ 30″ *) & l'angle horaire* LPZ *(* 34° 50′ 13″ *), trouver la longitude?*

ON a ici deux angles & le côté compris ; donc par le quatrieme cas, Fig. 61.

LZP =	134° 11′ 30″
LPZ =	34 50 13
Somme	169 1 43
Differ.	99 21 17
ZP	57 48 0
Demi somme	84 30 51 ½
Demi differ.	49 40 38 ½
½ ZP	28 54 0

1 Le sinus de la ½ somme des angles		compl. ar.	0.001994
: Sinus de leur ½ differ.			9.882190
: : Tang. ½ ZP			9.741962
: Tang. demi differ. des côtés	22° 55′ 9″		9.626146
2 Le cos. de la ½ somme des angl.		compl. ar.	1.019555
: Cos. de leur ½ differ.			9.810965
: : Tang. ½ ZP			9.741962
: Tang. ½ som. des côtés	75° 1′ 3″		0.572482
Demi differ.	22 55 9		
Donc LP =	97 56 12		
LZ =	52 5 54		

Otant comme ci-devant de LZ, 44′ 52″, on aura *l*Z 51° 21′ 2″, & tout le reste comme dans le cinquieme Probléme.

PROBLEME VIII.

L'angle Azymuthal de la Lune & sa distance au Zénith étant donnés, trouver la longitude?

Fig. 61. ON a dans le triangle *l*ZP deux côtés *l*Z, ZP & l'angle compris; on aura donc l'angle horaire & tout le reste comme ci-devant.

PROBLEME IX.

La hauteur méridienne de la Lune & le tems de son passage au Méridien étant donnés, trouver la longitude.

LA hauteur méridienne purgée de la réfraction & de la parallaxe donnera la déclinaison de la Lune par le moyen de la hauteur du pole. Le tems de son passage au Méridien donnera son ascension droite; on aura donc la longitude.

REMARQUE.

Ces quatre derniers Problémes sont fort utiles lorsqu'on est à terre & qu'on peut observer le moment du passage de la Lune par le Méridien, soit par des hauteurs égales, soit par trois ou quatre hauteurs aux environs du Méridien. Mais à la mer cette observation est trop difficile, & le compas de variation n'est pas assez exact pour déterminer l'angle azymuthal de la Lune à quelques minutes près.

La distance de la Lune au Soleil, lorsqu'on peut l'observer, fait le même effet que sa distance à une Etoile

quelconque, & le Probléme I. s'applique fort aisément à cette observation. Le tems le plus propre est celui où la Lune n'a pas passé son premier quartier, ou lorsqu'elle a passé son dernier quartier, c'est-à-dire, pendant les quatre jours qui précédent le premier quartier & pendant les quatre qui suivent le dernier quartier ; il faut observer cette distance depuis une demi-heure après le lever du Soleil jusques vers 10 heures ou $10\frac{1}{2}$ du matin, & depuis 2 heures du soir jusques à une demi-heure avant le coucher du Soleil. Après avoir vérifié l'Octant, on pointera sa lunette à la Lune pour la voir dans la partie non étamée du petit miroir, & sans la perdre de vue, on tournera l'Octant vers le Soleil jusqu'à ce que l'image de son bord le plus prochain vienne raser le bord éclairé de la Lune dans sa distance la plus courte. On marquera dans ce moment le tems de la montre ; après quoi on prendra la hauteur du centre de la Lune comme on prend celle du Soleil.

Si deux Observateurs se réunissent, l'un des deux pourra fort aisément par un mouvement leger de l'alidade assujettir l'image de la Lune à rester sur le terme de l'horison de la mer, pendant que l'autre fait ses tentatives pour prendre exactement la distance d'une Etoile ou du Soleil au bord éclairé de la Lune.

En multipliant les observations & prenant un milieu, on s'assure plus de la longitude de la Lune ; rien n'empêche de prendre deux ou trois fois la distance de la Lune à l'Etoile & sa hauteur apparente en mettant le moins d'intervalle de tems qu'il soit possible entre chaque observation. Le calcul de trois determinations de longitude ne sera gueres plus long que celui d'une seule, parce que les mêmes nombres y serviront. Si l'on prend exactement deux hauteurs du Soleil ou d'une Etoile, elles serviront à connoître avec plus de précision la quantité dont la montre avance ou retarde. Ce point est essentiel pour déterminer la longitude du Navire dans toutes les différentes méthodes.

Par exemple, si j'avois trouvé par les hauteurs du Soleil

qu'à 9h 48′ du matin la montre retardoit de 3′ 50″, & qu'à 2h 23′ du soir elle retardoit de 5′ 42″; & si j'avois observé la distance de la Lune au Soleil à 11h 17′ $\frac{1}{2}$ du matin, je dirois : si en 4h 35′ de tems la montre a augmenté son retard de 1′ 52″, en 1h 29″ de tems (ou depuis 9h 48′ jusqu'à 11h 17′), elle a du augmenter son retard de 37″. Donc à 11h 17′ $\frac{1}{2}$, elle retardoit de 4′ 27″; donc l'heure vraie de l'observation de la distance est 11h 21′ 57″ du matin.

En général il faut un intervalle de deux heures au moins entre ces deux déterminations. En les comparant on aura la marche de l'horloge à l'égard du tems vrai, & par conséquent on pourra en conclure l'instant de l'observation de la distance de la Lune à l'Etoile & au Soleil.

Pour la précision de tous ces calculs, il faut que le vaisseau n'ait changé ni de route ni de vitesse, du moins sensiblement pendant l'intervalle des observations, ou bien il faut y avoir égard par la méthode des variations.

Quand on se trouve à la vue d'une Isle ou d'une terre, dont la position n'est pas sûre sur la carte, on ne doit rien négliger pour en déterminer la longitude. Un bon Marin doit observer à terre la longitude & la latitude. Ces réflexions sont tirées pour la plûpart du traité de navigation de M. l'Abbé de la Caille.

CHAPITRE VII.

Solution des Problêmes Astronomiques sur un demi-globe.

AYEZ un demi-globe de bois ou de carton qui ait au moins un pied de diamètre; s'il est trop grand, il deviendra embarrassant; & s'il est trop petit, il ne sera pas assez exact. Ayez aussi un quart de cercle qui s'applique parfaitement au demi-globe; il pourra vous ser-

vir de regle pour tracer avec le crayon les grands cercles dont vous aurez besoin. Il faut enfin avoir un compas sphérique, c'est-à-dire, un compas dont les deux pointes soient recourbées, & qui soit assez grand pour pouvoir tracer les arcs de cercle, qui détermineront par leurs intersections la pointe des angles sphériques. Ce demi-globe est l'instrument le plus naturel & le plus propre à diriger le calcul des triangles sphériques, & à écarter tous les doutes qui peuvent s'y rencontrer.

Regles générales.

1re. Regle.

Trouver les poles d'un arc de cercle qu'on aura tracé sur le demi-globe?

Donnez au compas sphérique l'ouverture de 90°, de maniere que les deux pointes embrassent précisement le quart de la circonférence du globe. Placez l'une de ses pointes sur deux points différens de l'arc de cercle donné, & avec l'autre pointe vous décrirez deux arcs de cercle, dont l'intersection sera le pole du cercle donné.

2e. Regle.

L'un des poles d'un grand cercle étant donné, d'écrire ce grand cercle sur la surface du globe?

Ouvrez le compas sphérique, de sorte que ses pointes soient écartées l'une de l'autre de 90°, & avec cette ouverture décrivez du point donné sur la surface du globe, la partie du grand cercle dont vous aurez besoin.

3e. Regle.

Le pole le plus proche d'un petit cercle étant donné avec sa distance a ce pole, tracer ce petit cercle?

Ouvrez le compas sphérique de maniere que ses poin-

tes embrassent précisement la distance de ce petit cercle à son pole ; & ensuite de ce pole donné comme centre, vous décrirez sur la surface du demi globe le petit cercle requis.

4e. Regle.

Trouver la valeur d'un angle sphérique tracé sur le globe ?

Décrivez par la 2e. Regle une partie du grand cercle dont la pointe de cet angle est le pole ; & ayant prolongé jusqu'à ce grand cercle les deux côtés de l'angle, vous prendrez avec le compas la distance de leurs intersections sur le grand cercle. Cette distance donnera sur le cercle gradué la valeur de l'angle sphérique.

5e. Regle.

Décrire autour d'un point donné un angle sphérique donné ?

Tracez par la 2e. Regle le grand cercle dont ce point est le pole ; & ayant ouvert le compas sphérique de la grandeur de l'angle donné, vous porterez cette ouverture sur le grand cercle ; ensuite vous appliquerez le quart de cercle au point donné & à ces deux points, pour avoir les deux côtés de l'angle sphérique.

On voit par là qu'on peut aisément avec le compas sphérique, mesurer & déterminer la longueur d'un côté ou la distance de deux points sur la surface du demi-globe.

6e. Regle.

Abaisser d'un point donné un arc perpendiculaire à un arc donné ?

Il faut chercher le pole de cet arc par la 1re Regle, & faire passer un grand cercle par ce pole & par le point donné par la 2e. Regle.

Ces six Regles suffisent pour résoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique.

Trigonométrie sphérique rectangle.

1^er^ Cas.

Un côté étant donné avec l'hypothénuse, trouver le reste. Fig. 62.

Décrivez deux quarts de cercle (Fig. 62) BZ, CZ perpendiculaires l'un à l'autre, en prenaut BC de 90°. Prenez avec le compas sphérique AZ égal au côté donné, & avec l'ouverture AP égale à l'hypothénuse, vous décrirez du centre A un arc de cercle qui coupera BZ en quelque point P, & ayant tracé l'arc AP, vous aurez le triangle APZ rectangle en Z.

Vous en mesurerez les côtés PZ, AZ avec le compas & les angles P & A selon la 4^e^ Regle.

2^e^ Cas.

L'hypothénuse étant donnée avec un angle, trouver le reste?

Tracez l'hypothénuse AP, & ayant fait en P un angle égal à l'angle donné, prolongez l'arc PZ de part & d'autre de P. Du point A à la distance de 90°, cherchez sur cet arc prolongé le point B, qui sera le pole de l'arc AZ perpendiculaire sur PZ; vous aurez le triangle APZ, rectangle en Z.

3^e^ Cas.

Un angle P *étant donné* (fig. 62) *avec le côté opposé* AZ, *trouver le reste.* Fig. 62 & 63.

Changez les angles en côtés par le triangle supplémental *apz* (fig. 63.), vous aurez *pa* de 90°, l'angle *p* égal au supplément du côté AZ; & ayant tracé cet angle *p* par la 5^e^. Regle, vous prendrez l'ouverture *az* du supplément de l'angle *P*, pour décrire un arc du centre *a* qui coupera le côté *pz* prolongé s'il le faut, en quelque point *z*. Vous aurez par ce moyen le triangle supplémental *apz*, dont le côté

pZ ſera le ſupplément de l'angle A , l'angle A ſera le ſupplément de PZ, & l'angle Z le ſupplément de l'hypothénuſe AP.

4^e^ Cas.

Un angle P *étant donné avec le côté adjacent* PZ, *trouver le reſte?*

Tracez l'angle P , marquez le point Z, & élevez l'arc AZ perpendiculaire à PZ, par le moyen de ſon pole B. Cet arc coupera le côté PA en quelque point A, & l'on aura le triangle APZ.

5^e^ Cas.

Deux côtés PZ, AZ *étant donnés, trouver le reſte?*

Tracez l'angle droit Z; prenez avec le compas ZP, ZA; & joignez AP. Vous aurez le triangle APZ.

6^e^ Cas.

Deux angles étant donnés, trouver le reſte?

Le triangle ſupplémental *apz* vous donnera les trois côtés d'un triangle, que vous réſoudrez comme dans le 1^er^ cas; car *ap* ſera de 90°, *pz* ſera ſupplément de l'angle A, & *az* de l'angle B; vous aurez donc l'angle *z* ſupplément de l'hypothénuſe AP, l'angle *p* ſupplément du côté AZ, & l'angle *a* ſupplément du côté PZ.

Trigonométrie ſphérique obliquangle.

1^er^ Cas.

Les trois côtés étant donnés, trouver les trois angles? Fig. 64.

Tracez ſur le demi-globe avec un crayon le long du quart de cercle le plus grand côté AP du triangle. Mar-

quez les deux extrêmités P & A de cet arc ; décrivez du centre P & du centre A avec le compas ſphérique & les ouvertures données des deux côtés, deux arcs qui ſe couperont en quelque point Z, & appliquant le quart de cercle aux points P & Z, A & Z, vous acheverez le triangle APZ ; prolongez enſuite PZ juſqu'à l'extrêmité B du quart de cercle, & décrivez du pole P l'arc BC, qui meſurera l'angle P. On meſurera de même A & Z.

2^e^ Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Prenez à la place des angles, leurs ſupplémens, pour avoir les trois côtés du triangle ſupplémental dont vous trouverez les trois angles comme dans le premier cas. Ces trois angles ſeront les ſuppléments des trois côtés demandés.

3^e^ Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reſte ?

Tracez le premier côté PA comme dans le premier cas' décrivez le grand cercle BC dont P eſt le pole. Portez avec le compas ſur BC la valeur de l'angle donné P, & tracez le quart de cercle PB, ſur lequel vous prendrez la valeur PZ du ſecond côté ; & appliquant le quart de cercle ſur A & Z, vous aurez le triangle APZ, dont vous meſurerez les angles comme dans le premier cas. Le compas vous donnera la valeur de la baſe AZ.

4^e^ Cas.

Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reſte ?

Soit AP le côté donné. Les deux grands cercles dont A & P ſont les poles, vous donneront la meſure des angles

donnés A & P ; vous aurez dnnc les deux arcs de cercle AZ, PZ, & tout le triangle APZ, que vous mesurerez comme ci-devant.

5ᵉ Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

Soient PA & AZ les deux côtés donnés, & l'angle P opposé au côte AZ. Prenez PA avec le compas ; & sur le grand cercle BC dont P est le pole, prenez la valeur BC de l'angle P, vous aurez l'arc PZB ; prenez AZ avec le compas, & du centre A décrivez un arc qui coupera le côté PB en Z ; vous aurez le triangle PAZ, dont vous trouverez avec le compas le 3ᵉ côté & les autres angles par la méthode du premier cas.

6ᵉ Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste ?

Changez les angles en côtés par le triangle supplémental, vous aurez, comme dans le cinquieme Cas, deux côtés & l'angle opposé à l'un des deux.

Avec ce demi-globe on peut résoudre aisément les Problémes astronomiques les plus compliqués ; nous en allons rapporter quelques exemples. Le globe entier seroit plus commode, mais plus difficile à manier ; on peut en prendre les deux tiers ou les trois quarts.

PROBLEME I.

PROBLEME I.

Etant données deux hauteurs d'un même astre connu, ou de deux astres différens & connus avec l'intervalle du tems des observations, trouver la latitude, les angles horaires & les azimuths?

CHoisissez un point P pour représenter le pole (fig. 65); faites un angle APA' égal à l'intervalle du tems des observations réduit en degrés, prenez PA & PA', égaux à la distance de l'astre au pole, ou aux distances des deux astres au pole; vous aurez le triangle APA'. Des centres A & A', décrivez avec les distances au Zénith AZ, A'Z, deux arcs qui se couperont en quelque point Z; ce point représentera le Zénith; l'arc ZP sera la distance du Zénith au pole; les angles ZPA, ZPA' seront les angles horaires; & les angles AZP, A'ZP seront les supplémens des angles azimuthaux. Fig. 65.

PROBLEME II.

Trois hauteurs d'un même astre étant données avec la différence des angles azimuthaux, trouver la déclinaison de l'astre, la hauteur du pole, l'angle horaire & l'angle azimuthal, fig. 66.

CHoisissez un point Z pour représenter le Zénith; faites les angles AZA', AZA'', égaux aux différences des azimuths, & les arcs AZ, A'Z, A''Z, égaux aux distances au Zénith; élevez du milieu des arcs AA', A'A'', deux arcs de cercle perpendiculaires à ces arcs de grand cercle. Ils se couperont au pole P du petit cercle qui passe par les trois points A, A', A''. On aura donc les distances égales AP, A'P, A''P de l'astre au pole, le complement ZP de la latitude, & les angles demandés. Fig. 66.

PROBLEME III.

La hauteur du pole étant donnée, trouver à quelle heure deux Etoiles connues paroitront ensemble dans le
Fig. 67. *même vertical ?* fig. 67.

CHoisissez un point P pour représenter le pole ; faites l'angle APA′ égal à la différence en ascension droite de deux Etoiles, & faites AP, A′P égaux à leurs distances au pole ; vous aurez le triangle APA′. Prolongez l'arc de grand cercle AA′ vers Z ; & avec l'ouverture PZ de la distance du pole au Zénith, décrivez du centre P un arc qui coupera AZ en quelque point Z. Ce point sera le Zénith, ZPA & ZPA′ seront les angles horaires ; cherchez le tems du passage de l'Etoile A par le Méridien (*Probl. IV ch. IV*) & ajoutez à ce tems, ou retranchez-en l'angle APZ, vous aurez l'heure de l'observation.

COROLLAIRE.

Si les deux Etoiles ont la même ascension droite, on aura l'heure indépendamment de la hauteur du pole, parce qu'elles seront alors dans le Méridien.

PROBLEME IV.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux astres connus, trouver la hauteur du pole ?
Fig. 67. fig. 67.

L'Heure étant donnée avec les ascensions droites des astres, on aura les angles ZPA, ZPA′, qu'il faudra tracer sur le demi-globe, & avec les distances AP, A′P des astres au pole, on aura l'arc AA′, qu'il faut pro-

longer vers Z ; cet arc coupera PZ au Zénith, & l'on aura le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME V.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath deux astres connus, trouver la hauteur du pole? fig. 68. Fig. 68.

TRacez les angles connus ZPA, ZPA', vous aurez avec les côtés connus AP, A'P, l'arc AA'. Du milieu M de cet arc, élevez l'arc MZ qui lui soit perpendiculaire ; il coupera PZ au Zénith, & l'arc ZP vous donnera le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME VI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Etoiles, & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres, trouver l'heure & la hauteur du pole? fig. 69. Fig. 69.

TRacez les angles APA', A'PA, APA", connus par l'intervalle des tems & par la différence des ascensions droites ; prenez AP, A'P, A"P égaux aux distances au pole ; les arcs A'A, A"A prolongés se rencontreront en quelque point Z, qui sera le Zénith ; vous aurez donc le complément ZP de la hauteur du pole, l'angle horaire ZPA, & par conséquent l'heure de la premiere observation.

PROBLEME VII.

L'angle horaire, l'angle azimuthal & la hauteur d'un Astre étant donnés, trouver sa déclinaison & sa latitude?
Fig. 23.

Fig. 23. DAns le triangle ZPA, on a l'angle horaire P, l'angle azimuthal Z, ou son supplément, & la distance AZ de l'astre au Zénith ; donc par le sixieme cas des obliquangles, on trouvera le complément AP de sa déclinaison, & la distance ZP du Zénith au pole.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole & la déclinaison d'un astre étant données, trouver son arc semi-diurne?
Fig. 23.

ON a dans le triangle ZPA les trois côtés, la distance ZP du Zénith au pole, la distance PA de l'astre au pole, & l'arc ZA de 90°. On aura donc par le premier cas des obliquangles, sur le demi-globe l'angle ZPA, qui est égal à l'arc semi-diurne. On aura aussi l'angle ZPA, complément de l'amplitude ortive ou occase.

PROBLEME IX.

Trouver sur mer la hauteur du pole par la durée du jour?
Fig. 23.

DAns le même triangle ZPA on a PA, distance du Soleil au pole au tems de son lever ou de son coucher, ZA de 90°, & l'angle P égal au tems écoulé depuis

le lever du Soleil jusqu'à midi, ou depuis midi jusqu'à son coucher, reduit en degrés. On trouvera donc sur le demi-globe le côté ZP, complément de la latitude par le cinquieme cas des obliquangles.

Quant au changement du lieu du Navire dans l'intervalle entre midi & le coucher du Soleil, ou minuit & son lever, décrivez du pole P (fig. 70) l'arc du parallele ZL à l'Est ou à l'Ouest, selon que la longitude a porté le vaisseau à l'Est ou à l'Ouest. L'angle ZPL doit être égal à la différence des longitudes depuis midi jusqu'au moment du coucher, ou depuis minuit jusqu'au lever du Soleil. Prenez sur ZP, vers le Nord ou vers le Sud, la différence en latitude du Navire, depuis le passage au Méridien; menez LZ'', Z'Z'', paralleles respectivement à ZZ', ZL. Le point Z'' sera le Zénith du Navire au lever ou au coucher du Soleil, & PZ'', le complément de sa latitude pour cet instant. Fig. 70.

Nous avons observé ailleurs que lorsque le Soleil est dans l'Equateur, la durée du jour étant la même par toute la terre, elle ne peut servir pour déterminer la latitude. On a vu aussi que le diamètre du Soleil est à peu près égal à la quantité dont la réfraction éleve les astres à l'horison; en sorte qu'au lever du Soleil, lorsqu'on observe son bord inférieur toucher l'horison, son bord supérieur ne fait réellement que l'atteindre; par conséquent si l'on ajoute à l'heure de l'emersion apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à s'élever de tout son disque, on aura le moment de l'emersion du centre. De même au coucher du Soleil, l'instant où le bord inférieur de cet astre paroit dans l'horison peut être pris pour l'instant où le bord supérieur s'y trouve réellement. Si donc on soustrait de l'heure de l'immersion apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à se cacher entierement sous l'horison, on aura le moment de l'immersion du centre.

Il y a sur ce sujet une méprise considérable dans l'Astronomie Nautique, pag. 88, & qui pourroit égarer le Lec-

teur inattentif. Ce que M. de Maupertuis y dit du lever du Soleil, & que nous avons rapporté presque mot pour mot, est exact. Par rapport au coucher de cet astre, il ajoute : *l'instant où le bord du Soleil paroit dans l'horison peut être pris pour l'instant où le bord inférieur s'y trouve réellement.* Il s'ensuivroit de là que la réfraction abaisseroit le Soleil d'une quantité égale à son diamètre, au lieu qu'elle fait précisément tout le contraire. Par conséquent il falloit dire comme nous, que l'instant où le bord inférieur paroit toucher l'horison peut être pris pour celui où le bord supérieur y est réellement. La même méprise continue dans ce que prescrit cet Auteur. *Si donc*, ajoute-t-il, *on soustrait de l'immersion apparente du bord supérieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à cacher entierement son disque, on aura le moment de l'immersion du centre.* Il est évident que lorsque le bord supérieur apparent touche l'horison, le centre est réellement au dessous de l'horison d'une quantité égale à trois fois son demi-diamètre, & qu'il faudroit par conséquent soustraire le triple du tems que prescrit M. de M.; au lieu qu'en lisant *inférieur* à la place de *supérieur*, tout est rétabli. Du reste cette pratique est moins exacte pour le coucher du Soleil que pour son lever.

CHAPITRE VIII.

De la résolution des Problémes astronomiques par les differentes projections de la sphère.

LES *projections* ou représentations de la sphére sur un plan dépendent uniquement de la position de l'œil, qu'on peut supposer ou dans la sphére ou hors de la sphére. Les trois principales sont la projection *gnomonique*, la projection *stéréographique* & la projection *orthographique.* Dans la projection gnomonique, on suppose l'œil au

centre de la ſphère. Dans la projection ſtéréographique, on le ſuppoſe placé dans quelque point de la ſurface de la ſphére ; & dans la projection orthographique, on le ſuppoſe à une diſtance infinie.

Projection gnomonique.

Le plan de cette projection touche la ſurface de la ſphére dans un point donné, parallélement à un cercle donné. On la nomme *gnomonique* parceque ce plan n'eſt autre choſe que le plan d'un cadran parallele au cercle donné, & dont le ſtile eſt égal au demi-diamètre de la ſphére. Cette projection eſt plus commode qu'aucune autre pour réſoudre tous les cas des triangles ſphériques & tous les Problémes aſtronomiques, parceque toutes les projections des grands cercles n'y ſont que des lignes droites, & que les projections des petits cercles paralleles au plan, ſont des cercles concentriques que l'on trace fort aiſément. Pour réſoudre les Problémes d'Aſtronomie par le moyen de cette projection, l'on n'a beſoin que d'une regle, d'un compas & d'un quart de cercle gradué. Les quatre Problémes ſuivans contiennent tout ce qui peut être de quelque utilité aux Marins & aux Aſtronomes.

PROBLEME I.

Diviſer en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle qui paſſe par le centre du plan de projection ? Fig. 71.

SOit C le centre, AB le diamètre du cercle de projection, & DGE celle d'un grand cercle qui paſſe par ce centre & qu'il faut diviſer en degrés. Fig. 71.

Elevez ſur DE au centre C la perpendiculaire CA, & faites au point A l'angle CAF égal à l'angle donné. La ligne CF contiendra autant de degrés de la ſphére que l'angle CAF en contient ; l'angle DAF déterminera de même les degrés de DF.

COROLLAIRES.

1. Si l'angle CA*d* eſt droit, la ligne A*d* ſera parallele à la ligne CD, & le pole du grand cercle BC*A* ſera infiniment éloigné de CA, puiſqu'il en eſt éloigné dans la ſphére de 90^{o}. Donc le pole de tous les grands cercles qui paſſent par le centre du plan de projection, eſt à une diſtance infinie de chacun de ces cercles.

2. Si du point quelconque F du grand cercle CD, on éleve une perpendiculaire F*f* à CD, elle repréſentera un grand cercle perpendiculaire à CD, & éloigné de CA de la quantité de l'angle CAF.

3. Pour trouver la valeur de l'arc repréſenté par CF, on éleve du centre C le demi-diam. CA perpendiculaire à CF, on mene la droite AF, & l'on meſure l'angle CAF qui eſt la valeur de l'arc dont CF eſt la projection.

4 Si l'on veut avoir le pole P du grand cercle F*f*, on fait l'angle FAP de 90^{o}.

PROBLEME II.

Diviſer en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle, qui ne paſſe pas par le centre du plan de projection?

Fig. 72.

Fig. 72. SOit GH ce grand cercle. Du centre C abaiſſez CI perpendiculaire à GH, & élevez CH perpendiculaire à CI, juſqu'à la circonférence du cercle de projection. Joignez AI, & portez cette ouverture de I en *a* ſur IC prolongée. Le point A ſera le centre des diviſions de GH, & l'angle quelconque I*a*L meſurera l'arc dont IL eſt la projection.

Si l'on imagine que le triangle CAI rectangle en C ſoit élevé perpendiculairement ſur le plan de projection: le point A deviendra le centre de la ſphére, la ligne AI ſera perpendiculaire à GH, & tous les cercles décrits du

centre A sur un demi-diamètre pris sur AI, diviseront en degrés la ligne GH qui représente un grand cercle de la sphére.

PROBLEME III.

Trouver la valeur d'un angle que deux grands cercles font ensemble ? Fig. 73.

SOit P la pointe de l'angle que les grands cercles PG, PH font entr'eux. Menez du centre C de la projection les lignes CP, CA perpendiculaires entr'elles. Joignez AP, prolongez PC indéfiniment, & élevez en A sur PA la perpendiculaire AE, & en E sur PE la perpendiculaire GEH. GH sera le grand cercle dont P est le pole. Portez EA sur E*a*; l'angle G*a*H qui mesure GH, mesurera aussi l'angle GPH. Fig. 73.

COROLLAIRES.

1. Si l'on veut au point P former un angle donné entre deux grands cercles, dont l'un PG est donné; il faut mener par le point donné P, & par le centre C de la projection, la droite indéfinie PCE*a*, élever CA perpendiculaire à PC, AE perpendiculaire à PA, GEH perpendiculaire à PE; porter EA en E*a*, faire au point *a* l'angle G*a*H égal à l'angle donné, & mener PH qui formera avec PG en P la projection de l'angle donné.

2. Si le point donné P est au centre C de la projection, les deux autres points E & *a* y seront aussi, & la projection de cet angle sera un angle rectiligne, égal à l'angle sphérique donné.

PROBLEME IV.

Résoudre tous les cas de la Trigonométrie ſphérique ?

I. Cas.

Fig. 74. & 75. *Les trois côtés étant donnés, trouver les angles ?* Fi. 74 & 75.

SOit le triangle ſphérique ZPS, dont on connoit les trois côtés. Placez au centre de la projection la pointe de l'angle que vous voulez connoitre, par exemple, de l'angle P. Menez du centre les droites PA & PB, perpendiculaires l'une à l'autre. Faites au point A les trois angles PAZ, PAS', ZAS'' égaux reſpectivement aux trois côtés PZ, PS, ZS du triangle ſphérique ZPS. Les deux premiers angles couperont le demi-diamètre prolongé PB en Z & S'. PZ & PS' ſeront la valeur des deux côtés autour de l'angle P. Faites AS'' égal à AS'. Du centre P avec l'ouverture PS, & du centre Z avec l'ouverture ZS'', décrivez deux arcs qui ſe couperont en quelque point S'. Menez PS, ZS ; vous aurez la projection rectiligne du triangle ſphérique ZPS dont les trois côtés ſont donnés. L'angle rectiligne ZPS eſt égal à l'angle ſphérique requis.

Exemple.

La diſtance ZP du Zénith au pole eſt de 40° ; la diſtance PS d'un aſtre au pole eſt de 50°, & la diſtance SZ du même aſtre au Zénith eſt de 71°. On demande ſon angle horaire ZPS ?

Faites l'angle ZAP de 40° pour avoir le côté ZP, PAS' de 50° pour avoir la longueur PS' de la projection de PS, & ZAS'' de 71°, pour avoir la longueur de la projection du 3^e^ côté, en faiſant AS'' égal à AS'. Ce qui donne ZS'' égal à la projection du côté ZS. Décrivez du

centre P, avec PS′, & du centre Z avec l'ouverture ZS‴, deux arcs qui ſe couperont en S. Vous aurez le triangle requis ZPS, & vous trouverez l'angle rectiligne ZPS de 110° preſque. Le calcul le donne de 109° 48′ 18″.

On peut trouver les autres angles par la méthode du III Probléme, en cherchant les deux grands cercles dont Z & S ſont les poles ; mais il eſt plus court d'appliquer au centre de la projection la pointe de celui que l'on cherche.

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reſte? Fig. 74 & 76. Fig. 74 & 76.

Soient ZP de 40°, PS de 50°, & ZPS de 109° 48′.

Prenez, comme dans le premier cas, ZAP de 40° pour avoir le côté ZP ; PAS′ de 50°. Faites l'angle ZPS de 109° 48′, & PS égal à PS′. Menez ZS, vous aurez la projection ZPS du triangle ſphérique.

Pour connoitre la baſe ZS j'abaiſſe du centre P ſur ZS la perpendiculaire PO que je prolonge indéfiniment vers *l*, & ſur PO la perpendiculaire PL juſqu'à la circonférence du cercle de la projection, qu'on appelle *cercle primitif.* Je porte OL ſur OP prolongée, en prenant O*l* égal à OL. L'angle S*l*Z de 71° me donne le côté dont la droite SZ eſt la projection.

Pour connoitre la valeur de l'angle ſphérique, dont le rectiligne PZS eſt la projection, je cherche le grand cercle dont Z eſt le pole, en élevant PA perpendiculaire à PZ, AE perpendiculaire à AZ, & EF perpendiculaire à PE prolongement de PZ. Je prolonge ZS juſqu'à la rencontre F du grand cercle FE dont Z eſt le pole. Je prolonge encore ZE en *a*, faiſant E*a* = EA. L'angle E*a*F de 50° donne la valeur de l'angle ſphérique PZS. On trouvera de même la valeur de l'angle ſphérique dont ZSP eſt la projection, en cherchant le grand cercle dont S eſt le pole, ce qui donnera cet angle de 39° $\frac{3}{4}$.

III. Cas.

Un côté étant donné avec les deux angles adjacens, trouver le reste ? Fig. 76.

Soit (fig. 74) ZP le côté donné de 40°, l'angle ZPS de 110°, Fig. 76. & l'autre angle adjacent PZS de 50°. L'angle (Fig. 76.) PAZ de 40°, donne la projection du côté ZP. L'angle ZPS de 110° est égal à l'angle sphérique P. Prolongez ZP en *a*, élevez AE perpendiculaire à AZ, & EF à EZ. Portez AE de E en *a*, & faites l'angle E *a* F de 50°. Menez ZF, qui coupera PS en quelque point S. Vous trouverez SZ, comme dans le second cas de 50°; & cherchant le grand cercle dont le point S est le pole, vous trouverez la valeur de l'angle sphérique S dont le rectiligne est la projection. Cet angle est de 39° $\frac{3}{4}$.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle opposé à l'un d'eux, trouver le reste ? Fig. 76.

Placez autour du centre les deux côtés donnés, comme ZP, PS. Si l'angle Z est donné, vous chercherez comme ci-devant le grand cercle EF dont Z est le pole, & vous ferez l'angle E*a*F égal à l'angle donné PZS. Vous aurez la projection rectiligne ZPS du triangle sphérique, & vous en mesurerez le côté SZ, & l'angle dont S *est* la projection, comme dans le second Cas. Le troisieme angle ZPS sera égal à l'angle sphérique correspondant.

V. Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? Fig. 76.

Construisez un autre triangle, dont les côtés soient les supplémens des angles donnés, & dont les angles soient les supplémens des côtés donnés. Vous aurez le reste par la méthode du quatrieme cas.

Exemple.

L'angle sphérique PZS (Fig. 77.) est de 50°, PSZ de 39° $\frac{3}{4}$, & le côté PZ opposé à PSZ est de 40°. On demande le reste? Fig. 77.

Imaginez le triangle EFG, dont les angles E, F & G soient supplémens des côtés opposés PS, PZ & SZ respectivement, & dont les côtés EF, EG, GF, soient les supplémens des angles P, S & Z respectivement. Vous aurez dans ce nouveau triangle, FG supplément de l'angle PZS de 130°, EG supplément de ZSP de 140° $\frac{1}{4}$, & l'angle F supplément du côté PS de 140°.

Placez donc (Fig. 78) autour du centre G les côtés F′G Fig. 78. & GE′ selon la méthode du quatrieme Cas, en faisant GAE′ de 140° $\frac{1}{4}$, & GAF′ de 130°. Les deux lignes AE′, AF′, prolongées couperont le diamètre prolongé du cercle primitif en E′ & F′. Elevez AH perpendiculaire à F′A, & KH à F′H. Portez HA en H*a*, & faites l'angle H*a*K égal à l'angle sphérique F ou à son supplément. Menez KF′, & décrivez avec l'ouverture GE′, un arc de cercle du centre G, qui coupera KF′ en quelque point E″. Vous aurez le triangle E″F′G, dont l'angle F′GE″ de 109° vous donnera le supplément du côté SZ de 71°; E″*l* F de 70° est supplément de l'angle P de 110°.

Il faut sur-tout prendre garde aux équivoques qui peuvent naître des angles aigus ou obtus.

VI. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Fig. 77. Imaginez un autre triangle EFG (Fig. 77) dont *les* trois côtés soient les supplémens des trois angles donnés ; & par la méthode du premier Cas, vous aurez les trois angles de ce nouveau triangle qui seront les supplémens des côtés du proposé.

Sur quoi il faut observer que le triangle supplémental FGE a lui-même son supplément en partie F*g*E. Lorsque les côtés FG, EG que l'on substitue aux angles Z & S, sont obtus ; on prend dans la projection gnomonique leurs supplemens F*g*, E*g* ; & le côté FE étant commun aux deux nouveaux triangles, on trouve les angles EF*g*, FE*g* égaux aux côtés respectifs PZ, PS. Le seul angle *g* égal à G est supplément du côté PZS.

Exemple

L'angle P est de 110°, l'angle Z de 50°, & l'angle S de 39° $\frac{3}{4}$. Par conséquent dans le triangle supplémental EFG, le côté EF, opposé à l'angle P, est de 70° ; le côté FG, opposé à l'angle Z, est de 130° ; & le côté EG, opposé à l'angle S, est de 140° $\frac{1}{4}$.

Au lieu de ce triangle supplémental, prenons l'autre EF*g*, dans lequel nous aurons FE de 70°, comme auparavant ; F*g* = Z = 50°, E*g* = S = 39° $\frac{3}{4}$.

Si l'on veut connoitre ZP, ou l'angle F qui lui *est égal*, il faut placer la pointe F de cet angle au centre du plan de
Fig. 79. projection (Fig. 79.), décrire le cercle primitif, élever au centre F les deux perpendiculaires FA, FE ; faire les angles FAE de 70°, FAG′ de 50°, & EAG″ de 39° $\frac{3}{4}$, qui sont les valeurs des arcs FE, F*g*, E*g* respectivement.

Les deux premiers angles couperont le diamètre prolongé en E & G′. FE & FG′ seront la valeur des projections de FE & F*g*, qui sont les deux côtés autour de

l'angle F. Faites AG″ égal à AG′. Du centre F avec l'ouverture FG″, & du centre E avec l'ouverture EG″ décrivez deux arcs qui se coupent en quelque point G; menez FG, EG; vous aurez la projection EFG du triangle EF*g*; & l'angle EFG sera la valeur de l'arc ZP de 40°.

Pour vérifier & démontrer cette méthode du premier & sixieme Cas, il faut du centre F abaisser FO perpendiculaire à EG, mener le demi diamètre FL, parallele à EG ou perpendiculaire à FO, & porter OL sur OF prolongé en *l*. L'angle E*l*G, par le second Probléme, mesure l'arc dont EG est la projection. Or je dis que cet angle est égal à l'angle EAG″, car les triangles E*l*G, EAG″ sont semblables & égaux, puisqu'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. EG″ est égal à EG par la construction. *l*E est égal à AE, car le quarré de *l*E est égal aux quarrés de O*l* ou OL & de OE, c'est-à-dire aux quarrés de OF & FL ou FA, & à la différence des quarrés de FE & de OF, c'est-à-dire que le quarré de *l*E est égal aux deux quarrés de FA & FE; mais le quarré de AE est aussi égal aux deux quarrés de FA & FE. Donc AE est égal à *l*F. On prouve de même que *l*G est égal à AG″; car le quarré de *l*G est égal aux quarrés de O*l* ou OL & OG, c'est-à-dire, aux deux quarrés de OF & FA, & à la différence des quarrés de FG & OF, donc le quarré de *l*G est égal aux quarrés de FA & de FG; mais le quarré de AG, égal à AG′, est aussi égal aux quarrés de FA & de FG′ ou FG. Donc AG″ est égal à *l*G; donc les deux triangles *l*EG, AEG″ sont entierement égaux & semblables. Donc l'angle EAG″, qui représente par la construction l'arc EG, est égal à l'angle E*l*G, qui représente le même arc par le Probléme II.

REMARQUE.

Lorsqu'on veut tracer un cadran solaire, on ne suit pas d'autre méthode. Si le cadran est horisontal, le centre Z de la projection (Fig. 80.) représente le Zénith; ZA Fig. 80.

eſt la hauteur perpendiculaire du ſtile. L'angle ZAP détermine la diſtance ZP du Zénith au pole ; & l'angle ZAE, la diſtance ZE du Zénith à l'Equateur. EQ , perpendiculaire à la ligne méridienne PE , repréſente l'Equateur. On porte EA de E en *a* , pour diviſer l'Equateur en *tems* , à raiſon de 15° par heure; ainſi les angles E*a*II , E*a*X, déterminent 2 heures & 10 heures ſur l'équateur.

Si le cadran eſt vertical, ou s'il eſt incliné à l'horiſon , le point Z ſera le Zénith du pays dont l'horiſon eſt paralle au plan du cadran. ZE ſera la latitude de ce pays, PE en ſera le Méridien , & les cercles horaires changeront de nom ſelon la différence des Méridiens de ce pays & de celui où le cadran eſt conſtruit ; ſi , par exemple , le cadran marque midi ſur PX , la différence des Méridiens eſt E*a*X de 30°. C'eſt pour cela que l'on cherche la déclinaiſon & l'inclinaiſon du plan , lorſqu'on veut conſtruire un cadran ſur un plan vertical ou incliné à l'horiſon.

Si le plan vertical eſt directement tourné vers le Sud , ſon Zénith Z eſt le point Sud de l'horiſon ; ZP eſt la diſtance de ce point au pole ; & ZE , ſa diſtance à l'Equateur. S'il eſt tourné directement au Nord , Z eſt le point Nord de l'horiſon ; PZ , la diſtance de ce point au pole qui eſt en deſſous de Z dans ce cadran ; parce que le pole Nord eſt au deſſus du point Nord de l'horiſon , & EZ eſt la hauteur de l'Equateur qui doit être au deſſus de Z, parceque l'Equateur eſt au deſſous du point du Nord.

Si le plan eſt directement tourné vers l'Eſt ou vers l'Oueſt , ſon Zénith Z eſt le point d'Eſt ou d'Oueſt , & le pole P eſt à une diſtance infinie , parceque les points d'Eſt & d'Oueſt étant éloignés du pole de 90° , l'angle ZAP eſt droit , & la ligne AP ne peut pas rencontrer la Méridienne PZ. La ligne ZA prolongée eſt l'Equateur ; & on la diviſe de 15 en 15 degrés , pour avoir les cercles horaires qui ſont tous perpendiculaires à ZA , ou paralleles entr'eux. Tous les points de l'horiſon ſont le Zénith de quelque cadran vertical.

Si le plan eſt parallele à l'Equateur, ſon Zénith Z eſt l'un

l'un des deux poles ; & le point P se réunissant au point Z, tous les Méridiens ou cercles horaires forment dans le cadran des angles de 15°.

Pour trouver la Méridienne d'un plan horisontal, vertical ou incliné, on prend deux points d'ombre S & S' (Fig. 81) à distances égales du Zénith Z de ce plan. On décrit l'arc SS' du centre Z. La ligne ZE qui divise cet arc en deux parties égales, est la Méridienne du plan. On la nomme aussi *soustilaire*. Cette Méridienne est en même tems le cercle de 6 heures dans tous les cadrans tournés directement à l'Est ou à l'Ouest, puisque leur Zénith est dans le cercle de 6 heures. Fig. 81.

Projection Stéréographique.

Cette projection est peu connue de nos Marins. Les Anglois en font beaucoup de cas. Elle suppose l'œil dans la surface de la sphére. Si l'on imagine une ligne droite qui joint ce point de la surface de la sphére avec son centre, & qui soit perpendiculaire à un grand cercle, toutes les lignes qui partent de l'œil du spectateur, & qui passent par tous les points de la circonférence d'un cercle quelconque de la sphére, grand ou petit, décriront sur ce plan, ou une ligne droite, ou un cercle. Ce plan se nomme *Planisphère ;* en voici les propriétés.

1.° La projection du pole opposé à l'œil sera le centre même du Planisphére.

2.° Tous les grands cercles qui se coupent au centre de l'œil seront représentés par des lignes droites qui se couperont toutes au centre du Planisphére.

3.° Les poles de tous ces grands cercles ou de ces lignes droites, sont tous dans la circonférence du Planisphére, à 90° de distance du grand cercle dont ils sont les poles.

4.° Tous les petits cercles paralleles au Planisphére deviennent des cercles concentriques. Leur centre commun est le centre même du Planisphére. Leurs demi-diamètres sont les tangentes des demi-distances de chaque parallele

au pole de la projection, parceque l'œil placé au pole opposé, voit ces cercles & leurs demi-diamètres sous cet angle.

Fig. 82. Sur ces principes on a construit des Planisphéres de toutes les espéces. Celui que je donne ici (Fig. 82), n'*est* proprement qu'un instrument qui sert à tracer sur un grand papier la représentation des cercles dont on a besoin, pour résoudre avec la regle & le compas tous les cas des triangles sphériques.

C'est un demi-cercle divisé exactement en 180 degrés, & qui par-là même peut servir encore à la projection gnomonique où l'on n'a que des angles à former. Il peut représenter la moitié de tous les grands cercles de la sphére. Son centre P représente le pole d'un cercle, par exemple, de l'Equateur; tous ses demi diamètres sont alors des quarts de Méridien; tous les petits cercles, dont P est le centre commun, sont des paralleles au grand cercle dont P est le pole.

Pour trouver plus aisément les demi-diamètres de tous les autres cercles qu'on voudra représenter, on a élevé au milieu F du cercle PC perpendiculaire à PB, & au milieu R de FC, les droites FG, RI, perpendiculaires à PC; voici l'usage de ce demi-cercle.

PROBLEME I.

La distance de deux points dans le ciel étant donnée, décrire tous les cercles grands ou petits, dont ces deux points sont les poles?

POur décrire un cercle, il faut en avoir le centre & le demi-diamètre. Chaque demi-diamètre PB ou PD peut servir d'échelle, en allant du centre à la circonférence. Le centre P de cet instrument peut toujours représenter un des deux points donnés. Sa circonférence BCD

repréſentera le grand cercle ; & toutes les autres circonférences, les petits cercles dont P eſt le pole. Si l'on a un autre point du ciel, comme Z, éloigné du pole P d'un certain nombre de degrés, par exemple, de 23°, il faut prendre ſur le rayon PB le point marqué 23°, & compter de ce point à droite & à gauche 90°, pour avoir le demi-diamètre du grand cercle dont Z eſt le pole. On aura à main droite de P vers D, le point marqué 67, complément de 23°; & à main gauche, en deſcendant ſur le quart de cercle BC, l'autre complément 113° de 23°. Attachez un fil ou une regle au point C le plus bas du Planiſphére, & appliquez ce fil ou cette regle à ces deux complémens. Le fil coupera GF en deux points, dont la diſtance ſera le demi-diamètre du grand cercle qu'on veut tracer. Si vous voulez décrire un petit cercle, dont la diſtance à ſon pole Z ſoit connue, par exemple, de 75°, vous compterez de part & d'autre 75° au lieu de 90°, & vous aurez ſur GF deux points dont l'intervalle vous donnera le demi-diamètre du petit cercle.

Ayant le demi-diamètre du cercle que l'on veut tracer, on tranſportera ſur un grand papier la diſtance PZ des deux poles, égale préciſément à celle qu'ils ont dans le Planiſphére, & la diſtance P 67 ſur la même ligne (Fig. 83), ainſi que le demi diamètre trouvé, pour avoir ſon centre C. Le cercle décrit du centre C, avec le demi-diamètre C 67 ſera le cercle requis. Fig. 83.

Cette méthode eſt générale pour décrire ſur un plan tous les cercles de la ſphére dont on connoit l'un des deux poles. Elle n'a qu'un inconvénient, c'eſt que la ligne FG du Planiſphére n'eſt pas toujours aſſez grande pour contenir tout le demi-diamètre requis. Dans ce cas, la ligne RI donnera le quart du diamètre ; & en doublant l'intervalle trouvé ſur RI, on aura le demi-diamètre. Si RI prolongée n'eſt pas aſſez longue, on prendra une autre ligne entre R & C, exactement au milieu de RC, & elle donnera la huitieme partie du diamètre, & par conſéquent le quadruple de cet intervalle ſera le demi-diamètre requis.

Ce demi-diamètre ſera ſouvent plus grand que l'ouverture du compas ordinaire. Il faut alors employer le compas à verge, ou un fil bien tendu, ce qui ne donnera pas des opérations fort exactes.

Enfin lorſqu'on voit que le demi-diamètre devient preſque infini, le cercle requis n'a point de centre, & l'on doit regarder ſa circonférence comme une ligne droite perpendiculaire à BP au point par où cette circonférence doit paſſer.

PROBLEME II.

Faire paſſer un cercle par deux points donnés dans le Planiſphére ?

SI ces points ſont tous deux dans l'un des demi-diamètres du Planiſphére, comme Z & P, ou dans ſon prolongement, le grand cercle eſt tout tracé ; c'eſt le cercle PB. S'ils ſont ſur deux demi-diamètres différens, comme en Z & S, il faut tracer les deux grands cercles dont Z & S ſont les poles, en prenant leurs centres & leurs circonférences ſur les lignes prolongées PZ & PS reſpectivement. Les interſections de ces deux grands cercles ſeront les poles du cercle qui doit paſſer par les deux points donnés Z & S, puiſqu'elles ſeront éloignées de 90° de leurs poles Z & S. Menez une droite de l'une de ces interſections au pole P, & comptez de P en Q le complément de la diſtance du pole commun P à cette interſection. Vous aurez trois points, Z, Q, S, par où vous ferez paſſer le cercle requis Z Q S, ſelon la méthode commune, ou bien vous chercherez le demi-diamètre CQ, CZ ou CS de ce cercle, que vous décrirez du centre C, comme dans le Probléme I.

Fig. 82. & 84.

PROBLEME III.

Trouver la valeur de l'arc ZS que l'on vient de tracer ?

TRacez avec le demi-diamètre PB du Planiſphére le demi-cercle BE E'D (Fig. 84.) Menez du pole K de l'arc ZS, par les extrémités Z & S, les droites KZE, KZE' juſques à la rencontre de la demi-circonférence. L'arc EE' donnera la valeur de l'arc ZS. Fig. 84.

COROLLAIRE.

De là ſuit la maniere de meſurer un angle mixtiligne PZS. Décrivez le grand cercle KX dont Z eſt le pole, & prolongez l'arc ZS juſqu'à la rencontre X du cercle KX. Les droites ZX, ZP, prolongées en D' & D, donneront la meſure DD' de l'arc AX du grand cercle ou de l'angle PZS.

PROBLEME IV.

Réſoudre tous les cas de la Trigonométrie ſphérique par le ſeul Planiſphère ?

I. Cas.

Les trois côtés d'un triangle ſphérique ZPS étant donnés, trouver les angles ?

PLacez au centre du Planiſphére (Fig. 84.) le plus petit ZP des trois côtés donnés. Cherchez par le Probl. I. le grand cercle KX dont Z eſt le pole, & le petit cercle SL dont Z eſt auſſi le pole, & dont la diſtance à ce pole eſt égale à l'arc donné SZ. Ce petit cercle coupera en quelque point S, celui dont P eſt le pole, & qui en eſt éloigné

de la valeur PS du troisieme côté donné. Faites passer un grand cercle ZS par les deux points trouvés Z & S, selon la méthode du Probléme II. L'angle rectiligne ZPS sera la projection d'un des angles sphériques requis, & vous mesurerez les deux autres angles par le corollaire précédent.

Exemple.

Le côté PZ *est de* 40°, PS *de* 50°, *&* ZS *de* 71°. *On demande les angles?*

Prenez sur le Planisphére PZ de 40°, & comptez à droite
Fig. 83 & 84. & à gauche du point Z, la distance de 71°. Vous trouverez à main droite 71—40, c'est à dire 31°; & à main gauche 71+40, ou 111°, sur le quart de cercle BC du Planisphére. Le fil, ou la regle appliquée du point C le plus bas, vous donnera sur GF le demi-diamètre du petit cercle qui doit passer par le point L marqué 31°; à droite de P, & dont le centre doit se trouver sur la ligne PZ. Ce petit cercle LS coupera celui dont le pole est P, & qui en est éloigné de 50° dans un point S, qui vous donnera l'angle ZPS de 110°.

Pour avoir l'autre côté ZS, il faut chercher les deux grands cercles dont Z & S sont les poles. L'une de leurs intersections sera un point K. Menez par ce point & par le centre P la droite KPQ. Prenez PQ, complément de PK, & faites passer un cercle par les trois points donnés Z, Q & S. Ce cercle coupera le grand cercle KX en quelque point X, & l'angle rectiligne AZX donnera dans l'arc DD la mesure de l'angle sphérique PZS.

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste?

Faites l'angle rectiligne ZPS égal à l'angle donné. Prenez PZ, PS, égaux aux deux côtés donnés, & tracez

par les deux points Z & S l'arc de grand cercle ZS, lequel étant continué en X, vous donnera par le corollaire précédent, la valeur de l'angle sphérique PZS. On aura par la même méthode, l'angle ZSP ; & par le Probléme III., la valeur de l'arc ZS.

III. Cas.

Un côté étant donné avec les deux angles adjacents, trouver le reste ?

Prenez dans le Planisphére le côté donné PZ avec l'un des deux angles adjacens ZPS ; décrivez le grand cercle KAX dont Z est le pole. Prenez l'arc DD' égal au second angle PZS. Faites passer un grand cercle par les points Z & X, selon la méthode du Probléme II. Ce grand cercle ZS coupera le côté PS en quelque point S. Vous aurez donc PS qu'il faut mesurer sur l'échelle du Planisphére, l'angle ZSP comme dans le premier cas, & l'arc ZS par le Probléme III.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

Prenez PZ égal à l'un des côtés donnés, & faites l'angle PZS égal à celui qui est opposé à l'autre côté donné PS. Décrivez le grand cercle AX dont Z est le pole. Il coupera la ligne ZX en quelque point X. Faites passer un grand cercle par les points Z & X. Il coupera le parallele éloigné du pole P de la quantité PS, en quelque point S ; & vous aurez le triangle ZPS, dont vous mesurerez les angles & la base comme ci-devant.

V. Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

Changez ce triangle en un autre, dont les deux côtés soient supplémens des deux angles donnés, & dont l'angle opposé soit supplément du côté opposé à l'un des deux angles. Vous le résoudrez par le quatrieme Cas.

V I. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Changez ce triangle en un autre dont les trois côtés soient les supplémens des angles opposés. Les angles seront supplémens des côtés opposés, & vous les trouverez comme dans le premier cas.

Projection Ortographique.

Elle suppose l'œil à une distance infinie. Tous les cercles grands ou petits, perpendiculaires au plan de projection, y sont représentés par des lignes droites, & leurs distances se mesurent sur la circonférence du cercle de projection. Les cercles obliques au cercle de projection se représentent par des Ellipses. Cette projection a fait naître le *Quartier sphérique* qui est entre les mains des Marins. C'est ordinairement le quart de la projection ortographique de plusieurs cercles de la sphére sur le plan d'un Méridien. On l'inscrit dans un quarré, dont deux côtés divisés par des transversales, servent à distinguer les minutes du quart de cercle, en étendant jusqu'à ces divi-
Fig. 85. sions le fil attaché au centre du Quartier. (fig. 85.)

Les Ellipses ou ovales du Quartier sphérique représentent les Méridiens ou les azimuths ; & le point où elles se

réunissent, est le pole du monde, ou le Zénith, ou tout autre pole qui se trouve dans la circonférence d'un Méridien. Tous les demi-diamètres sont de grands cercles perpendiculaires au Méridien ou à l'azimuth, & toutes les lignes droites paralleles entr'elles sont de petits cercles pareillement perpendiculaires au plan de projection.

On ne donne ordinairement au Quartier sphérique que l'étendue d'un quart de cercle; mais pour en rendre l'usage plus commode, il seroit mieux de l'aggrandir au moins jusqu'à renfermer les deux tropiques, comme le conseille Mr. de Radouai. La forme de cet ouvrage nous a obligés de reduire extrêmement le modele que nous en donnons dans la figure 85. On en trouve de gravés beaucoup plus en grand. C'est une regle générale pour toutes les projections & autres opérations graphiques, qu'on ne sçauroit y employer des figures tracées trop en grand; plus elles seront tracées sur une grande échelle, plus elles donneront de précision dans la résolution des Problémes.

Il y a des Problémes d'Astronomie que l'on résoud fort aisément & avec assez d'exactitude par le moyen du Quartier sphérique; on en résoud même plusieurs par la seule inspection. Son plus grand défaut consiste en ce que les degrés deviennent trop petits en s'éloignant du centre de la projection, ensorte qu'on ne peut plus les distinguer aux extrêmités.

Le Planisphére s'étend à un beaucoup plus grand nombre de Problémes, mais on y est souvent arrêté par la longueur excessive de certains diamètres. Ces grandes ouvertures de compas ne sont pas susceptibles d'une certaine précision. On ne peut guères les éviter qu'en se servant d'un petit Planisphére dont les divisions ne seroient pas assez sensibles.

La projection gnomonique est préférable aux deux autres; elle n'exige qu'une regle, un compas & un quart de cercle bien gradué.

Ces projections sont très-utiles pour vérifier les calculs

aſtronomiques. On peut y employer tantôt les unes, tantôt les autres, ſelon les occurrences : nous en allons donner des exemples dans les Problémes ſuivans.

PROBLEME I.

La longitude du Soleil étant donnée, trouver ſa déclinaiſon & ſon aſcenſion droite ?

CE Probléme ſe réſoud par la ſeule inſpection ſur le Quartier ſphérique. Le centre C repréſente le premier point du Belier ou de la Balance ; la ligne CE l'Ecliptique, dans laquelle on compte les trois premiers ſignes en allant de C en E, les trois ſuivans de E en C, les trois autres de C en E, & les trois derniers de E en C. Prenez ſur cette ligne le lieu du Soleil ; le parallele qui paſſe par ce point, déterminera ſur le cercle CA la déclinaiſon du Soleil ; & le Méridien, qui paſſe par le même point, déterminera ſur CB l'aſcenſion droite qu'il faudra compter comme la longitude de C en E & de E en C pour les ſix premiers ſignes, & enſuite de C en E & de E en C pour les ſix autres. On la réduira en heures & minutes, en la comptant ſur le Tropique, où 15 degrés valent une heure, & chaque degré 4 minutes.

Exemple 1.

Le Soleil étant au 27e degré du Taureau, on demande ſa déclinaiſon & ſon aſcenſion droite ?

Comptez de C vers E 57°, parceque le 27e degré du
Fig. 85. Taureau eſt éloigné du commencement du Belier, de 57°. Le parallele qui paſſe par ce point, donnera ſur le cercle de 6 heures CA, la déclinaiſon du Soleil 19° ½ ; & le Méridien qui paſſe par le même point, donnera ſur CB l'aſcenſion droite 55°.

Exemple 2.

Le Soleil étant au 3e degré du Lion, on demande sa déclinaison & son ascension droite?

Le Lion est le 4e signe, & vaut 120°; donc le 3e degré est 123°. Comptez de C en E 3 signes ou 90°, & de E vers C 33°. Le parallele de ce point donnera sur CA la déclinaison $19\frac{1}{2}$, & sur CB l'ascension droite qu'il faut compter dans le même sens que la longitude, d'abord 90° de C en B, & ensuite 35° de B en C, en tout 125°.

PROBLEME II.

L'ascension droite du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & sa longitude?

CE Probléme se résoud encore par la seule inspection sur le Quartier sphérique. L'ascension droite se compte en degrés sur l'Equateur de C en B, & en heures & minutes sur le tropique. Voyez le point où le cercle de l'ascension droite coupe l'Ecliptique CE. Ce point vous donnera la longitude du Soleil; & le parallele qui passe par ce point, déterminera sur la ligne CA de 6 heures la déclinaison du Soleil.

Exemple 1.

L'ascension droite du Soleil est 55°, on demande sa déclinaison & sa longitude?

Prenez de C vers B le 55e Méridien, qui est marqué 35 dans le Quartier sphérique. Ce Méridien coupe l'Ecliptique CE au 57e degré, depuis le Belier qui commence au centre C. Donc la longitude du Soleil est 1 signe 27°, c'est-à-dire, 27° du Taureau. Le parallele qui passe par ce

PROBLEME IV.

Résoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique ?

I. Cas.

Fig. 74. & 75. *Les trois côtés étant donnés, trouver les angles ?* Fi. 74 & 75.

SOit le triangle sphérique ZPS, dont on connoit les trois côtés. Placez au centre de la projection la pointe de l'angle que vous voulez connoitre, par exemple, de l'angle P. Menez du centre les droites PA & PB, perpendiculaires l'une à l'autre. Faites au point A les trois angles PAZ, PAS′, ZAS″ égaux respectivement aux trois côtés PZ, PS, ZS du triangle sphérique ZPS. Les deux premiers angles couperont le demi-diamètre prolongé PB en Z & S′. PZ & PS′ seront la valeur des deux côtés autour de l'angle P. Faites AS″ égal à AS′. Du centre P avec l'ouverture PS, & du centre Z avec l'ouverture ZS″, décrivez deux arcs qui se couperont en quelque point S′. Menez PS, ZS; vous aurez la projection rectiligne du triangle sphérique ZPS dont les trois côtés sont donnés. L'angle rectiligne ZPS est égal à l'angle sphérique requis.

Exemple.

La distance ZP du Zénith au pole est de 40°; la distance PS d'un astre au pole est de 50°, & la distance SZ du même astre au Zénith est de 71°. On demande son angle horaire ZPS ?

Faites l'angle ZAP de 40° pour avoir le côté ZP, PAS′ de 50° pour avoir la longueur PS′ de la projection de PS, & ZAS″ de 71°, pour avoir la longueur de la projection du 3e côté, en faisant AS″ égal à AS′. Ce qui donne ZS″ égal à la projection du côté ZS. Décrivez du

centre P, avec PS′, & du centre Z avec l'ouverture ZS″, deux arcs qui se couperont en S. Vous aurez le triangle requis ZPS, & vous trouverez l'angle rectiligne ZPS de 110° presque. Le calcul le donne de 109° 48′ 18″.

On peut trouver les autres angles par la méthode du III Probléme, en cherchant les deux grands cercles dont Z & S sont les poles; mais il est plus court d'appliquer au centre de la projection la pointe de celui que l'on cherche.

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? Fig. 74 & 76. Fig. 74 & 76.

Soient ZP de 40°, PS de 50°, & ZPS de 109° 48′.

Prenez, comme dans le premier cas, ZAP de 40° pour avoir le côté ZP; PAS′ de 50°. Faites l'angle ZPS de 109° 48′, & PS égal à PS′. Menez ZS, vous aurez la projection ZPS du triangle sphérique.

Pour connoitre la base ZS j'abaisse du centre P sur ZS la perpendiculaire PO que je prolonge indéfiniment vers *l*, & sur PO la perpendiculaire PL jusqu'à la circonférence du cercle de la projection, qu'on appelle *cercle primitif.* Je porte OL sur OP prolongée, en prenant O*l* égal à OL. L'angle S*l*Z de 71° me donne le côté dont la droite SZ est la projection.

Pour connoitre la valeur de l'angle sphérique, dont le rectiligne PZS est la projection, je cherche le grand cercle dont Z est le pole, en élevant PA perpendiculaire à PZ, AE perpendiculaire à AZ, & EF perpendiculaire à PE prolongement de PZ. Je prolonge ZS jusqu'à la rencontre F du grand cercle FE dont Z est le pole. Je prolonge encore ZE en *a*, faisant E*a* = EA. L'angle E*a*F de 50° donne la valeur de l'angle sphérique PZS. On trouvera de même la valeur de l'angle sphérique dont ZSP est la projection, en cherchant le grand cercle dont S est le pole, ce qui donnera cet angle de 39° $\frac{3}{4}$.

III. Cas.

Un côté étant donné avec les deux angles adjacens, trouver le reſte ? Fig. 76.

Soit (fig. 74) ZP le côté donné de 40°, l'angle ZPS de 110°, Fig. 76. & l'autre angle adjacent PZS de 50°. L'angle (Fig. 76.) PAZ de 40°, donne la projection du côté ZP. L'angle ZPS de 110° eſt égal à l'angle ſphérique P. Prolongez ZP en *a*, élevez AE perpendiculaire à AZ, & EF à EZ. Portez AE de E en *a*, & faites l'angle E *a* F de 50°. Menez ZF, qui coupera PS en quelque point S. Vous trouverez SZ, comme dans le ſecond cas de 50° ; & cherchant le grand cercle dont le point S eſt le pole, vous trouverez la valeur de l'angle ſphérique S dont le rectiligne eſt la projection. Cet angle eſt de 39° $\frac{3}{4}$.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle oppoſé à l'un d'eux, trouver le reſte ? Fig. 76.

Placez autour du centre les deux côtés donnés, comme ZP, PS. Si l'angle Z eſt donné, vous chercherez comme ci-devant le grand cercle EF dont Z eſt le pole, & vous ferez l'angle E*a*F égal à l'angle donné PZS. Vous aurez la projection rectiligne ZPS du triangle ſphérique, & vous en meſurerez le côté SZ, & l'angle dont S *eſt* la projection, comme dans le ſecond Cas. Le troiſieme angle ZPS ſera égal à l'angle ſphérique correſpondant.

V. Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? Fig. 76.

Construisez un autre triangle, dont les côtés soient les supplémens des angles donnés, & dont les angles soient les supplémens des côtés donnés. Vous aurez le reste par la méthode du quatrieme cas.

Exemple.

L'angle sphérique PZS (Fig. 77.) est de 50°, PSZ de $39^{\circ}\frac{3}{4}$, & le côté PZ opposé à PSZ est de 40°. On demande le reste? Fig. 77.

Imaginez le triangle EFG, dont les angles E, F & G soient supplémens des côtés opposés PS, PZ & SZ respectivement, & dont les côtés EF, EG, GF, soient les supplémens des angles P, S & Z respectivement. Vous aurez dans ce nouveau triangle, FG supplément de l'angle PZS de 130°, EG supplément de ZSP de $140^{\circ}\frac{1}{4}$, & l'angle F supplément du côté PS de 140°.

Placez donc (Fig. 78) autour du centre G les côtés F'G & GE' selon la méthode du quatrieme Cas, en faisant GAE' de $140^{\circ}\frac{1}{4}$, & GAF' de 130°. Les deux lignes AE', AF', prolongées couperont le diamètre prolongé du cercle primitif en E' & F'. Elevez AH perpendiculaire à F'A, & KH à F'H. Portez HA en H*a*, & faites l'angle H*a*K égal à l'angle sphérique F ou à son supplément. Menez KF', & décrivez avec l'ouverture GE', un arc de cercle du centre G, qui coupera KF' en quelque point E''. Vous aurez le triangle E''F'G, dont l'angle F'GE'' de 109° vous donnera le supplément du côté SZ de 71°; E''*l*F de 70° est supplément de l'angle P de 110°. Fig. 78.

Il faut sur-tout prendre garde aux équivoques qui peuvent naître des angles aigus ou obtus.

VI. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Fig. 77. Imaginez un autre triangle EFG (Fig. 77) dont les trois côtés soient les supplémens des trois angles donnés ; & par la méthode du premier Cas, vous aurez les trois angles de ce nouveau triangle qui seront les supplémens des côtés du proposé.

Sur quoi il faut observer que le triangle supplémental FGE a lui-même son supplément en partie F*g*E. Lorsque les côtés FG, EG que l'on substitue aux angles Z & S, sont obtus ; on prend dans la projection gnomonique leurs supplemens F*g*, E*g* ; & le côté FE étant commun aux deux nouveaux triangles, on trouve les angles EF*g*, FE*g* égaux aux côtés respectifs PZ, PS. Le seul angle *g* égal à G est supplément du côté PZS.

Exemple

L'angle P est de 110°, l'angle Z de 50°, & l'angle S de 39° $\frac{3}{4}$. Par conséquent dans le triangle supplémental EFG, le côté EF, opposé à l'angle P, est de 70° ; le côté FG, opposé à l'angle Z, est de 130° ; & le côté EG, opposé à l'angle S, est de 140° $\frac{1}{4}$.

Au lieu de ce triangle supplémental, prenons l'autre EF*g*, dans lequel nous aurons FE de 70°, comme auparavant ; F*g* = Z = 50°, E*g* = S = 39° $\frac{3}{4}$.

Si l'on veut connoitre ZP, ou l'angle F qui lui est égal, il faut placer la pointe F de cet angle au centre du plan de

Fig. 79. projection (Fig. 79.), décrire le cercle primitif, élever au centre F les deux perpendiculaires FA, FE ; faire les angles FAE de 70°, FAG′ de 50°, & EAG″ de 39° $\frac{3}{4}$, qui sont les valeurs des arcs FE, F*g*, E*g* respectivement.

Les deux premiers angles couperont le diamètre prolongé en E & G′. FE & FG′ seront la valeur des projections de FE & F*g*, qui sont les deux côtés autour de

l'angle F. Faites AG″ égal à AG′. Du centre F avec l'ouverture FG″, & du centre E avec l'ouverture EG″ décrivez deux arcs qui se coupent en quelque point G; menez FG, EG; vous aurez la projection EFG du triangle EF*g*; & l'angle EFG sera la valeur de l'arc ZP de 40°.

Pour vérifier & démontrer cette méthode du premier & sixieme Cas, il faut du centre F abaisser FO perpendiculaire à EG, mener le demi diamètre FL, parallele à EG ou perpendiculaire à FO, & porter OL sur OF prolongé en *l*. L'angle E*l*G, par le second Probléme, mesure l'arc dont EG est la projection. Or je dis que cet angle est égal à l'angle EAG″, car les triangles E*l*G, EAG″ sont semblables & égaux, puisqu'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. EG″ est égal à EG par la construction. *l*E est égal à AE, car le quarré de *l*E est égal aux quarrés de O*l* ou OL & de OE, c'est-à-dire aux quarrés de OF & FL ou FA, & à la différence des quarrés de FE & de OF, c'est-à-dire que le quarré de *l*E est égal aux deux quarrés de FA & FE; mais le quarré de AE est aussi égal aux deux quarrés de FA & FE. Donc AE est égal à *l*F. On prouve de même que *l*G est égal à AG″; car le quarré de *l*G est égal aux quarrés de O*l* ou OL & OG, c'est-à-dire, aux deux quarrés de OF & FA, & à la différence des quarrés de FG & OF, donc le quarré de *l*G est égal aux quarrés de FA & de FG; mais le quarré de AG, égal à AG′, est aussi égal aux quarrés de FA & de FG′ ou FG. Donc AG″ est égal à *l*G; donc les deux triangles *l*EG, AEG″ sont entierement égaux & semblables. Donc l'angle EAG″, qui représente par la construction l'arc EG, est égal à l'angle E*l*G, qui représente le même arc par le Probléme II.

REMARQUE.

Lorsqu'on veut tracer un cadran solaire, on ne suit pas d'autre méthode. Si le cadran est horisontal, le centre Z de la projection (Fig. 80.) représente le Zénith; ZA Fig. 80.

ZP*e* = 70° 58′ 58″ par l'ascension droite du Soleil, son angle horaire, & l'ascension droite de l'Etoile, donne Z*e* = 67° 4′ 51″. E*e* = 2′ 23″ = 2′, 55. ZE = 67° 2′ 18″, & P*e*Z = 6° 17′ 39″, comme dans l'exemple du premier Probléme.

Par le premier article de la premiere regle des variations, on dira : le rayon est au cosinus de P*e*Z, comme la variation E*e* est à la variation du côté P*e* que l'on trouvera = 1′ 16″, retranchez-la de P*e* 76° 53′ 16″ vous aurez PE = 76° 52′ 0″.

Par le 5^e^ article de la même regle, on dira : le sinus de P*e* : au sinus de P*e*Z, comme la variation E*e* : à la variation EP*l* = 2′ 11″ qu'il faut soustraire de ZP*e* 70° 58′ 58″, pour avoir ZPE = 70° 56′ 57″ ;

mais ZPL = 34 50 13,

donc LPE = 36 6 34

Triangle LPE

Dont on a LE = 41° 35′ 40″, en ajoutant le demi-diamètre ☾ 16′ à la distance observée PE = 76 52 0, & LPE 36° 6′ 34″ ; donc par le cinquieme cas on dira :

1 Le ray. est au Cos. de LPE	36° 6′ 34″		9.907354
: : La tang. de PE	76 52 0		0.632047
: A la tang. de M aigu	73 53 29		0.539401
2 Le Cos. de PE	76 52 0	compl. ar.	0.643557
Au Cos. de LE	41 35 40		9.873822
: : Le Cos. de M	73 53 29		9.443199
Au Cos. de N aigu	24 2 42		9.960578
LP = M + N =	97 56 11		

Triangle LZP, dont on a

LP = 97° 56′ 11″		1 Le sinus de la ½ som.	compl. ar.	0.009809
ZP = 57 48 0		: Au sinus de la ½ differ.		9.535469
Som.	155 44 11	: : Cot. ½ ZPL		0.503438
Differ.	40 8 11	: A la tang. ½ diff. des angl. 48° 12′ 25″		0.048716
ZPL	34 50 13			

Demi som. 77° 52′ 5″ ½	2 Cos. de la ½ som.		compl. ar.	0.677447
½ Differ. 20 4 5 ½	: Au Cos. de la ½ differ.			9.972797
½ ZPL 17 25 6 ½	: : Cotang. ½ ZPL			0.503438
	: Tang. ½ som. des angl.	85° 59′ 4″		1.153682
	½ Differ.	48 12 25		
	Donc PZL =	134 11 29		
	PLZ =	37 46 39		

3 Le ray. : au cos. ZPL	34° 50′ 13″		9.914227
: : La tang. ZP	57 48 0		0.200843
: A Tang. de M *aigu*	52 30 11		0.115070
LP	97 56 11		
Différence N	45 26 0		
4 Cos. M	52 30 11	compl. ar.	0.215584
: Cos. N	45 26 0		9.846175
: : Cos. ZP	57 48		9.726626
: Cos. LZ	52 5 54		9.788385

Le rayon : au sin. LZ	9.897113
: : La paral. horiz. 58′, 666	1.768386
: A la paral. de hauteur. 46, 291 = 46′ 17″	1.665499
— la refraction 1 25	
Ll = 44 52	
LZ = 52° 5 54	
lZ = 51 21 2	

Triangle lZP, dont on a

PZ = 57° 48′ 0″	1 Le sinus de la ½ somme compl. ar.	0.088908
lZ = 51 21 2	: au sinus de la ½ differ.	8.750140
	: : Cotang. ½ lZP	9.625832
Som. 109 9 2	: Tang. ½ differ. des angl. 1°. 40′ 14″	8464880
Diff. 6 26 58		
lZP 134 11 29	2 Cosin de la ½ somme compl. ar.	0.236847
Demi som. 54 34 31	: Au cosin de la ½ differ.	9.999312
½ Differ. 3 13 29	: : Cotang. ½ lZP	9.625832
½ lZP 67 5 44½	: Tang. ½ som. des angles 36° 2′ 45″	9.861991
	½ Differ. 1 40 14	
	Donc ZPl = 34 22 31	

Et le reste comme dans le Probléme I.

PROBLEME VI.

L'angle horaire ZPL *de la Lune étant donné comme dans le Problême précédent, avec sa distance apparente au Zenith* ZL, *trouver la longitude?*

DAns le triangle ZPL on a deux côtés ZP, ZL & l'angle ZPL opposé à ZL ; on aura donc par le cinquieme cas des obliquangles, les deux autres angles & le troisieme côté LP ; ensuite retranchant de ZL la parallaxe moins la refraction, on aura *l*Z. Fig. 61.

Dans le triangle *l*ZP on a deux côtes *l*Z, ZP & l'angle compris. On aura donc le vrai angle horaire ZP*l*, & le complément *l*P de la déclinaison, & par conséquent l'ascension droite de la Lune, en comparant cet angle horaire avec celui du Soleil & avec son ascension droite ; on aura donc la longitude comme dans les autres Problémes.

Exemple.

Le 5 Juillet 1764 à 32° 12′ latit. Nord, la Lune a passé au Méridien à 5h 18′ 54″ & sa distance au Zénith a été observée à 7h 38′ ¼ égale à 52° 5′ 54″. On demande la long.?

L'angle ZPL est de 34° 50′ 13″, ZP = 57° 48′, & LZ = 52° 5′ 54″ ; on a donc,

1 Le rayon : au cos. ZP	57°	48′	0″			9.726626
: : Tang. ZPL	34	50	13			9.842593
: Cot. *m aigu*	69	39	6	½		9.569219
2 Tang. ZL	52	5	54		compl. ar.	9.891273
: Tang. ZP	57	48	0			0.200843
: : Cos. *m*	69	39	6	½		9.541235
: Cos. *n aigu*	64	32	23	½		9.633351
m + *n* = PZL =	134	11	30			

Otant de LZ, la parallaxe moins la réfraction 44′ 52″ on aura *l*Z = 51° 21′ 2″, & tout le reste comme dans le Probléme précédent.

PROBLEME VII.

Le supplément LZP *de l'angle azymuthal étant donné (comme* 134° 11′ 30″ *) & l'angle horaire* LPZ (34° 50′ 13″), *trouver la longitude?*

ON a ici deux angles & le côté compris ; donc par le quatrieme cas, Fig. 61.

LZP =	134° 11′ 30″
LPZ =	34 50 13
Somme	169 1 43
Differ.	99 21 17
ZP	57 48 0
Demi somme	84 30 51 ½
Demi differ.	49 40 38 ½
½ ZP	28 54 0

1 Le sinus de la ½ somme des angles		compl. ar.	0.001994
: Sinus de leur ½ differ.			9.882190
: : Tang. ½ ZP			9.741962
: Tang. demi differ. des côtés	22° 55′ 9″		9.626146
2 Le cos. de la ½ somme des angl.		compl. ar.	1.019555
: Cos. de leur ½ differ.			9.810965
: : Tang. ½ ZP			9.741962
: Tang. ½ som. des côtés	75° 1′ 3″		0.572482
Demi differ.	22 55 9		
Donc LP =	97 56 12		
LZ =	52 5 54		

Otant comme ci-devant de LZ, 44′ 52″, on aura *l*Z 51° 21′ 2″, & tout le reste comme dans le cinquieme Probléme.

PROBLEME VIII.

L'angle Azymuthal de la Lune & ſa diſtance au Zénith étant donnés, trouver la longitude?

Fig. 61. ON a dans le triangle *l*ZP deux côtés *l*Z, ZP & l'angle compris ; on aura donc l'angle horaire & tout le reſte comme ci-devant.

PROBLEME IX.

La hauteur méridienne de la Lune & le tems de ſon paſſage au Méridien étant donnés, trouver la longitude.

LA hauteur méridienne purgée de la réfraction & de la parallaxe donnera la déclinaiſon de la Lune par le moyen de la hauteur du pole. Le tems de ſon paſſage au Méridien donnera ſon aſcenſion droite ; on aura donc la longitude.

REMARQUE.

Ces quatre derniers Problémes ſont fort utiles lorſqu'on eſt à terre & qu'on peut obſerver le moment du paſſage de la Lune par le Méridien, ſoit par des hauteurs égales, ſoit par trois ou quatre hauteurs aux environs du Méridien. Mais à la mer cette obſervation eſt trop difficile, & le compas de variation n'eſt pas aſſez exact pour déterminer l'angle azymuthal de la Lune à quelques minutes près.

La diſtance de la Lune au Soleil, lorſqu'on peut l'obſerver, fait le même effet que ſa diſtance à une Etoile

quelconque, & le Probléme I. s'applique fort aisément à cette observation. Le tems le plus propre est celui où la Lune n'a pas passé son premier quartier, ou lorsqu'elle a passé son dernier quartier, c'est-à-dire, pendant les quatre jours qui précédent le premier quartier & pendant les quatre qui suivent le dernier quartier ; il faut observer cette distance depuis une demi-heure après le lever du Soleil jusques vers 10 heures ou $10\frac{1}{2}$ du matin, & depuis 2 heures du soir jusques à une demi-heure avant le coucher du Soleil. Après avoir vérifié l'Octant, on pointera sa lunette à la Lune pour la voir dans la partie non étamée du petit miroir, & sans la perdre de vue, on tournera l'Octant vers le Soleil jusqu'à ce que l'image de son bord le plus prochain vienne raser le bord éclairé de la Lune dans sa distance la plus courte. On marquera dans ce moment le tems de la montre ; après quoi on prendra la hauteur du centre de la Lune comme on prend celle du Soleil.

Si deux Observateurs se réunissent, l'un des deux pourra fort aisément par un mouvement leger de l'alidade assujettir l'image de la Lune à rester sur le terme de l'horison de la mer, pendant que l'autre fait ses tentatives pour prendre exactement la distance d'une Etoile ou du Soleil au bord éclairé de la Lune.

En multipliant les observations & prenant un milieu, on s'assure plus de la longitude de la Lune ; rien n'empêche de prendre deux ou trois fois la distance de la Lune à l'Etoile & sa hauteur apparente en mettant le moins d'intervalle de tems qu'il soit possible entre chaque observation. Le calcul de trois determinations de longitude ne sera gueres plus long que celui d'une seule, parce que les mêmes nombres y serviront. Si l'on prend exactement deux hauteurs du Soleil ou d'une Etoile, elles serviront à connoître avec plus de précision la quantité dont la montre avance ou retarde. Ce point est essentiel pour déterminer la longitude du Navire dans toutes les différentes méthodes.

Par exemple, si j'avois trouvé par les hauteurs du Soleil

qu'à 9h 48′ du matin la montre retardoit de 3′ 50″, & qu'à 2h 23′ du soir elle retardoit de 5′ 42″; & si j'avois observé la distance de la Lune au Soleil à 11h 17′ ½ du matin, je dirois : si en 4h 35′ de tems la montre a augmenté son retard de 1′ 52″, en 1h 29″ de tems (ou depuis 9h 48′ jusqu'à 11h 17′), elle a du augmenter son retard de 37″. Donc à 11h 17′ ½, elle retardoit de 4′ 27″; donc l'heure vraie de l'observation de la distance est 11h 21′ 57″ du matin.

En général il faut un intervalle de deux heures au moins entre ces deux déterminations. En les comparant on aura la marche de l'horloge à l'égard du tems vrai, & par conséquent on pourra en conclure l'instant de l'observation de la distance de la Lune à l'Etoïle & au Soleil.

Pour la précision de tous ces calculs, il faut que le vaisseau n'ait changé ni de route ni de vitesse, du moins sensiblement pendant l'intervalle des observations, ou bien il faut y avoir égard par la méthode des variations.

Quand on se trouve à la vue d'une Isle ou d'une terre, dont la position n'est pas sûre sur la carte, on ne doit rien négliger pour en déterminer la longitude. Un bon Matin doit observer à terre la longitude & la latitude. Ces réflexions sont tirées pour la plûpart du traité de navigation de M. l'Abbé de la Caille.

CHAPITRE VII.

Solution des Problèmes Astronomiques sur un demi-globe.

AYEZ un demi-globe de bois ou de carton qui ait au moins un pied de diamètre; s'il est trop grand, il deviendra embarrassant; & s'il est trop petit, il ne sera pas assez exact. Ayez aussi un quart de cercle qui s'applique parfaitement au demi-globe; il pourra vous ser-

vir de regle pour tracer avec le crayon les grands cercles dont vous aurez besoin. Il faut enfin avoir un compas sphérique, c'est-à-dire, un compas dont les deux pointes soient recourbées, & qui soit assez grand pour pouvoir tracer les arcs de cercle, qui détermineront par leurs intersections la pointe des angles sphériques. Ce demi-globe est l'instrument le plus naturel & le plus propre à diriger le calcul des triangles sphériques, & à écarter tous les doutes qui peuvent s'y rencontrer.

Regles générales.

1re. Regle.

Trouver les poles d'un arc de cercle qu'on aura tracé sur le demi-globe ?

Donnez au compas sphérique l'ouverture de 90°, de maniere que les deux pointes embrassent précisement le quart de la circonférence du globe. Placez l'une de ses pointes sur deux points différens de l'arc de cercle donné, & avec l'autre pointe vous décrirez deux arcs de cercle, dont l'intersection sera le pole du cercle donné.

2e. Regle.

L'un des poles d'un grand cercle étant donné, d'écrire ce grand cercle sur la surface du globe ?

Ouvrez le compas sphérique, de sorte que ses pointes soient écartées l'une de l'autre de 90°, & avec cette ouverture décrivez du point donné sur la surface du globe, la partie du grand cercle dont vous aurez besoin.

3e. Regle.

Le pole le plus proche d'un petit cercle étant donné avec sa distance a ce pole, tracer ce petit cercle ?

Ouvrez le compas sphérique de maniere que ses poin-

tes embrassent précisement la distance de ce petit cercle à son pole ; & ensuite de ce pole donné comme centre, vous décrirez sur la surface du demi globe le petit cercle requis.

4^{e}. Regle.

Trouver la valeur d'un angle sphérique tracé sur le globe ?

Décrivez par la 2^{e}. Regle une partie du grand cercle dont la pointe de cet angle est le pole ; & ayant prolongé jusqu'à ce grand cercle les deux côtés de l'angle, vous prendrez avec le compas la distance de leurs intersections sur le grand cercle. Cette distance donnera sur le cercle gradué la valeur de l'angle sphérique.

5^{e}. Regle.

Décrire autour d'un point donné un angle sphérique donné ?

Tracez par la 2^{e}. Regle le grand cercle dont ce point est le pole ; & ayant ouvert le compas sphérique de la grandeur de l'angle donné, vous porterez cette ouverture sur le grand cercle ; ensuite vous appliquerez le quart de cercle au point donné & à ces deux points, pour avoir les deux côtés de l'angle sphérique.

On voit par là qu'on peut aisément avec le compas sphérique, mesurer & déterminer la longueur d'un côté ou la distance de deux points sur la surface du demi-globe.

6^{e}. Regle.

Abaisser d'un point donné un arc perpendiculaire à un arc donné ?

Il faut chercher le pole de cet arc par la 1re Regle, & faire passer un grand cercle par ce pole & par le point donné par la 2^{e}. Regle.

Ces six Regles suffisent pour résoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique.

Trigonométrie sphérique rectangle.

1^{er} Cas.

Un côté étant donné avec l'hypothénuse, trouver le reste. Fig. 62.

Décrivez deux quarts de cercle (Fig. 62) BZ, CZ perpendiculaires l'un à l'autre, en prenaut BC de 90°. Prenez avec le compas sphérique AZ égal au côté donné, & avec l'ouverture AP égale à l'hypothénuse, vous décrirez du centre A un arc de cercle qui coupera BZ en quelque point P, & ayant tracé l'arc AP, vous aurez le triangle APZ rectangle en Z.

Vous en mesurerez les côtés PZ, AZ avec le compas & les angles P & A selon la 4^e Regle.

2^e Cas.

L'hypothénuse étant donnée avec un angle, trouver le reste ?

Tracez l'hypothénuse AP, & ayant fait en P un angle égal à l'angle donné, prolongez l'arc PZ de part & d'autre de P. Du point A à la distance de 90°, cherchez sur cet arc prolongé le point B, qui sera le pole de l'arc AZ perpendiculaire sur PZ ; vous aurez le triangle APZ, rectangle en Z.

3^e Cas.

Un angle P *étant donné* (fig. 62) *avec le côté opposé* AZ, *trouver le reste.* Fig. 62 & 63.

Changez les angles en côtés par le triangle supplémental *apz* (fig. 63.), vous aurez *pa* de 90°, l'angle *p* égal au supplément du côté AZ ; & ayant tracé cet angle *p* par la 5^e. Regle, vous prendrez l'ouverture *az* du supplément de l'angle *P*, pour décrire un arc du centre *a* qui coupera le côté *pz* prolongé s'il le faut, en quelque point *z*. Vous aurez par ce moyen le triangle supplémental *apz*, dont le côté

pZ sera le supplément de l'angle A, l'angle A sera le supplément de PZ, & l'angle Z le supplément de l'hypothénuse AP.

4^e Cas.

Un angle P étant donné avec le côté adjacent PZ, trouver le reste?

Tracez l'angle P, marquez le point Z, & élevez l'arc AZ perpendiculaire à PZ, par le moyen de son pole B. Cet arc coupera le côté PA en quelque point A, & l'on aura le triangle APZ.

5^e Cas.

Deux côtés PZ, AZ étant donnés, trouver le reste?

Tracez l'angle droit Z; prenez avec le compas ZP, ZA; & joignez AP. Vous aurez le triangle APZ.

6^e Cas.

Deux angles étant donnés, trouver le reste?

Le triangle supplémental *apz* vous donnera les trois côtés d'un triangle, que vous résoudrez comme dans le 1^er cas; car *ap* sera de 90°, *pz* sera supplément de l'angle A, & *az* de l'angle B; vous aurez donc l'angle *z* supplément de l'hypothénuse AP, l'angle *p* supplément du côté AZ, & l'angle *a* supplément du côté PZ.

Trigonométrie sphérique obliquangle.

1^er Cas.

Les trois côtés étant donnés, trouver les trois angles? Fig. 64.

Tracez sur le demi-globe avec un crayon le long du quart de cercle le plus grand côté AP du triangle. Mar-

quez les deux extrêmités P & A de cet arc ; décrivez du centre P & du centre A avec le compas ſphérique & les ouvertures données des deux côtés, deux arcs qui ſe couperont en quelque point Z, & appliquant le quart de cercle aux points P & Z, A & Z, vous acheverez le triangle APZ ; prolongez enſuite PZ juſqu'à l'extrêmité B du quart de cercle, & décrivez du pole P l'arc BC, qui meſurera l'angle P. On meſurera de même A & Z.

2ᵉ Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Prenez à la place des angles, leurs ſupplémens, pour avoir les trois côtés du triangle ſupplémental dont vous trouverez les trois angles comme dans le premier cas. Ces trois angles ſeront les ſuppléments des trois côtés demandés.

3ᵉ Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reſte ?

Tracez le premier côté PA comme dans le premier cas décrivez le grand cercle BC dont P eſt le pole. Portez avec le compas ſur BC la valeur de l'angle donné P, & tracez le quart de cercle PB, ſur lequel vous prendrez la valeur PZ du ſecond côté ; & appliquant le quart de cercle ſur A & Z, vous aurez le triangle APZ, dont vous meſurerez les angles comme dans le premier cas. Le compas vous donnera la valeur de la baſe AZ.

4ᵉ Cas.

Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reſte ?

Soit AP le côté donné. Les deux grands cercles dont A & P ſont les poles, vous donneront la meſure des angles

donnés A & P ; vous aurez dnnc les deux arcs de cercle AZ, PZ, & tout le triangle APZ, que vous meſurerez comme ci-devant.

5e Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un des deux, trouver le reſte ?

Soient PA & AZ les deux côtés donnés, & l'angle P opposé au côte AZ. Prenez PA avec le compas ; & ſur le grand cercle BC dont P eſt le pole, prenez la valeur BC de l'angle P, vous aurez l'arc PZB ; prenez AZ avec le compas, & du centre A décrivez un arc qui coupera le côté PB en Z ; vous aurez le triangle PAZ, dont vous trouverez avec le compas le 3e côté & les autres angles par la méthode du premier cas.

6e Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reſte ?

Changez les angles en côtés par le triangle ſupplémental, vous aurez, comme dans le cinquieme Cas, deux côtés & l'angle opposé à l'un des deux.

Avec ce demi-globe on peut réſoudre aiſément les Problémes aſtronomiques les plus compliqués ; nous en allons rapporter quelques exemples. Le globe entier ſeroit plus commode, mais plus difficile à manier ; on peut en prendre les deux tiers ou les trois quarts.

PROBLEME I.

PROBLEME I.

Etant données deux hauteurs d'un même astre connu, ou de deux astres différens & connus avec l'intervalle du tems des observations, trouver la latitude, les angles horaires & les azimuths?

CHoisissez un point P pour représenter le pole (fig. 65); faites un angle APA′ égal à l'intervalle du tems des observations réduit en degrés, prenez PA & PA′, égaux à la distance de l'astre au pole, ou aux distances des deux astres au pole; vous aurez le triangle APA′. Des centres A & A′, décrivez avec les distances au Zénith AZ, A′Z, deux arcs qui se couperont en quelque point Z; ce point représentera le Zénith; l'arc ZP sera la distance du Zénith au pole; les angles ZPA, ZPA′ seront les angles horaires; & les angles AZP, A′ZP seront les supplémens des angles azimuthaux. Fig. 65.

PROBLEME II.

Trois hauteurs d'un même astre étant données avec la différence des angles azimuthaux, trouver la déclinaison de l'astre, la hauteur du pole, l'angle horaire & l'angle azimuthal, fig. 66.

CHoisissez un point Z pour représenter le Zénith; faites les angles AZA′, AZA″, égaux aux différences des azimuths, & les arcs AZ, A′Z, A″Z, égaux aux distances au Zénith; élevez du milieu des arcs AA′, A′A″, deux arcs de cercle perpendiculaires à ces arcs de grand cercle. Ils se couperont au pole P du petit cercle qui passe par les trois points A, A′, A″. On aura donc les distances égales AP, A′P, A″P de l'astre au pole, le complement ZP de la latitude, & les angles demandés. Fig. 66.

PROBLEME III.

La hauteur du pole étant donnée, trouver à quelle heure deux Etoiles connues paroitront ensemble dans le même vertical ? fig. 67.

Fig. 67.

CHoisissez un point P pour représenter le pole ; faites l'angle APA' égal à la différence en ascension droite de deux Etoiles, & faites AP, A'P égaux à leurs distances au pole ; vous aurez le triangle APA'. Prolongez l'arc de grand cercle AA' vers Z ; & avec l'ouverture PZ de la distance du pole au Zénith, décrivez du centre P un arc qui coupera AZ en quelque point Z. Ce point sera le Zénith, ZPA & ZPA' seront les angles horaires ; cherchez le tems du passage de l'Etoile A par le Méridien (*Probl. IV ch. IV*) & ajoutez à ce tems, ou retranchez-en l'angle APZ, vous aurez l'heure de l'observation.

COROLLAIRE.

Si les deux Etoiles ont la même ascension droite, on aura l'heure indépendamment de la hauteur du pole, parce qu'elles seront alors dans le Méridien.

PROBLEME IV.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux astres connus, trouver la hauteur du pole ? fig. 67.

Fig. 67.

L'Heure étant donnée avec les ascensions droites des astres, on aura les angles ZPA, ZPA', qu'il faudra tracer sur le demi-globe, & avec les distances AP, A'P des astres au pole, on aura l'arc AA', qu'il faut pro-

longer vers Z ; cet arc coupera PZ au Zénith, & l'on aura le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME V.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath deux astres connus, trouver la hauteur du pole? fig. 68. Fig. 68.

TRacez les angles connus ZPA, ZPA', vous aurez avec les côtés connus AP, A'P, l'arc AA'. Du milieu M de cet arc, élevez l'arc MZ qui lui soit perpendiculaire ; il coupera PZ au Zénith, & l'arc ZP vous donnera le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME VI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Etoiles, & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres, trouver l'heure & la hauteur du pole? fig. 69. Fig. 69.

TRacez les angles APA', A'PA, APA'', connus par l'intervalle des tems & par la différence des ascensions droites ; prenez AP, A'P, A''P égaux aux distances au pole ; les arcs A'A, A''A prolongés se rencontreront en quelque point Z, qui sera le Zénith ; vous aurez donc le complément ZP de la hauteur du pole, l'angle horaire ZPA, & par conséquent l'heure de la premiere observation.

pZ sera le supplément de l'angle A, l'angle A sera le supplément de PZ, & l'angle Z le supplément de l'hypothénuse AP.

4^e Cas.

Un angle P *étant donné avec le côté adjacent* PZ, *trouver le reste?*

Tracez l'angle P, marquez le point Z, & élevez l'arc AZ perpendiculaire à PZ, par le moyen de son pole B. Cet arc coupera le côté PA en quelque point A, & l'on aura le triangle APZ.

5^e Cas.

Deux côtés PZ, AZ *étant donnés, trouver le reste?*

Tracez l'angle droit Z; prenez avec le compas ZP, ZA; & joignez AP. Vous aurez le triangle APZ.

6^e Cas.

Deux angles étant donnés, trouver le reste?

Le triangle supplémental *apz* vous donnera les trois côtés d'un triangle, que vous résoudrez comme dans le 1^er cas; car *ap* sera de 90°, *pz* sera supplément de l'angle A, & *az* de l'angle B; vous aurez donc l'angle *z* supplément de l'hypothénuse AP, l'angle *p* supplément du côté AZ, & l'angle *a* supplément du côté PZ.

Trigonométrie sphérique obliquangle.

1^er Cas.

Les trois côtés étant donnés, trouver les trois angles?
Fig. 64.

Tracez sur le demi-globe avec un crayon le long du quart de cercle le plus grand côté AP du triangle. Mar-

quez les deux extrêmités P & A de cet arc ; décrivez du centre P & du centre A avec le compas ſphérique & les ouvertures données des deux côtés, deux arcs qui ſe couperont en quelque point Z, & appliquant le quart de cercle aux points P & Z, A & Z, vous acheverez le triangle APZ ; prolongez enſuite PZ juſqu'à l'extrêmité B du quart de cercle, & décrivez du pole P l'arc BC, qui meſurera l'angle P. On meſurera de même A & Z.

2e Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Prenez à la place des angles, leurs ſupplémens, pour avoir les trois côtés du triangle ſupplémental dont vous trouverez les trois angles comme dans le premier cas. Ces trois angles ſeront les ſuppléments des trois côtés demandés.

3e Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reſte?

Tracez le premier côté PA comme dans le premier cas, décrivez le grand cercle BC dont P eſt le pole. Portez avec le compas ſur BC la valeur de l'angle donné P, & tracez le quart de cercle PB, ſur lequel vous prendrez la valeur PZ du ſecond côté ; & appliquant le quart de cercle ſur A & Z, vous aurez le triangle APZ, dont vous meſurerez les angles comme dans le premier cas. Le compas vous donnera la valeur de la baſe AZ.

4e Cas.

Deux angles étant donnés avec le côté compris, trouver le reſte?

Soit AP le côté donné. Les deux grands cercles dont A & P ſont les poles, vous donneront la meſure des angles

donnés A & P ; vous aurez dnnc les deux arcs de cercle AZ, PZ, & tout le triangle APZ, que vous mesurerez comme ci-devant.

5ᵉ Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

Soient PA & AZ les deux côtés donnés, & l'angle P opposé au côte AZ. Prenez PA avec le compas ; & sur le grand cercle BC dont P est le pole, prenez la valeur BC de l'angle P, vous aurez l'arc PZB ; prenez AZ avec le compas, & du centre A décrivez un arc qui coupera le côté PB en Z ; vous aurez le triangle PAZ, dont vous trouverez avec le compas le 3ᵉ côté & les autres angles par la méthode du premier cas.

6ᵉ Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste ?

Changez les angles en côtés par le triangle supplémental, vous aurez, comme dans le cinquieme Cas, deux côtés & l'angle opposé à l'un des deux.

Avec ce demi-globe on peut résoudre aisément les Problémes astronomiques les plus compliqués ; nous en allons rapporter quelques exemples. Le globe entier seroit plus commode, mais plus difficile à manier ; on peut en prendre les deux tiers ou les trois quarts.

PROBLEME I.

PROBLEME I.

Etant données deux hauteurs d'un même astre connu, ou de deux astres différens & connus avec l'intervalle du tems des observations, trouver la latitude, les angles horaires & les azimuths?

CHoisissez un point P pour représenter le pole (fig. 65); faites un angle APA' égal à l'intervalle du tems des observations réduit en degrés, prenez PA & PA', égaux à la distance de l'astre au pole, ou aux distances des deux astres au pole; vous aurez le triangle APA'. Des centres A & A', décrivez avec les distances au Zénith AZ, A'Z, deux arcs qui se couperont en quelque point Z; ce point représentera le Zénith; l'arc ZP sera la distance du Zénith au pole; les angles ZPA, ZPA' seront les angles horaires; & les angles AZP, A'ZP seront les supplémens des angles azimuthaux. Fig. 65.

PROBLEME II.

Trois hauteurs d'un même astre étant données avec la différence des angles azimuthaux, trouver la déclinaison de l'astre, la hauteur du pole, l'angle horaire & l'angle azimuthal, fig. 66.

CHoisissez un point Z pour représenter le Zénith; faites les angles AZA', AZA'', égaux aux différences des azimuths, & les arcs AZ, A'Z, A''Z, égaux aux distances au Zénith; élevez du milieu des arcs AA', A'A'', deux arcs de cercle perpendiculaires à ces arcs de grand cercle. Ils se couperont au pole P du petit cercle qui passe par les trois points A, A', A''. On aura donc les distances égales AP, A'P, A''P de l'astre au pole, le complement ZP de la latitude, & les angles demandés. Fig. 66.

PROBLEME III.

La hauteur du pole étant donnée, trouver à quelle heure deux Etoiles connues paroitront ensemble dans le même vertical ? fig. 67.

Fig. 67.

CHoisissez un point P pour représenter le pole ; faites l'angle APA' égal à la différence en ascension droite de deux Etoiles, & faites AP, A'P égaux à leurs distances au pole ; vous aurez le triangle APA'. Prolongez l'arc de grand cercle AA' vers Z ; & avec l'ouverture PZ de la distance du pole au Zénith, décrivez du centre P un arc qui coupera AZ en quelque point Z. Ce point sera le Zénith, ZPA & ZPA' seront les angles horaires ; cherchez le tems du passage de l'Etoile A par le Méridien (*Probl. IV ch. IV*) & ajoutez à ce tems, ou retranchez-en l'angle APZ, vous aurez l'heure de l'observation.

COROLLAIRE.

Si les deux Etoiles ont la même ascension droite, on aura l'heure indépendamment de la hauteur du pole, parce qu'elles seront alors dans le Méridien.

PROBLEME IV.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux astres connus, trouver la hauteur du pole ? fig. 67.

Fig. 67.

L'Heure étant donnée avec les ascensions droites des astres, on aura les angles ZPA, ZPA', qu'il faudra tracer sur le demi-globe, & avec les distances AP, A'P des astres au pole, on aura l'arc AA', qu'il faut pro-

longer vers Z ; cet arc coupera PZ au Zénith, & l'on aura le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME V.

Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath deux astres connus, trouver la hauteur du pole? fig. 68.

Fig. 68.

TRacez les angles connus ZPA, ZPA′, vous aurez avec les côtés connus AP, A′P, l'arc AA′. Du milieu M de cet arc, élevez l'arc MZ qui lui soit perpendiculaire ; il coupera PZ au Zénith, & l'arc ZP vous donnera le complément de la hauteur du pole.

PROBLEME VI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois Etoiles, & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres, trouver l'heure & la hauteur du pole? fig. 69.

Fig. 69.

TRacez les angles APA′, A′PA, APA″, connus par l'intervalle des tems & par la différence des ascensions droites ; prenez AP, A′P, A″P égaux aux distances au pole ; les arcs A′A, A″A prolongés se rencontreront en quelque point Z, qui sera le Zénith ; vous aurez donc le complément ZP de la hauteur du pole, l'angle horaire ZPA, & par conséquent l'heure de la premiere observation.

PROBLEME VII.

L'angle horaire, l'angle azimuthal & la hauteur d'un Astre étant donnés, trouver sa déclinaison & sa latitude? Fig. 23.

Fig. 23. DAns le triangle ZPA, on a l'angle horaire P, l'angle azimuthal Z, ou son supplément, & la distance AZ de l'astre au Zénith ; donc par le sixieme cas des obliquangles, on trouvera le complément AP de sa déclinaison, & la distance ZP du Zénith au pole.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole & la déclinaison d'un astre étant données, trouver son arc semi-diurne? Fig. 23.

ON a dans le triangle ZPA les trois côtés, la distance ZP du Zénith au pole, la distance PA de l'astre au pole, & l'arc ZA de 90°. On aura donc par le premier cas des obliquangles, sur le demi-globe l'angle ZPA, qui est égal à l'arc semi-diurne. On aura aussi l'angle ZPA, complément de l'amplitude ortive ou occase.

PROBLEME IX.

Trouver sur mer la hauteur du pole par la durée du jour? Fig. 23.

DAns le même triangle ZPA on a PA, distance du Soleil au pole au tems de son lever ou de son coucher, ZA de 90°, & l'angle P égal au tems écoulé depuis

le lever du Soleil jusqu'à midi, ou depuis midi jusqu'à son coucher, reduit en degrés. On trouvera donc sur le demi-globe le côté ZP, complément de la latitude par le cinquieme cas des obliquangles.

Quant au changement du lieu du Navire dans l'intervalle entre midi & le coucher du Soleil, ou minuit & son lever, décrivez du pole P (fig. 70) l'arc du parallele ZL à l'Est ou à l'Ouest, selon que la longitude a porté le vaisseau à l'Est ou à l'Ouest. L'angle ZPL doit être égal à la différence des longitudes depuis midi jusqu'au moment du coucher, ou depuis minuit jusqu'au lever du Soleil. Prenez sur ZP, vers le Nord ou vers le Sud, la différence en latitude du Navire, depuis le passage au Méridien; menez LZ″, Z′Z″, paralleles respectivement à ZZ′, ZL. Le point Z″ sera le Zénith du Navire au lever ou au coucher du Soleil, & PZ″, le complément de sa latitude pour cet instant.

Fig. 70.

Nous avons observé ailleurs que lorsque le Soleil est dans l'Equateur, la durée du jour étant la même par toute la terre, elle ne peut servir pour déterminer la latitude. On a vu aussi que le diamètre du Soleil est à peu près égal à la quantité dont la réfraction éleve les astres à l'horison; en sorte qu'au lever du Soleil, lorsqu'on observe son bord inférieur toucher l'horison, son bord supérieur ne fait réellement que l'atteindre; par conséquent si l'on ajoute à l'heure de l'emersion apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à s'élever de tout son disque, on aura le moment de l'emersion du centre. De même au coucher du Soleil, l'instant où le bord inférieur de cet astre paroit dans l'horison peut être pris pour l'instant où le bord supérieur s'y trouve réellement. Si donc on soustrait de l'heure de l'immersion apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à se cacher entierement sous l'horison, on aura le moment de l'immersion du centre.

Il y a sur ce sujet une méprise considérable dans l'Astronomie Nautique, pag. 88, & qui pourroit égarer le Lec-

teur inattentif. Ce que M. de Maupertuis y dit du lever du Soleil, & que nous avons rapporté presque mot pour mot, est exact. Par rapport au coucher de cet astre, il ajoute : *l'instant où le bord du Soleil paroit dans l'horison peut être pris pour l'instant où le bord inférieur s'y trouve réellement.* Il s'ensuivroit de là que la réfraction abaisseroit le Soleil d'une quantité égale à son diamètre, au lieu qu'elle fait précisément tout le contraire. Par conséquent il falloit dire comme nous, que l'instant où le bord inférieur paroit toucher l'horison peut être pris pour celui où le bord supérieur y est réellement. La même méprise continue dans ce que prescrit cet Auteur. *Si donc*, ajoute-t-il, *on soustrait de l'immersion apparente du bord supérieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à cacher entierement son disque, on aura le moment de l'immersion du centre.* Il est évident que lorsque le bord supérieur apparent touche l'horison, le centre est réellement au dessous de l'horison d'une quantité égale à trois fois son demi-diamètre, & qu'il faudroit par conséquent soustraire le triple du tems que prescrit M. de M.; au lieu qu'en lisant *inférieur* à la place de *supérieur*, tout est rétabli. Du reste cette pratique est moins exacte pour le coucher du Soleil que pour son lever.

CHAPITRE VIII.

De la résolution des Problèmes astronomiques par les differentes projections de la sphère.

LEs *projections* ou représentations de la sphére sur un plan dépendent uniquement de la position de l'œil, qu'on peut supposer ou dans la sphére ou hors de la sphére. Les trois principales sont la projection *gnomonique*, la projection *stéréographique* & la projection *orthographique*. Dans la projection gnomonique, on suppose l'œil au

centre de la ſphère. Dans la projection ſtéréographique, on le ſuppoſe placé dans quelque point de la ſurface de la ſphére ; & dans la projection orthographique, on le ſuppoſe à une diſtance infinie.

Projection gnomonique.

Le plan de cette projection touche la ſurface de la ſphére dans un point donné, parallélement à un cercle donné. On la nomme *gnomonique* parceque ce plan n'eſt autre choſe que le plan d'un cadran parallele au cercle donné, & dont le ſtile eſt égal au demi-diamètre de la ſphére. Cette projection eſt plus commode qu'aucune autre pour réſoudre tous les cas des triangles ſphériques & tous les Problémes aſtronomiques, parceque toutes les projections des grands cercles n'y ſont que des lignes droites, & que les projections des petits cercles paralleles au plan, ſont des cercles concentriques que l'on trace fort aiſément. Pour réſoudre les Problémes d'Aſtronomie par le moyen de cette projection, l'on n'a beſoin que d'une regle, d'un compas & d'un quart de cercle gradué. Les quatre Problémes ſuivans contiennent tout ce qui peut être de quelque utilité aux Marins & aux Aſtronomes.

PROBLEME I.

Diviſer en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle qui paſſe par le centre du plan de projection? Fig. 71.

Soit C le centre, AB le diamètre du cercle de projection, & DCE celle d'un grand cercle qui paſſe par ce centre & qu'il faut diviſer en degrés. Fig. 71.

Elevez ſur DE au centre C la perpendiculaire CA, & faites au point A l'angle CAF égal à l'angle donné. La ligne CF contiendra autant de degrés de la ſphére que l'angle CAF en contient ; l'angle DAF déterminera de même les degrés de DF.

COROLLAIRES.

1. Si l'angle CA*d* est droit, la ligne A*d* sera parallele à la ligne CD, & le pole du grand cercle BCA *sera* infiniment éloigné de CA, puisqu'il en est éloigné dans la sphére de 90°. Donc le pole de tous les grands cercles qui passent par le centre du plan de projection, est à une distance infinie de chacun de ces cercles.

2. Si du point quelconque F du grand cercle CD, on éleve une perpendiculaire F*f* à CD, elle représentera un grand cercle perpendiculaire à CD, & éloigné de CA de la quantité de l'angle CAF.

3. Pour trouver la valeur de l'arc représenté par CF, on éleve du centre C le demi-diam. CA perpendiculaire à CF, on mene la droite AF, & l'on mesure l'angle CAF qui est la valeur de l'arc dont CF est la projection.

4 Si l'on veut avoir le pole P du grand cercle F*f*, on fait l'angle FAP de 90°.

PROBLEME II.

Diviser en degrés la projection rectiligne d'un grand cercle, qui ne passe pas par le centre du plan de projection?

Fig. 72.

Fig. 72. SOit GH ce grand cercle. Du centre C abaissez CI perpendiculaire à GH, & élevez CH perpendiculaire à CI, jusqu'à la circonférence du cercle de projection. Joignez AI, & portez cette ouverture de I en *a* sur IC prolongée. Le point A sera le centre des divisions de GH, & l'angle quelconque I*a*L mesurera l'arc dont IL est la projection.

Si l'on imagine que le triangle CAI rectangle en C soit élevé perpendiculairement sur le plan de projection: le point A deviendra le centre de la sphére, la ligne AI sera perpendiculaire à GH, & tous les cercles décrits du

centre A ſur un demi-diamètre pris ſur AI, diviſeront en degrés la ligne GH qui repréſente un grand cercle de la ſphére.

PROBLEME III.

Trouver la valeur d'un angle que deux grands cercles font enſemble? Fig. 73.

Soit P la pointe de l'angle que les grands cercles PG, PH font entr'eux. Menez du centre C de la projection les lignes CP, CA perpendiculaires entr'elles. Joignez AP, prolongez PC indéfiniment, & élevez en A ſur PA la perpendiculaire AE, & en E ſur PE la perpendiculaire GEH. GH ſera le grand cercle dont P eſt le pole. Portez EA ſur E*a*; l'angle G*a*H qui meſure GH, meſurera auſſi l'angle GPH. Fig. 73.

COROLLAIRES.

1. Si l'on veut au point P former un angle donné entre deux grands cercles, dont l'un PG eſt donné; il faut mener par le point donné P, & par le centre C de la projection, la droite indéfinie PCE*a*, élever CA perpendiculaire à PC, AE perpendiculaire à PA, GEH perpendiculaire à PE; porter EA en E*a*, faire au point *a* l'angle G*a*H égal à l'angle donné, & mener PH qui formera avec PG en P la projection de l'angle donné.

2. Si le point donné P eſt au centre C de la projection, les deux autres points E & *a* y ſeront auſſi, & la projection de cet angle ſera un angle rectiligne, égal à l'angle ſphérique donné.

PROBLEME IV.

Résoudre tous les cas de la Trigonométrie ſphérique ?

I. Cas.

Fig. 74. & 75. *Les trois côtés étant donnés, trouver les angles ?* Fi. 74 & 75.

SOit le triangle ſphérique ZPS, dont on connoit les trois côtés. Placez au centre de la projection la pointe de l'angle que vous voulez connoitre, par exemple, de l'angle P. Menez du centre les droites PA & PB, perpendiculaires l'une à l'autre. Faites au point A les trois angles PAZ, PAS′, ZAS″ égaux reſpectivement aux trois côtés PZ, PS, ZS du triangle ſphérique ZPS. Les deux premiers angles couperont le demi-diamètre prolongé *PB* en Z & S′. PZ & PS′ feront la valeur des deux côtés autour de l'angle P. Faites AS″ égal à AS′. Du centre P avec l'ouverture PS, & du centre Z avec l'ouverture ZS″, décrivez deux arcs qui ſe couperont en quelque point S′. Menez PS, ZS ; vous aurez la projection rectiligne du triangle ſphérique ZPS dont les trois côtés ſont donnés. L'angle rectiligne ZPS eſt égal à l'angle ſphérique requis.

Exemple.

La diſtance ZP du Zénith au pole eſt de 40° ; la diſtance PS d'un aſtre au pole eſt de 50°, & la diſtance SZ du même aſtre au Zénith eſt de 71°. On demande ſon angle horaire ZPS ?

Faites l'angle ZAP de 40° pour avoir le côté ZP, PAS′ de 50° pour avoir la longueur PS′ de la projection de PS, & ZAS″ de 71°, pour avoir la longueur de la projection du 3ᵉ côté, en faiſant AS″ égal à AS′. Ce qui donne ZS″ égal à la projection du côté ZS. Décrivez du

centre P, avec PS', & du centre Z avec l'ouverture ZS'', deux arcs qui se couperont en S. Vous aurez le triangle requis ZPS, & vous trouverez l'angle rectiligne ZPS de 110° presque. Le calcul le donne de 109° 48' 18''.

On peut trouver les autres angles par la méthode du III Probléme, en cherchant les deux grands cercles dont Z & S sont les poles; mais il est plus court d'appliquer au centre de la projection la pointe de celui que l'on cherche.

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste? Fig. 74 & 76. Fig. 74 & 76.

Soient ZP de 40°, PS de 50°, & ZPS de 109° 48'.

Prenez, comme dans le premier cas, ZAP de 40° pour avoir le côté ZP; PAS' de 50°. Faites l'angle ZPS de 109° 48', & PS égal à PS'. Menez ZS, vous aurez la projection ZPS du triangle sphérique.

Pour connoitre la base ZS j'abaisse du centre P sur ZS la perpendiculaire PO que je prolonge indéfiniment vers *l*, & sur PO la perpendiculaire PL jusqu'à la circonférence du cercle de la projection, qu'on appelle *cercle primitif*. Je porte OL sur OP prolongée, en prenant O*l* égal à OL. L'angle S*l*Z de 71° me donne le côté dont la droite SZ est la projection.

Pour connoitre la valeur de l'angle sphérique, dont le rectiligne PZS est la projection, je cherche le grand cercle dont Z est le pole, en élevant PA perpendiculaire à PZ, AE perpendiculaire à AZ, & EF perpendiculaire à PE prolongement de PZ. Je prolonge ZS jusqu'à la rencontre F du grand cercle FE dont Z est le pole. Je prolonge encore ZE en *a*, faisant E*a* = EA. L'angle E*a*F de 50° donne la valeur de l'angle sphérique PZS. On trouvera de même la valeur de l'angle sphérique dont ZSP est la projection, en cherchant le grand cercle dont S est le pole, ce qui donnera cet angle de 39° $\frac{3}{4}$.

III. Cas.

Un côté étant donné avec les deux angles adjacens, trouver le reste? Fig. 76.

Fig. 76. Soit (fig. 74) ZP le côté donné de 40°, l'angle ZPS de 110°, & l'autre angle adjacent PZS de 50°. L'angle (Fig. 76.) PAZ de 40°, donne la projection du côté ZP. L'angle ZPS de 110° est égal à l'angle sphérique P. Prolongez ZP en *a*, élevez AE perpendiculaire à AZ, & EF à EZ. Portez AE de E en *a*, & faites l'angle E*a*F de 50°. Menez ZF, qui coupera PS en quelque point S. Vous trouverez SZ, comme dans le second cas de 50°; & cherchant le grand cercle dont le point S est le pole, vous trouverez la valeur de l'angle sphérique S dont le rectiligne est la projection. Cet angle est de 39° $\frac{3}{4}$.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle opposé à l'un d'eux, trouver le reste? Fig. 76.

Placez autour du centre les deux côtés donnés, comme ZP, PS. Si l'angle Z est donné, vous chercherez comme ci-devant le grand cercle EF dont Z est le pole, & vous ferez l'angle E*a*F égal à l'angle donné PZS. Vous aurez la projection rectiligne ZPS du triangle sphérique, & vous en mesurerez le côté SZ, & l'angle dont S est la projection, comme dans le second Cas. Le troisieme angle ZPS sera égal à l'angle sphérique correspondant.

V. Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un d'eux, trouver le reste? Fig. 76.

Construisez un autre triangle, dont les côtés soient les supplémens des angles donnés, & dont les angles soient les supplémens des côtés donnés. Vous aurez le reste par la méthode du quatrieme cas.

Exemple.

L'angle sphérique PZS (Fig. 77.) est de 50°, PSZ de 39° $\frac{3}{4}$, & le côté PZ opposé à PSZ est de 40°. On demande le reste? Fig. 77.

Imaginez le triangle EFG, dont les angles E, F & G soient supplémens des côtés opposés PS, PZ & SZ respectivement, & dont les côtés EF, EG, GF, soient les supplémens des angles P, S & Z respectivement. Vous aurez dans ce nouveau triangle, FG supplément de l'angle PZS de 130°, EG supplément de ZSP de 140° $\frac{1}{4}$, & l'angle F supplément du côté PS de 140°.

Placez donc (Fig. 78) autour du centre G les côtés F′G & GE′ selon la méthode du quatrieme Cas, en faisant GAE′ de 140° $\frac{1}{4}$, & GAF′ de 130°. Les deux lignes AE′, AF′, prolongées couperont le diamètre prolongé du cercle primitif en E′ & F′. Elevez AH perpendiculaire à F′A, & KH à F′H. Portez HA en H*a*, & faites l'angle H*a*K égal à l'angle sphérique F ou à son supplément. Menez KF′, & décrivez avec l'ouverture GE′, un arc de cercle du centre G, qui coupera KF′ en quelque point E″. Vous aurez le triangle E″F′G, dont l'angle F′GE″ de 109° vous donnera le supplément du côté SZ de 71°; E″*l* F de 70° est supplément de l'angle P de 110°. Fig. 78.

Il faut sur-tout prendre garde aux équivoques qui peuvent naître des angles aigus ou obtus.

VI. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Fig. 77. Imaginez un autre triangle EFG (Fig. 77) dont *les* trois côtés soient les supplémens des trois angles donnés ; & par la méthode du premier Cas, vous aurez les trois angles de ce nouveau triangle qui seront les supplémens des côtés du proposé.

Sur quoi il faut observer que le triangle supplémental FGE a lui-même son supplément en partie F*g*E. Lorsque les côtés FG, EG que l'on substitue aux angles Z & S, sont obtus ; on prend dans la projection gnomonique leurs supplemens F*g*, E*g* ; & le côté FE étant commun aux deux nouveaux triangles, on trouve les angles EF*g*, FE*g* égaux aux côtés respectifs PZ, PS. Le seul angle *g* égal à G est supplément du côté PZS.

Exemple

L'angle P est de 110°, l'angle Z de 50°, & l'angle S de 39° $\frac{3}{4}$. Par conséquent dans le triangle supplémental EFG, le côté EF, opposé à l'angle P, est de 70° ; le côté FG, opposé à l'angle Z, est de 130° ; & le côté EG, opposé à l'angle S, est de 140° $\frac{1}{4}$.

Au lieu de ce triangle supplémental, prenons l'autre EF*g*, dans lequel nous aurons FE de 70°, comme auparavant ; F*g* = Z = 50°, E*g* = S = 39° $\frac{3}{4}$.

Si l'on veut connoitre ZP, ou l'angle F qui lui est égal, il faut placer la pointe F de cet angle au centre du plan de
Fig. 79. projection (Fig. 79.), décrire le cercle primitif, élever au centre F les deux perpendiculaires FA, FE ; faire les angles FAE de 70°, FAG′ de 50°, & EAG″ de 39° $\frac{3}{4}$, qui sont les valeurs des arcs FE, F*g*, E*g* respectivement.

Les deux premiers angles couperont le diamètre prolongé en E & G′. FE & FG′ seront la valeur des projections de FE & F*g*, qui sont les deux côtés autour de

l'angle F. Faites AG″ égal à AG′. Du centre F avec l'ouverture FG″, & du centre E avec l'ouverture EG″ décrivez deux arcs qui se coupent en quelque point G; menez FG, EG; vous aurez la projection EFG du triangle EF*g*; & l'angle EFG sera la valeur de l'arc ZP de 40°.

Pour vérifier & démontrer cette méthode du premier & sixieme Cas, il faut du centre F abaisser FO perpendiculaire à EG, mener le demi diamètre FL, parallele à EG ou perpendiculaire à FO, & porter OL sur OF prolongé en *l*. L'angle E*l*G, par le second Probléme, mesure l'arc dont EG est la projection. Or je dis que cet angle est égal à l'angle EAG″, car les triangles E*l*G, EAG″ sont semblables & égaux, puisqu'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. EG″ est égal à EG par la construction. *l*E est égal à AE, car le quarré de *l*E est égal aux quarrés de O*l* ou OL & de OE, c'est-à-dire aux quarrés de OF & FL ou FA, & à la différence des quarrés de FE & de OF, c'est-à-dire que le quarré de *l*E est égal aux deux quarrés de FA & FE; mais le quarré de AE est aussi égal aux deux quarrés de FA & FE. Donc AE est égal à *l*F. On prouve de même que *l*G est égal à AG″; car le quarré de *l*G est égal aux quarrés de O*l* ou OL & OG, c'est-à-dire, aux deux quarrés de OF & FA, & à la différence des quarrés de FG & OF, donc le quarré de *l*G est égal aux quarrés de FA & de FG; mais le quarré de AG, égal à AG′, est aussi égal aux quarrés de FA & de FG′ ou FG. Donc AG″ est égal à *l*G; donc les deux triangles *l*EG, AEG″ sont entierement égaux & semblables. Donc l'angle EAG″, qui représente par la construction l'arc EG, est égal à l'angle E*l*G, qui représente le même arc par le Probléme II.

REMARQUE.

Lorsqu'on veut tracer un cadran solaire, on ne suit pas d'autre méthode. Si le cadran est horisontal, le centre Z de la projection (Fig. 80.) représente le Zénith; ZA Fig. 80.

est la hauteur perpendiculaire du stile. L'angle ZAP détermine la distance ZP du Zénith au pole; & l'angle ZAE, la distance ZE du Zénith à l'Equateur. EQ, perpendiculaire à la ligne méridienne PE, représente l'Equateur. On porte EA de E en *a*, pour diviser l'Equateur en *tems*, à raison de 15° par heure; ainsi les angles E*a*II, E*a*X, déterminent 2 heures & 10 heures sur l'équateur.

Si le cadran est vertical, ou s'il est incliné à l'horison, le point Z sera le Zénith du pays dont l'horison est paralle au plan du cadran. ZE sera la latitude de ce pays, PE en sera le Méridien, & les cercles horaires changeront de nom selon la différence des Méridiens de ce pays & de celui où le cadran est construit; si, par exemple, le cadran marque midi sur PX, la différence des Méridiens est E*a*X de 30°. C'est pour cela que l'on cherche la déclinaison & l'inclinaison du plan, lorsqu'on veut construire un cadran sur un plan vertical ou incliné à l'horison.

Si le plan vertical est directement tourné vers le Sud, son Zénith Z est le point Sud de l'horison; ZP est la distance de ce point au pole; & ZE, sa distance à l'Equateur. S'il est tourné directement au Nord, Z est le point Nord de l'horison; PZ, la distance de ce point au pole qui est en dessous de Z dans ce cadran; parce que le pole Nord est au dessus du point Nord de l'horison, & EZ est la hauteur de l'Equateur qui doit être au dessus de Z, parceque l'Equateur est au dessous du point du Nord.

Si le plan est directement tourné vers l'Est ou vers l'Ouest, son Zénith Z est le point d'Est ou d'Ouest, & le pole P est à une distance infinie, parceque les points d'Est & d'Ouest étant éloignés du pole de 90°, l'angle ZAP est droit, & la ligne AP ne peut pas rencontrer la Méridienne PZ. La ligne ZA prolongée est l'Equateur; & on la divise de 15 en 15 degrés, pour avoir les cercles horaires qui sont tous perpendiculaires à ZA, ou paralleles entr'eux. Tous les points de l'horison sont le Zénith de quelque cadran vertical.

Si le plan est parallele à l'Equateur, son Zénith Z est l'un

l'un des deux poles ; & le point P ſe réuniſſant au point Z, tous les Méridiens ou cercles horaires forment dans le cadran des angles de 15°.

Pour trouver la Méridienne d'un plan horiſontal, vertical ou incliné, on prend deux points d'ombre S & S' (Fig. 81) à diſtances égales du Zénith Z de ce plan. On décrit l'arc SS' du centre Z. La ligne ZE qui diviſe cet arc en deux parties égales, eſt la Méridienne du plan. On la nomme auſſi *ſouſtilaire.* Cette Méridienne eſt en même tems le cercle de 6 heures dans tous les cadrans tournés directement à l'Eſt ou à l'Oueſt, puiſque leur Zénith eſt dans le cercle de 6 heures. Fig. 81.

Projection Stéréographique.

Cette projection eſt peu connue de nos Marins. Les Anglois en font beaucoup de cas. Elle ſuppoſe l'œil dans la ſurface de la ſphére. Si l'on imagine une ligne droite qui joint ce point de la ſurface de la ſphére avec ſon centre, & qui ſoit perpendiculaire à un grand cercle, toutes les lignes qui partent de l'œil du ſpectateur, & qui paſſent par tous les points de la circonférence d'un cercle quelconque de la ſphére, grand ou petit, décriront ſur ce plan, ou une ligne droite, ou un cercle. Ce plan ſe nomme *Planiſphère* ; en voici les propriétés.

1.° La projection du pole oppoſé à l'œil ſera le centre même du Planiſphére.

2.° Tous les grands cercles qui ſe coupent au centre de l'œil ſeront repréſentés par des lignes droites qui ſe couperont toutes au centre du Planiſphére.

3.° Les poles de tous ces grands cercles ou de ces lignes droites, ſont tous dans la circonférence du Planiſphére, à 90° de diſtance du grand cercle dont ils ſont les poles.

4.° Tous les petits cercles paralleles au Planiſphére deviennent des cercles concentriques. Leur centre commun eſt le centre même du Planiſphére. Leurs demi-diamètres ſont les tangentes des demi-diſtances de chaque parallele

au pole de la projection, parceque l'œil placé au pole opposé, voit ces cercles & leurs demi-diamètres sous cet angle.

Fig. 82. Sur ces principes on a construit des Planisphéres *de* toutes les espéces. Celui que je donne ici (Fig. 82), n'*est* proprement qu'un instrument qui sert à tracer sur un grand papier la représentation des cercles dont on a besoin, pour résoudre avec la regle & le compas tous les cas des triangles sphériques.

C'est un demi-cercle divisé exactement en 180 degrés, & qui par-là même peut servir encore à la projection gnomonique où l'on n'a que des angles à former. Il peut représenter la moitié de tous les grands cercles de la sphére. Son centre P représente le pole d'un cercle, par exemple, de l'Equateur ; tous ses demi diamètres sont alors des quarts de Méridien ; tous les petits cercles, dont P est le centre commun, sont des paralleles au grand cercle dont P est le pole.

Pour trouver plus aisément les demi-diamètres de tous les autres cercles qu'on voudra représenter, on a élevé au milieu F du cercle PC perpendiculaire à PB, & au milieu R de FC, les droites FG, RI, perpendiculaires à PC ; voici l'usage de ce demi-cercle.

PROBLEME I.

La distance de deux points dans le ciel étant donnée, décrire tous les cercles grands ou petits, dont ces deux points sont les poles ?

POur décrire un cercle, il faut en avoir le centre & le demi-diamètre. Chaque demi-diamètre PB ou PD peut servir d'échelle, en allant du centre à la circonférence. Le centre P de cet instrument peut toujours représenter un des deux points donnés. Sa circonférence BCD

représentera le grand cercle ; & toutes les autres circonférences, les petits cercles dont P est le pole. Si l'on a un autre point du ciel, comme Z, éloigné du pole P d'un certain nombre de degrés, par exemple, de 23°, il faut prendre sur le rayon PB le point marqué 23°, & compter de ce point à droite & à gauche 90°, pour avoir le demi-diamètre du grand cercle dont Z est le pole. On aura à main droite de P vers D, le point marqué 67, complément de 23° ; & à main gauche, en descendant sur le quart de cercle BC, l'autre complément 113° de 23°. Attachez un fil ou une regle au point C le plus bas du Planisphére, & appliquez ce fil ou cette regle à ces deux complémens. Le fil coupera GF en deux points, dont la distance sera le demi-diamètre du grand cercle qu'on veut tracer. Si vous voulez décrire un petit cercle, dont la distance à son pole Z soit connue, par exemple, de 75°, vous compterez de part & d'autre 75° au lieu de 90°, & vous aurez sur GF deux points dont l'intervalle vous donnera le demi-diamètre du petit cercle.

Ayant le demi-diamètre du cercle que l'on veut tracer, on transportera sur un grand papier la distance PZ des deux poles, égale précisément à celle qu'ils ont dans le Planisphére, & la distance P 67 sur la même ligne (Fig. 83), ainsi que le demi diamètre trouvé, pour avoir son centre C. Le cercle décrit du centre C, avec le demi-diamètre C 67 sera le cercle requis. Fig. 83.

Cette méthode est générale pour décrire sur un plan tous les cercles de la sphére dont on connoit l'un des deux poles. Elle n'a qu'un inconvénient, c'est que la ligne FG du Planisphére n'est pas toujours assez grande pour contenir tout le demi-diamètre requis. Dans ce cas, la ligne RI donnera le quart du diamètre ; & en doublant l'intervalle trouvé sur RI, on aura le demi-diamètre. Si RI prolongée n'est pas assez longue, on prendra une autre ligne entre R & C, exactement au milieu de RC, & elle donnera la huitieme partie du diamètre, & par conséquent le quadruple de cet intervalle sera le demi-diamètre requis.

Ce demi-diamètre sera souvent plus grand que l'ouverture du compas ordinaire. Il faut alors employer le compas à verge, ou un fil bien tendu, ce qui ne donnera pas des opérations fort exactes.

Enfin lorsqu'on voit que le demi-diamètre devient presque infini, le cercle requis n'a point de centre, & l'on doit regarder sa circonférence comme une ligne droite perpendiculaire à BP au point par où cette circonférence doit passer.

PROBLEME II.

Faire passer un cercle par deux points donnés dans le Planisphére ?

Fig. 82. & 84. SI ces points sont tous deux dans l'un des demi-diamètres du Planisphére, comme Z & P, ou dans son prolongement, le grand cercle est tout tracé ; c'est le cercle PB. S'ils sont sur deux demi-diamètres différens, comme en Z & S, il faut tracer les deux grands cercles dont Z & S sont les poles, en prenant leurs centres & leurs circonférences sur les lignes prolongées PZ & PS respectivement. Les intersections de ces deux grands cercles seront les poles du cercle qui doit passer par les deux points donnés Z & S, puisqu'elles seront éloignées de 90° de leurs poles Z & S. Menez une droite de l'une de ces intersections au pole P, & comptez de P en Q le complément de la distance du pole commun P à cette intersection. Vous aurez trois points, Z, Q, S, par où vous ferez passer le cercle requis Z Q S, selon la méthode commune, ou bien vous chercherez le demi-diamètre CQ, CZ ou CS de ce cercle, que vous décrirez du centre C, comme dans le Probléme I.

PROBLEME III.

Trouver la valeur de l'arc ZS que l'on vient de tracer ?

TRacez avec le demi-diamètre PB du Planisphére le demi-cercle BE E'D (Fig. 84.) Menez du pole K de l'arc ZS, par les extrémités Z & S, les droites KZE, KZE' jusques à la rencontre de la demi-circonférence. L'arc EE' donnera la valeur de l'arc ZS. Fig. 84.

COROLLAIRE.

De là suit la maniere de mesurer un angle mixtiligne PZS. Décrivez le grand cercle KX dont Z est le pole, & prolongez l'arc ZS jusqu'à la rencontre X du cercle KX. Les droites ZX, ZP, prolongées en D' & D, donneront la mesure DD' de l'arc AX du grand cercle ou de l'angle PZS.

PROBLEME IV.

Résoudre tous les cas de la Trigonométrie sphérique par le seul Planisphère ?

I. Cas.

Les trois côtés d'un triangle sphérique ZPS étant donnés, trouver les angles ?

PLacez au centre du Planisphére (Fig. 84.) le plus petit ZP des trois côtés donnés. Cherchez par le Probl. I. le grand cercle KX dont Z est le pole, & le petit cercle SL dont Z est aussi le pole, & dont la distance à ce pole est égale à l'arc donné SZ. Ce petit cercle coupera en quelque point S, celui dont P est le pole, & qui en est éloigné

de la valeur PS du ttoisieme côté donné. Faites passer un grand cercle ZS par les deux points trouvés Z & S, selon la méthode du Probléme II. L'angle rectiligne ZPS sera la projection d'un des angles sphériques requis, & vous mesurerez les deux autres angles par le corollaire précédent.

Exemple.

Le côté PZ *est de* 40°, PS *de* 50°, *&* ZS *de* 71°. *On demande les angles ?*

Prenez sur le Planisphére PZ de 40°, & comptez à droite
Fig. 83 & 84. & à gauche du point Z, la distance de 71°. Vous trouverez à main droite 71—40, c'est à dire 31°; & à main gauche 71+40, ou 111°, sur le quart de cercle BC du Planisphére. Le fil, ou la regle appliquée du point C le plus bas, vous donnera sur GF le demi-diamètre du petit cercle qui doit passer par le point L marqué 31°; à droite de P, & dont le centre doit se trouver sur la ligne PZ. Ce petit cercle LS coupera celui dont le pole est P, & qui en est éloigné de 50° dans un point S, qui vous donnera l'angle ZPS de 110°.

Pour avoir l'autre côté ZS, il faut chercher les deux grands cercles dont Z & S sont les poles. L'une de leurs intersections sera un point K. Menez par ce point & par le centre P la droite KPQ. Prenez PQ, complément de PK, & faites passer un cercle par les trois points donnés Z, Q & S. Ce cercle coupera le grand cercle KX en quelque point X, & l'angle rectiligne AZX donnera dans l'arc DD la mesure de l'angle sphérique PZS.

II. Cas.

Deux côtés étant donnés avec l'angle compris, trouver le reste ?

Faites l'angle rectiligne ZPS égal à l'angle donné. Prenez PZ, PS, égaux aux deux côtés donnés, & tracez

par les deux points Z & S l'arc de grand cercle ZS, lequel étant continué en X, vous donnera par le corollaire précédent, la valeur de l'angle ſphérique PZS. On aura par la même méthode, l'angle ZSP ; & par le Probléme III., la valeur de l'arc ZS.

III. Cas.

Un côté étant donné avec les deux angles adjacents, trouver le reſte ?

Prenez dans le Planiſphére le côté donné PZ avec l'un des deux angles adjacens ZPS ; décrivez le grand cercle KAX dont Z eſt le pole. Prenez l'arc DD' égal au ſecond angle PZS. Faites paſſer un grand cercle par les points Z & X, ſelon la méthode du Probléme II. Ce grand cercle ZS coupera le côté PS en quelque point S. Vous aurez donc PS qu'il faut meſurer ſur l'échelle du Planiſphére, l'angle ZSP comme dans le premier cas, & l'arc ZS par le Probléme III.

IV. Cas.

Deux côtés étant donnés avec un angle oppoſé à l'un des deux, trouver le reſte ?

Prenez PZ égal à l'un des côtés donnés, & faites l'angle PZS égal à celui qui eſt oppoſé à l'autre côté donné PS. Décrivez le grand cercle AX dont Z eſt le pole. Il coupera la ligne ZX en quelque point X. Faites paſſer un grand cercle par les points Z & X. Il coupera le parallele éloigné du pole P de la quantité PS, en quelque point S ; & vous aurez le triangle ZPS, dont vous meſurerez les angles & la baſe comme ci-devant.

V. Cas.

Deux angles étant donnés avec un côté opposé à l'un des deux, trouver le reste ?

Changez ce triangle en un autre, dont les deux côtés soient supplémens des deux angles donnés, & dont l'angle opposé soit supplément du côté opposé à l'un des deux angles. Vous le résoudrez par le quatrieme Cas.

VI. Cas.

Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés ?

Changez ce triangle en un autre dont les trois côtés soient les supplémens des angles opposés. Les angles seront supplémens des côtés opposés, & vous les trouverez comme dans le premier cas.

Projection Ortographique.

Elle suppose l'œil à une distance infinie. Tous les cercles grands ou petits, perpendiculaires au plan de projection, y sont représentés par des lignes droites, & leurs distances se mesurent sur la circonférence du cercle de projection. Les cercles obliques au cercle de projection se représentent par des Ellipses. Cette projection a fait naître le *Quartier sphérique* qui est entre les mains des Marins. C'est ordinairement le quart de la projection ortographique de plusieurs cercles de la sphére sur le plan d'un Méridien. On l'inscrit dans un quarré, dont deux côtés divisés par des transversales, servent à distinguer les minutes du quart de cercle, en étendant jusqu'à ces divi-
Fig. 85. sions le fil attaché au centre du Quartier. (fig. 85.)

Les Ellipses ou ovales du Quartier sphérique représentent les Méridiens ou les azimuths ; & le point où elles se

réunissent, est le pole du monde, ou le Zénith, ou tout autre pole qui se trouve dans la circonférence d'un Méridien. Tous les demi-diamètres sont de grands cercles perpendiculaires au Méridien ou à l'azimuth, & toutes les lignes droites paralleles entr'elles sont de petits cercles pareillement perpendiculaires au plan de projection.

On ne donne ordinairement au Quartier sphérique que l'étendue d'un quart de cercle; mais pour en rendre l'usage plus commode, il seroit mieux de l'aggrandir au moins jusqu'à renfermer les deux tropiques, comme le conseille Mr. de Radouai. La forme de cet ouvrage nous a obligés de reduire extrêmement le modele que nous en donnons dans la figure 85. On en trouve de gravés beaucoup plus en grand. C'est une regle générale pour toutes les projections & autres opérations graphiques, qu'on ne sçauroit y employer des figures tracées trop en grand ; plus elles seront tracées sur une grande échelle, plus elles donneront de précision dans la résolution des Problémes.

Il y a des Problémes d'Astronomie que l'on résoud fort aisément & avec assez d'exactitude par le moyen du Quartier sphérique ; on en résoud même plusieurs par la seule inspection. Son plus grand défaut consiste en ce que les degrés deviennent trop petits en s'éloignant du centre de la projection, ensorte qu'on ne peut plus les distinguer aux extrêmités.

Le Planisphére s'étend à un beaucoup plus grand nombre de Problémes, mais on y est souvent arrêté par la longueur excessive de certains diamètres. Ces grandes ouvertures de compas ne sont pas susceptibles d'une certaine précision. On ne peut guères les éviter qu'en se servant d'un petit Planisphére dont les divisions ne seroient pas assez sensibles.

La projection gnomonique est préférable aux deux autres ; elle n'exige qu'une regle, un compas & un quart de cercle bien gradué.

Ces projections sont très-utiles pour vérifier les calculs

aſtronomiques. On peut y employer tantôt les unes, tantôt les autres, ſelon les occurrences : nous en allons donner des exemples dans les Problémes ſuivans.

PROBLEME I.

La longitude du Soleil ètant donnèe, trouver ſa déclinaiſon & ſon aſcenſion droite ?

CE Probléme ſe réſoud par la ſeule inſpection ſur le Quartier ſphérique. Le centre C repréſente le premier point du Belier ou de la Balance ; la ligne CE l'Ecliptique, dans laquelle on compte les trois premiers ſignes en allant de C en E, les trois ſuivans de E en C, les trois autres de C en E, & les trois derniers de E en C. Prenez ſur cette ligne le lieu du Soleil ; le parallele qui paſſe par ce point, déterminera ſur le cercle CA la déclinaiſon du Soleil ; & le Méridien, qui paſſe par le même point, déterminera ſur CB l'aſcenſion droite qu'il faudra compter comme la longitude de C en E & de E en C pour les ſix premiers ſignes, & enſuite de C en E & de E en C pour les ſix autres. On la réduira en heures & minutes, en la comptant ſur le Tropique, où 15 degrés valent une heure, & chaque degré 4 minutes.

Exemple I.

Le Soleil ètant au 27^e^ degré du Taureau, on demande ſa declinaiſon & ſon aſcenſion droite ?

Comptez de C vers E 57°, parceque le 27e degré du
Fig. 85. Taureau eſt éloigné du commencement du Belier, de 57°. Le parallele qui paſſe par ce point, donnera ſur le cercle de 6 heures CA, la déclinaiſon du Soleil $19^\circ \frac{1}{2}$; & le Méridien qui paſſe par le même point, donnera ſur CB l'aſcenſion droite 55°.

Exemple 2.

Le Soleil étant au 3^e^ degré du Lion, on demande sa déclinaison & son ascension droite?

Le Lion est le 4^e^ signe, & vaut 120°; donc le 3^e^ degré est 123°. Comptez de C en E 3 signes ou 90°, & de E vers C 33°. Le parallele de ce point donnera sur CA la déclinaison $19\frac{1}{2}$, & sur CB l'ascension droite qu'il faut compter dans le même sens que la longitude, d'abord 90° de C en B, & ensuite 35° de B en C, en tout 125°.

PROBLEME II.

L'ascension droite du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & sa longitude?

CE Probléme se résoud encore par la seule inspection sur le Quartier sphérique. L'ascension droite se compte en degrés sur l'Equateur de C en B, & en heures & minutes sur le tropique. Voyez le point où le cercle de l'ascension droite coupe l'Ecliptique CE. Ce point vous donnera la longitude du Soleil; & le parallele qui passe par ce point, déterminera sur la ligne CA de 6 heures la déclinaison du Soleil.

Exemple 1.

L'ascension droite du Soleil est 55°, on demande sa déclinaison & sa longitude?

Prenez de C vers B le 55^e^ Méridien, qui est marqué 35 dans le Quartier sphérique. Ce Méridien coupe l'Ecliptique CE au 57^e^ degré, depuis le Belier qui commence au centre C. Donc la longitude du Soleil est 1 signe 27°, c'est-à-dire, 27° du Taureau. Le parallele qui passe par ce

point, rencontre la ligne de 6 heures CA, ou le Colure des Equinoxes, entre 19° & 20°, presque au milieu; la déclinaison du Soleil est donc $19^{\circ} \frac{1}{2}$.

Exemple 2.

L'ascension droite du Soleil est 125°, on demande sa déclinaison & sa longitude?

L'Equateur CB du Quartier ne contient que 90°, mais il peut représenter les quatre parties de l'Equateur en cette maniere. Le Soleil a parcouru en ascension droite 90 + 35 degrés, qui font 125°. Il est donc dans le Méridien marqué 35, & ce Méridien coupe l'Ecliptique dans le même point où il la coupoit dans l'exemple précédent. Mais la longitude du Soleil qui étoit dans le premier exemple 57°, est ici 90 + 33, complément de 57; c'est-à-dire, que le Soleil a parcouru sur l'Ecliptique depuis le Belier C, 123° qui valent 4 signes & 3°. Il est donc dans le 3^e^ degré du Lion; sa déclinaison est la même que ci-devant $19^{\circ} \frac{1}{2}$, Nord.

PROBLEME III.

La hauteur du pole & la déclinaison du Soleil étant données, trouver son amplitude ortive ou occase, & l'heure de son lever ou de son coucher?

CE Probléme se résoud encore presque par la seule inspection dans le Quartier sphérique; car ayant tendu le fil sur la hauteur du pole, en comptant du pole A vers F, ce fil représentera l'horison; & le point où il coupera le parallele de déclinaison, marquera l'amplitude qu'il faudra mesurer sur l'Ecliptique CE, ou sur le cercle de 6 heures CA, en faisant tourner le fil comme un compas autour du centre sur CE ou sur CA qui servent d'échelle dans cet instrument. La même intersection du fil ou de l'horison avec le cercle de déclinaison donnera l'heure du

lever ou du coucher du Soleil, avant ou après 6 heures; car le Méridien qui passe par ce point, détermine cette heure dans le Tropique. Le lever sera avant 6 heures, sous la latitude Nord dans les signes Septentrionaux, & après dans les signes Méridionaux; c'est tout le contraire pour le coucher.

Exemple 1.

Soit la hauteur du pole Nord 50°, & la déclinaison Nord du Soleil 19°. On demande l'amplitude, & l'heure du lever & du coucher du Soleil?

Tendez le fil CF sur le 50e degré, en comptant de A vers F. Ce fil représentera l'horison; le parallele 19 de la déclinaison coupera ce fil dans un point par où passe le 6e Méridien après 4 heures, ou le 9e avant 5 heures. Les distances de ces Méridiens sont d'un degré qui vaut 4 minutes de tems. Donc le Soleil se leve 1 heure 36 minutes avant 6 heures, & se couche 1 heure 36 minutes après 6 heures. Il faudroit prendre l'heure trouvée du lever pour celle du coucher & réciproquement, si la déclinaison étoit Sud, la latitude étant Nord, ou si la déclinaison étant Nord, la latitude étoit Sud.

Si l'on fait tourner ce fil autour du centre jusqu'au cercle CA de 6 heures, on trouvera l'amplitude ortive & occase de 30°.

Exemple 2.

La hauteur du pole est de 40°. Nord, & la déclinaison Nord 20°, on demande l'heure du lever & l'amplitude du Soleil?

Le fil appliqué au 40e degré, coupe le parallele 20 dans un point par où passe le 3e Méridien avant 5 heures. Donc le Soleil se leve 1 heure 12 minutes avant 6 heures, & se couche 1 heure 12 minutes après 6 heures.

Ce fil circulant autour du centre marque sur CA 26° $\frac{1}{2}$, par le point qui étoit sur cette intersection du parallele avec l'horison.

Il seroit à propos de faire couler ce fil dans une tête d'épingle que l'on pût arrêter au point qu'on auroit trouvé.

PROBLEME IV.

L'amplitude du Soleil étant donnée avec sa déclinaison, trouver la hauteur du pole & le tems du lever ou du coucher de cet astre ?

LE Quartier sphérique est encore ici fort commode. Prenez avec un compas ou avec le fil & la tête d'épingle l'amplitude donnée de C vers A ; faites tourner ce fil ou le compas autour du centre C jusqu'à la rencontre du parallele de déclinaison. La pointe du compas, ou la tête d'épingle, donnera l'heure du lever avant ou après 6 heures ; & le fil tendu jusqu'au Méridien, marquera *la hauteur du pole*.

Exemple 1.

La déclinaison du Soleil étant 19°, *& son amplitude* 30°, *l'une & l'autre Nord, on demande la hauteur du pole, & l'heure du lever ou du coucher du Soleil ?*

Le compas ou le fil appliqué au centre & au 30^e^ degré de CA, viendra rencontrer le parallele de 19° au 9^e^ Méridien avant 5 heures. Donc le Soleil s'est levé ce jour-là 1 heure 36 minutes avant 6 heures, & il s'est couché à 7 heures 36 minutes. Le fil étant tendu sur ce point rencontrera par son prolongement le Méridien AB au point marqué 50 ; ce qui donne la latitude de 50°.

Exemple 2.

La déclinaiſon du Soleil étant de 20°, & ſon amplitude 26° $\frac{1}{2}$, on demande la hauteur du pole & l'heure du lever ou du coucher du Soleil ?

Le fil ou le compas appliqué à 26° $\frac{1}{2}$ du cercle CA de 6 heures, vient en tournant rencontrer le parallele 20° au point où paſſe le 3ᵉ Méridien avant 5 heures. Donc le Soleil ſe couche à 7^h 12′, ſi l'amplitude eſt Nord.

En étendant le fil juſqu'au Méridien AB, il tombe ſur la hauteur du pole 40°.

PROBLEME V.

La hauteur du pole étant donnée, avec le tems du lever ou du coucher du Soleil, trouver ſon amplitude & ſa déclinaiſon ?

LA ſolution de ce Probléme, par le Quartier ſphérique, n'eſt pas plus difficile que celle des précédens. Tendez le fil ſur la hauteur du pole; il repréſentera l'horiſon. Voyez le point où ce fil coupe le cercle horaire du lever ou du coucher du Soleil. La diſtance du centre à ce point, ſera l'amplitude; & le parallele qui paſſe par ce point, donnera la déclinaiſon du Soleil.

Exemple.

La hauteur du pole eſt de 50°. Le Soleil ſe leve 1 heure 36 minutes avant ou apres 6 heures. On demande ſon amplitude & ſa déclinaiſon ?

Tendez le fil ſur le point marqué 50° dans le Méridien BA. Le cercle horaire éloigné de 6 heures de la quantité 1 heure 36 minutes coupera ce fil dans un point qui vous donnera 30° d'amplitude & 19° de déclinaiſon.

PROBLEME VI.

L'heure du lever ou du coucher du Soleil étant donnée avec sa déclinaison trouver l'amplitude & la hauteur du pole ?

TEndez le fil sur l'intersection du cercle horaire avec le parallele de déclinaison ; il vous donnera sur AB la hauteur du pole ; & la distance du centre à cette intersection sera l'amplitude.

Exemple.

Le Soleil s'est couché à 7 heures 12 minutes, sa déclinaison étant de 20° Nord. Ce parallele coupe le cercle horaire de 7 heures 12 minutes dans un point éloigné du centre de 26° ½ ; & le fil tendu sur ce point, rencontre AB à la hauteur du pole 40°.

PROBLEME VII.

L'amplitude du Soleil étant donnée avec le tems de son lever ou de son coucher, trouver sa déclinaison & la hauteur du pole ?

Exemple.

L'Amplitude est de 30°, le Soleil se couche à 7 heures 36 minutes. Je prends 30° de C vers A, & j'arrête à cette distance la tête d'épingle. Cette tête en circulant rencontre le cercle horaire du coucher du Soleil 1 heure 36 minutes après 6 heures, dans un point par où passe le parallele de déclinaison 19°, & le fil tendu sur ce point rencontre le Méridien AB à 50° qui est la hauteur du pole.

PROBLEME

PROBLEME VIII.

La latitude étant donnée avec la déclinaiſon du Soleil, trouver le commencement de l'aurore & la fin du crépuſcule ?

TEndez le fil ſur la latitude en comptant de A vers B, pour repréſenter l'horiſon. Prenez avec un compas de C vers A, 18° pour tracer avec cette ouverture ſous l'horiſon une ligne parallele à l'horiſon. Ce ſera l'almicantarath où commence l'aurore & finit le crépuſcule. Voyez le point où cette ligne coupe le parallele de la déclinaiſon du Soleil. Le Méridien qui paſſe par ce point vous donnera le commencement de l'aurore & la fin du crépuſcule.

Exemple.

A quelle heure commence l'aurore à 50° de latitude & 20° de déclinaiſon, l'une & l'autre de même eſpèce ?

Le compas ouvert à 18° tracera ſous le fil tendu à 50° une ligne parallele à ce fil, qui rencontrera le parallele 20° de déclinaiſon dans un point par où paſſe le cercle horaire éloigné de minuit d'une heure $\frac{1}{3}$. Par conſéquent l'aurore commence à 1 heure 20 minutes après minuit, & le crépuſcule finit 1 heure 20 minutes avant minuit.

PROBLEME IX.

La latitude étant donnée, avec la hauteur & la déclinaiſon du Soleil, trouver l'heure de l'obſervation ?

TEndez le fil ſur la latitude, il repréſentera l'horiſon. Prenez avec un compas de C vers A, la hauteur du Soleil. Tracez avec cette ouverture une ligne parallele au

fil, & voyez quel est le point où cette ligne coupe le parallele de la déclinaison. Le cercle horaire qui passe par ce point donnera l'heure cherchée.

Exemple.

A 60° de latitude Nord & au solstice d'été ou d'hiver, la hauteur du Soleil n'étant que de 2° 30′. on demande l'heure?

Tendez le fil sur la latitude, & avec l'ouverture de 2° 30′. tracez en été au dessus du fil, & en hiver au dessous, une ligne parallele à ce fil. Cette ligne rencontrera le tropique dans un point par où passe le cercle horaire de 2h 4′, ou de 10h moins 4′, si elle est tracée en dessous du fil; & si on la trace au dessus, elle rencontrera le tropique dans le cercle horaire de 3h 14′ ou de 9h moins 14′. On trace l'almicantarath du Soleil au dessous du fil en hiver, parce que le tropique du Capricorne étant du côté du Pole Sud, le point A devient en ce cas le Pole Sud; & la latitude étant Nord, le dessus de l'horison est du côté opposé à ce pole, c'est-à-dire au dessous du fil.

Si la hauteur du Soleil étoit fort grande dans la même latitude, par exemple de 49° $\frac{1}{2}$ au solstice d'été, il faudroit prolonger le tropique bien au de-là du Quartier sphérique, pour pouvoir le rencontrer. Pour y suppléer, on tourne le fil de l'autre côté, ou bien on place une regle au centre & à la hauteur du pole marquée dans un parallélogramme attenant au Quartier sphérique, & traçant une ligne parallele à cette regle avec l'ouverture de 49° $\frac{1}{2}$, elle coupera le tropique dans un point par où passe le cercle horaire d'une heure & demie & un peu plus.

PROBLEME X.

La latitude, la déclinaiſon du Soleil & ſa hauteur étant données, trouver ſon angle azimuthal?

PRenez le pole A du Quartier ſphérique pour le Zénith. Tous les cercles horaires deviendront des Azimuths ; & le fil tendu ſur le degré de la latitude repréſentera l'Equateur. Prenez avec un compas ſur le côté CA la déclinaiſon du Soleil, & tracez avec cette ouverture un parallele au fil. Ce parallele de déclinaiſon coupera le parallele de la hauteur dans un point, par où paſſera l'azimuth du Soleil.

Exemple.

A 60° de latitude Nord, & au ſolſtice d'été, la hauteur du Soleil étant de 49° $\frac{1}{2}$, on demande ſon azimuth?

Tendez le fil ſur la latitude 60°. Prenez avec un compas la diſtance de l'Equateur au tropique 23° $\frac{1}{2}$ preſque, & tracez avec cette ouverture une ligne parallele au fil en deſſus de l'Equateur. Elle coupera l'almicantarath de 49° $\frac{1}{2}$ dans un point par où paſſe l'azimuth marqué 36 ſur l'horiſon CB. Par conſéquent l'angle azimuthal eſt de 36°.

PROBLEME XI.

La déclinaiſon du Soleil étant donnée avec ſa hauteur & ſon azimuth, trouver la hauteur du pole?

PRenez avec un compas l'ouverture de la déclinaiſon du Soleil. Voyez le point où le parallele de la hauteur du Soleil coupe ſon azimuth ; & de ce point, comme centre avec l'ouverture de la déclinaiſon du Soleil, décrivez un demi-cercle occulte. Tendez le fil de maniere qu'il touche

ce demi-cercle, sans le couper. Il marquera sur le Méridien AB la latitude demandée.

Exemple.

Au solstice d'été, la hauteur du Soleil étant de 49° ½ & l'angle azimuthal de 36°, on demande la hauteur du Pole ?

Avec l'ouverture de 23° ½ prenant pour centre le point où l'almicantarath de 49° ½ coupe le 36e azimuth, vous décrirez un demi-cercle du côté de l'horison CB, & appliquant le fil sur cette demi-circonférence, de maniere qu'il la touche sans la couper, il marquera sur AB la latitude de 60°.

Ce fil devient alors l'Equateur, qui est au dessous du tropique du Cancer en latitude Nord.

PROBLEME XII.

La déclinaison du Soleil, sa hauteur & l'heure étant données, trouver la latitude ?

LE point A n'est plus le Zénith, mais le pole du monde. Prenez sur CA la hauteur du Soleil ; & avec cette ouverture, décrivez un cercle dont le centre soit au point où le parallele de déclinaison coupe le cercle horaire. Tendez le fil sur la circonférence de ce cercle, de maniere qu'il ne fasse que la toucher sans la couper. Il marquera la latitude sur le Méridien AB.

REMARQUE.

Pour s'exercer à la pratique de ces Problémes, on peut prendre les exemples que j'en ai donné dans le Chap. IV. On ne trouvera jamais avec le Quartier sphérique la même exactitude que donne le calcul. Mais on en approchera, sur-

tout si le Quartier sphérique est bien décrit, & si l'on trace avec un crayon bien fin les paralleles & les cercles que nous avons prescrits.

Ce sont là à peu près tous les Problémes que l'on peut facilement résoudre avec le Quartier sphérique. Dans ceux qui suivent, nous aurons recours d'abord à la projection stéréographique, & ensuite à la projection gnomonique.

PROBLEME XIII.

Deux hauteurs d'un astre dont la déclinaison est connue, étant données, avec le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure & la latitude?

PRenez dans le Planisphére (Fig. 82.) deux Méridiens PS, PS′ (Fig. 86) qui forment entr'eux l'angle horaire donné; & dont les longueurs soient égales à la distance de l'astre au pole. Avec les distances au Zénith ZS, ZS′, vous trouverez par la méthode générale les demi-diamètres de deux petits cercles, dont les centres seront sur les Méridiens prolongés PS, PS′, & qui se couperont au Zénith Z. La distance PZ du Zénith au pole vous donnera le complément de la latitude, & l'angle ZPS′ sera l'angle horaire de la premiere observation.

Exemple.

Le Soleil ayant 20° de déclinaison Nord, on a trouvé sa hauteur de 38°. le matin, & une heure ½ après de 50°, on demande l'heure & la latitude?

PS & PS′ sont ici de 70°, l'angle SPS′ de 22° ½. La premiere distance au Zénith S′Z est de 52°, & la seconde SZ de 40°. Prenez donc depuis le point 70 du Planisphére, 40° de part & d'autre. Vous aurez 30° entre P & B, & 110° sur BC. Le fil appliqué à ces deux points, vous donnera sur FG, le demi-diamètre d'un cercle dont le centre

doit être sur PS, & dont la circonférence doit passer par le point où le parallele de 30° coupe ce cercle horaire. Prenez de même sur PB du Planisphére 52° de part & d'autre de 70°. Vous aurez 18° d'un côté, & 122° sur BC. Le fil tendu sur ces deux points donnera sur FG, le demi-diamètre d'un cercle dont le centre doit être sur PS', & la circonférence dans le parallele de 18°. L'intersection Z des deux cercles donnera le Zénith, la distance PZ du pole au Zénith, & l'angle horaire ZPS ou ZPS'. La latitude sera dans cet exemple 52°, & l'heure avant midi ZPS', 8h½, & ZPS, 10 heures.

Si les deux hauteurs sont égales, l'une avant & l'autre après midi, les deux petits cercles seront égaux, & l'on aura plus promptement la latitude.

PROBLEME XIV.

Deux hauteurs du Soleil étant données, avec sa déclinaison & la différence des azimuths correspondans, trouver la latitude ?

LE centre P du Planisphére représentera le Zénith. Les deux hauteurs donneront les distances PS, PS' du Soleil au Zénith (Fig. 86.) & l'angle SPS' sera la différence des azimuths. La déclinaison du Soleil donnera sur le Planisphére le demi-diamètre des deux cercles dont les centres doivent être sur PS & PS', & dont les circonférences doivent se couper au pole. Ces deux cercles seront égaux, si la déclinaison n'a pas varié dans l'intervalle des deux observations.

Exemple.

Le Soleil ayant 20° de déclinaiſon Nord, on a trouvé ſa hauteur le matin 38°, & quelque tems après 50°; la différence des azimuths entre les deux obſervations, a été de 24° ½. On demande la latitude?

P étant le Zénith, on fera SPS′ de 24° ½; SP de 40° & S′P de 52°. Avec le complément de la déclinaiſon, 70°, on cherchera ſur le Planiſphére le demi-diamètre des deux petits cercles dont les centres doivent ſe trouver ſur PS & PS′. Ils ſe couperont dans un point Z, qui repréſentera le pole, & la diſtance ZP ſera de 38°, complément de la latitude.

PROBLEME XV.

La hauteur de deux Etoiles connues ayant été obſervée dans le même inſtant, trouver la latitude & l'angle horaire?

L'Angle SPS′ (même Figure) ſera la différence des aſcenſions droites des deux Etoiles. SP, S′P ſeront leurs diſtances au pole. Par le moyen de leurs diſtances au Zénith SZ, S′Z, on trouvera ſur le Planiſphére les demi-diamètres des petits cercles dont les centres ſont ſur SP & S′P, & qui doivent ſe couper au Zénith. On aura donc la diſtance PZ du pole au Zénith, & l'angle horaire ZPS, ou ZPS′, dont la différence avec l'aſcenſion droite du Soleil donnera l'heure ſolaire.

Exemple

Deux Observateurs prennent dans le même instant la hauteur du grand chien Sirius, *& celle du petit chien* Procyon. *Ils trouvent la distance de* Sirius *au Zénith de* 61° $\frac{1}{3}$, *& celle de* Procyon *de* 38°. *Le catalogue des Etoiles donne la distance* S'P *de* Procyon *au pole* 84° 11', *& celle de* Sirius SP 106° $\frac{1}{2}$. *La difference* SPS' *de leurs ascensions droites est de* 13°. *On demande l'heure & la latitude?*

Les deux distances au pole SZ, S'Z donneront, comme dans les deux derniers Problémes, les demi diamètres de deux cercles qui se couperont au Zénith. On aura par ce moyen PZ de 46° $\frac{1}{3}$, complément de la latitude.

Résolution des Problémes astronomiques par la projection gnomonique.

PROBLEME I. (Fig. 87.)

L'ascension droite du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & sa longitude?

SOit P le pole du monde & le centre de la projection; PC le Colure des Equinoxes, & ΠPE perpendiculaire à PC, le Colure des solstices. Faites l'angle PCΠ de 23° 28', Π sera le pole de l'Ecliptique. Elevez CE, perpendiculaire à CΠ, & ES perpendiculaire à PE: ES sera une partie de l'Ecliptique. Faites l'angle CPS égal à l'ascension droite donnée. S sera le lieu du Soleil dans l'Ecliptique, & SP la projection de sa distance au pole du monde. Portez CE sur le prolongement EA du Colure des solstices, & menez AS. L'angle EAS mesurera l'éloignement du Soleil au Colure des solstices, & par conséquent sa longitude comptée depuis là. Décrivez du centre P avec l'ouverture PS, l'arc SS'; & joignez CS', l'angle PCS' sera la distance du Soleil au pole.

Exemple.

L'ascension droite CPS *du Soleil est de* 145°. *On demande sa longitude & sa déclinaison ?*

En traçant exactement cette figure, on trouvera EAS de 52° ½, & par conséquent la longitude du Soleil sera 142° ½, ou 4ſ 22° ½. On trouvera encore PCS′ de 76°, distance du Soleil au pole.

PROBLEME II. (Fig. 87.)

La longitude du Soleil étant donnée, trouver sa déclinaison & son ascension droite ?

PCn est l'obliquité de l'Ecliptique, EAS la longitude depuis le solstice. On aura donc l'ascension droite SPC, & le complément PCS′ de la déclinaison.

PROBLEME III. (Fig. 87.)

La déclinaison du Soleil étant donnée, trouver sa longitude & son ascension droite ?

FAites l'angle PCS′ égal à la distance du Soleil au pole; & avec l'ouverture PS′ décrivez du centre P l'arc S′S jusqu'à l'Ecliptique SE. Vous aurez la longitude EAS, & l'ascension droite CPS.

PROBLEME IV. (Fig. 88.)

La hauteur du pole étant donnée avec la déclinaison du Soleil, trouver son amplitude & l'heure de son lever & de son coucher ?

SOit P le pole, CP le Méridien de 6 heures. Faites l'angle PCZ égal à la distance du Zénith au pole. PZ perpendiculaire à PC, sera le Méridien qu'il faut prolonger.

Elevez CH, perpendiculaire à CZ, & HS, perpendiculaire au Méridien PH. Faites l'angle PCS′ égal à la distance du Soleil au pole. Du centre P, avec l'ouverture PS′, décrivez l'arc S′S qui coupe l'horison HS en S. Menez le cercle horaire PS qui donnera l'heure SPC du lever ou du coucher du Soleil avant ou après 6 heures. Portez HC de H en A, & menez AS. L'angle HAS donnera l'azimuth du Soleil, complément de son amplitude.

Exemple.

La hauteur du pole est 52°, la déclinaison du Soleil Nord 20°, on demande l'amplitude & l'heure de son lever ?

Faites l'angle PCZ de 38°, complément de la hauteur du pole, ou PCH de 52°, PCS′ de 70°, distance du Soleil au pole. Décrivez du centre P l'arc SS′ qui, rencontre l'horison HS en S ; vous trouverez SPC de 151° 43′ pour l'heure du lever, ou 28° 17′ avant 6 heures. Menez SA ; vous aurez l'angle SAH, complément de l'amplitude 32° 44′.

PROBLEME V. (Fig. 89.)

La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil & sa hauteur, trouver l'heure ?

SOit PZ perpendiculaire à PA. Faites l'angle PAZ égal à la distance du Zénith au pole ; PAS′ égal à la distance du Soleil au pole ; ZAS″ égal à la distance du Soleil au Zénith, & AS″ égal à AS′. Du centre P avec l'ouverture PS′, & du centre Z avec l'ouverture ZS″, décrivez deux arcs qui se couperont en S, & menez ZS. L'angle ZPS sera l'angle horaire requis.

Exemple.

La latitude est 43° $\frac{1}{3}$, la déclinaison du Soleil 19° $\frac{2}{3}$ & sa hauteur 20°, trouver l'heure ?

Faites PAZ, complément de 43° $\frac{1}{3}$; PAS′, complément de

$19^\circ\frac{2}{3}$, & ZAS'', complément de 20°, AS'' égal à AS'. Décrivez du centre P avec l'ouverture PS', l'arc S'S, & du centre Z avec l'ouverture ZS'', l'arc S''S, & menez PS. Vous aurez l'angle horaire ZPS de 80° 40'.

PROBLEME VI. (Fig. 89.)

La latitude étant donnée avec la déclinaison & la hauteur du Soleil, trouver l'angle azimuthal?

PLacez le Zénith au centre P, & suivez le procédé du Probléme précédent.

Exemple.

La latitude est $43^\circ\frac{1}{3}$, *la déclinaison* $19^\circ\frac{2}{3}$, *& la hauteur du Soleil* 20°, *on demande l'azimnth ?*

Faites les angles PAZ de $46^\circ\frac{2}{3}$, ZAS' de $70^\circ\frac{1}{3}$, AS''= AS'. Du centre P avec PS', & du centre Z avec ZS'', décrivez deux arcs qui se couperont en S. SPS' sera l'angle azimuthal de 81° 26', P étant le Zénith.

PROBLEME VII. (Fig. 90.)

La hauteur du Soleil, sa déclinaison & son azimuth étant donnés, trouver la latitude ?

C'Est le quatrieme Cas de la Trigonométrie sphérique, par la projection gnomonique. Placez le Soleil au centre S. Menez SA perpendiculaire à SZ; faites l'angle SAZ complément de la hauteur du Soleil, & SAP' complément de sa déclinaison. AE, perpendiculaire à AZ, donne l'horison EF, dont Z est le pole. Portez EA sur E*a*, & faitez E*a*F égal à l'angle azimuthal. Joignez ZF, & du centre S avec l'ouverture SP', décrivez l'arc PP', qui rencontrera ZF prolongée au pole P. Vous aurez le trirngle ZPS, dont vous mesurerez la base PZ par le second Probléme général,

Exemple.

La hauteur du Soleil est de 20°, son angle azimuthal de 33°, sa déclinaison 19° $\frac{2}{3}$.

Faites SAZ de 70°, SAP′ de 70° $\frac{1}{3}$, AE perpendiculaire à AZ, & EF A ZE. Portez EA sur E*a*; faites E*a*F de 33°; menez ZF indéfinie; & du centre S avec l'ouverture SP′, décrivez l'arc P′P qui rencontrera ZF prolongée en P. Joignez ZP, abaissez sur ZP la perpendiculaire SO, & sur SO le demi-diamètre SL. Portez OL sur OS prolongée en *l*. L'angle Z*l*P donnera le supplément de la distance du Zénith ou pole 46° $\frac{2}{3}$, parceque E*a*F n'est que le supplément de l'angle au Zénith du côté du pole.

PROBLEME VIII. (Fig. 90.)

La latitude étant donnée avec la déclinaison du Soleil & son azimuth, trouver l'heure?

LE centre S est ici le pole, Z le Zénith, & P le Soleil. Faites SAE égal à la hauteur du pole, SAZ son complément, ou distance du Zénith au pole. EF perpendiculaire au Méridien ZE, sera l'horison. Portez EA sur E*a* & faites E*a*F égal à l'angle azimuthal. Joignez ZF, faites SAP′ égal à la distance du Soleil au pole; & avec l'ouverture SP′, décrivez l'arc P′P, vous aurez le point P; & menant PS, l'angle horaire, ZSP ou son supplément PSE.

PROBLEME IX. (Fig. 90.)

La hauteur du pole etant donnée, la hauteur du Soleil & son azimuth, trouver l'heure?

LE centre S est encore ici le pole, ZAS la distance du Zénith au pole, & SAE, la hauteur du pole; EF l'horison, E*a*F l'angle azimuthal. Ménez FZ, abaissez SO

perpendiculaire à FZ, & faites SL parallele à FZ. Portez OL sur Ol, faites l'angle ZlP égal à la distance du Soleil au Zénith, & menez SP, l'angle ZSP sera l'angle horaire requis.

PROBLEME X. (Fig. 90.)

La hauteur du pole, la hauteur du Soleil & son angle horaire étant donnés, trouver son azimuth?

LE centre S devient ici le Zénith & Z le pole. Faites SAE egal à la hauteur du pole, & SAZ à son complément. EF sera l'équateur, & E*a*F l'angle horaire. Menez FZ, faitez SAP′ égal à la distance du Soleil au Zénith S. L'arc P′P donnera le supplément ZSP de l'angle azimuthal.

PROBLEME XI. (Fig. 91 & 92.)

La hauteur d'un astre, son azimuth & son angle horaire étant donnés, trouver la latitude?

C'Est ici le cinquieme Cas; il faut changer le triangle ZPS (Fig. 91.) en un autre EFG, dont les angles soient supplémens des côtés opposés, & les côtés, supplémens des angles opposés, c'est-à-dire, que l'angle E soit supplément de la distance SZ de l'astre au Zénith, le côté FG supplément de l'angle horaire P, & le côté FE supplément de l'angle azimuthal Z. Lorsqu'on aura construit le triangle, on trouvera son angle F, supplément de la distance du Zénith au pole PZ.

Placez F au centre de la projection (Fig. 92.), faites l'angle FAE égal à EF, supplément de PZS, c'est-à-dire, égal à l'angle azimuthal. Elevez AH perpendiculaire à AE, & *H*L à EH; c'est le grand cercle dont E est le pole. Portez HA sur H*a*, & faites l'angle H*a*L égal à l'angle

E, c'est-à-dire, au supplément de la distance SZ de l'astre au Zénith, & menez EL. Faites l'angle FAG′ égal à FG, ou au supplément de l'angle horaire P; & du centre F avec l'ouverture FG′, décrivez l'arc G′G″, qui coupera EL en quelque point G″. L'angle EFG″ sera le supplément de la distance SZ du pole au Zénith.

Exemple.

A 3h $\frac{1}{2}$ après midi on a trouvé la hauteur du Soleil 38° $\frac{2}{3}$ & son azimuth 72°, on demande la latitude?

L'angle horaire P étant de 52° $\frac{1}{2}$, son supplément FG est de 127° $\frac{1}{2}$. La hauteur du Soleil étant 38° $\frac{2}{3}$, sa distance SZ au Zénith est 51° $\frac{1}{3}$, & son supplément E est 128° $\frac{2}{3}$. L'azimuth 72° étant supplément de l'angle PZS, est égal au côté opposé EF.

Décrivons le cercle de projection, & plaçons F au centre. Faisons FAE de 72°; AH perpendiculaire à AE, H*a*L égal au supplément de l'angle E 51° $\frac{1}{3}$. Faisons FAG′ égal au supplément de FG, 52° $\frac{1}{2}$. Décrivez avec FG′ l'arc G′G″, qui coupera EL en G″. L'angle EFG″ de 38° $\frac{1}{2}$ sera la distance du Zénith au pole, au lieu de son supplément, parceque au lieu du côté FG & de l'angle E obtus, nous avons emploïé leurs supplémens aigus, selon la méthode expliquée ci-dessus (sixieme cas de la Projection gnomonique). On aura donc la latitude 51° $\frac{1}{2}$, complément de EFG″.

Tous les autres Problémes les plus compliqués peuvent se résoudre de la même maniere par quelques-uns des six cas de la projection gnomonique. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, pour éviter la multiplicité des Figures.

FIN.

Fautes survenues dans l'Impression.

Page 2, *ligne* 11, *semblables*, *lisez égaux.*

P. 22, à la marge, Fig. 7, on n'a pas gravé dans cette Figure la lettre B qui doit être en bas entre 90 & *p.*

P. 51, *lig.* 17, I & m, *lis.* i & M.

P. 59, *lig.* 5, ZV, la lettre Z ne se trouve pas dans la Fig. 13, elle doit être placée entre E & 69 au bout de la ligne ponctuée.

P. 65, *lig.* 7, 6 jours, *lis.* 5 jours.

P. 72, zero, *lis.* *.

P. 89, Fig. 17. On n'a point marqué dans cette Figure le centre C où se coupent les deux miroirs AB, EF, ni la lettre S à l'extrêmité supérieure de la ligne ponctuée & oblique à l'horison.

P. 91, *lig* 9, l'angle ZAS, il faut imaginer (Fig. 19.) la lettre Z dans le prolongement du fil à plomb Gc au dessus de A.

P. 198, Fig. 41, il faut imaginer ou tracer un arc de P à I'.

P. 227, *lig.* 1 de la seconde Regle, *variable*, *lis. invariable.*

P. 231, *ligne* 4 de l'exemple, on *s'oppose*, *lis.* on *s'expose*; *lig.* 11, 10°, *lis.* 10'.

P. 249, *lig.* 25, *à 2' près*, *lis. à 2" près.*

P. 265, *lig.* 2, *prise*, *lis. mise.*

P. 271, *lig.* 20 & 26. Les nombres 2 & 6 doivent être abaissés d'une ligne pour répondre à la pendule A ou aux pendules A & B.

P. 294, Fig. 57, il faut écrire *l* entre Z & L dans cette Figure, au point où le vrai Méridien de la Lune coupe son azimuth, comme dans la Fig. 56.

P. 307, à la marge, Fig. 6, *lis.* 60.

P. 308, *lig.* 13, EP*l*, *lis.* EP*e.*

P. 318, *lig.* 1. *l'angle* A *sera*, *lis. l'angle a sera.*

Les autres fautes s'apperçoivent aisément. On a oublié dans le Quartier sphérique, Fig. 85, la représentation du Fil, & la lettre F qui le termine entre A & E.

E, c'eſt-à-dire, au ſupplément de la diſtance SZ de l'aſtre au Zénith, & menez EL. Faites l'angle FAG′ égal à FG, ou au ſupplément de l'angle horaire P; & du centre F avec l'ouverture FG′, décrivez l'arc G′G″, qui coupera EL en quelque point G″. L'angle EFG″ ſera le ſupplément de la diſtance SZ du pole au Zénith.

Exemple.

A 3h $\frac{1}{2}$ après midi on a trouvé la hauteur du Soleil 38° $\frac{2}{3}$ & ſon azimuth 72°, on demande la latitude?

L'angle horaire P étant de 52° $\frac{1}{2}$, ſon ſupplément FG eſt de 127° $\frac{1}{2}$. La hauteur du Soleil étant 38° $\frac{2}{3}$, ſa diſtance SZ au Zénith eſt 51° $\frac{1}{3}$, & ſon ſupplément E eſt 128° $\frac{2}{3}$. L'azimuth 72° étant ſupplément de l'angle PZS, eſt égal au côté oppoſé EF.

Décrivons le cercle de projection, & plaçons F au centre. Faiſons FAE de 72°; AH perpendiculaire à AE, H*a*L égal au ſupplément de l'angle E 51° $\frac{1}{3}$. Faiſons FAG′ égal au ſupplément de FG, 52° $\frac{1}{2}$. Décrivez avec FG′ l'arc G′G″, qui coupera EL en G″. L'angle EFG″ de 38° $\frac{1}{2}$ ſera la diſtance du Zénith au pole, au lieu de ſon ſupplément, parceque au lieu du côté FG & de l'angle E obtus, nous avons emplpoyé leurs ſupplémens aigus, ſelon la méthode expliquée ci-deſſus (ſixieme cas de la Projection gnomonique). On aura donc la latitude 51° $\frac{1}{2}$, complément de EFG″.

Tous les autres Problémes les plus compliqués peuvent ſe réſoudre de la même maniere par quelques-uns des ſix cas de la projection gnomonique. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, pour éviter la multiplicité des Figures.

FIN.

Fautes ſurvenues dans l'Impreſſion.

Page 2, *ligne* 11, *ſemblables*, *liſez égaux*.

P. 22, à la marge, Fig. 7, on n'a pas gravé dans cette Figure la lettre B qui doit être en bas entre 90 & *p*.

P. 51, *lig.* 17, I & m, *liſ.* i & M.

P. 59, *lig.* 5, ZV, la lettre Z ne ſe trouve pas dans la Fig. 13, elle doit être placée entre E & 69 au bout de la ligne ponctuée.

P. 65, *lig.* 7, 6 jours, *liſ.* 5 jours.

P. 72, zero, *liſ.* *.

P. 89, Fig. 17. On n'a point marqué dans cette Figure le centre C où ſe coupent les deux miroirs AB, EF, ni la lettre S à l'extrêmité ſupérieure de la ligne ponctuée & oblique à l'horiſon.

P. 91, *lig* 9, l'angle ZAS, il faut imaginer (Fig. 19.) la lettre Z dans le prolongement du fil à plomb Gc au deſſus de A.

P. 198, Fig. 41, il faut imaginer ou tracer un arc de P à I'.

P. 227, *lig.* 1 de la ſeconde Regle, *variable*, *liſ. invariable*.

P. 231, *ligne* 4 de l'exemple, on *s'oppoſe*, *liſ.* on *s'expoſe*; *lig.* 11, 10°, *liſ.* 10'.

P. 249, *lig.* 25, *à* 2' *près*, *liſ. à* 2'' *près*.

P. 265, *lig.* 2, *priſe*, *liſ. miſe*.

P. 271, *lig.* 20 & 26. Les nombres 2 & 6 doivent être abaiſſés d'une ligne pour répondre à la pendule A ou aux pendules A & B.

P. 294, Fig. 57, il faut écrire *l* entre Z & L dans cette Figure, au point où le vrai Méridien de la Lune coupe ſon azimuth, comme dans la Fig. 56.

P. 307, à la marge, Fig. 6, *liſ.* 60.

P. 308, *lig.* 13, EP*l*, *liſ.* EP*e*.

P. 318, *lig.* 1. *l'angle* A *ſera*, *liſ. l'angle a ſera*.

Les autres fautes s'apperçoivent aiſément. On a oublié dans le Quartier ſphérique, Fig. 85, la repréſentation du Fil, & la lettre F qui le termine entre A & E.

TABLES
ASTRONOMIQUES.

TABLES
ASTRONOMIQUES.

TABLE I.

De l'Equation du tems, ou du tems qu'il faut ajouter au tems vrai, ou qu'il en faut soustraire, pour avoir le tems moyen à fort peu près, pour chaque degré de longitude du Soleil.

Argument. Longitude du Soleil.

Degrés.	♈	♉	♊	♋	♌	♍	♎	♏	♐	♑	♒	♓
	±	—	∓	+	+	±	—	—	—	∓	+	+
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
0	7 35	1 10	3 53	1 10	5 54	2 19	7 37	15 29	13 29	1 9	11 29	14 19
1	7 16	1 24	3 49	1 24	5 55	2 3	7 57	15 36	13 12	0 39	11 46	14 13
2	6 57	1 37	3 45	1 37	5 57	1 46	8 18	15 43	12 55	0 10	12 3	14 6
3	6 39	1 49	3 40	1 50	5 57	1 29	8 39	15 49	12 37	+ 0 20	12 18	13 59
4	6 20	2 1	3 34	2 4	5 57	1 12	8 59	15 54	12 18	0 49	12 33	13 51
5	6 1	2 12	3 28	2 17	5 57	0 54	9 19	15 58	11 59	1 18	12 46	13 42
6	5 42	2 23	3 21	2 30	5 56	0 36	9 39	16 2	11 39	1 47	12 59	13 33
7	5 23	2 34	3 14	2 43	5 54	0 18	9 58	16 5	11 18	2 16	13 12	13 23
8	5 4	2 44	3 7	2 55	5 51	— 0 1	10 17	16 7	10 57	2 45	13 24	13 13
9	4 45	2 53	2 59	3 8	5 48	0 20	10 38	16 8	10 34	3 13	13 34	13 2
10	4 26	3 2	2 50	3 20	5 44	0 39	10 55	16 9	10 12	3 42	13 44	12 50
11	4 7	3 10	2 41	3 32	5 40	0 58	11 13	16 9	9 47	4 10	13 53	12 38
12	3 49	3 18	2 31	3 43	5 35	1 18	11 31	16 8	9 25	4 37	14 2	12 26
13	3 30	3 25	2 21	3 54	5 29	1 38	11 49	16 6	9 0	5 4	14 9	12 13
14	3 12	3 32	2 11	4 5	5 22	1 59	12 6	16 3	8 35	5 31	14 16	11 59
15	2 54	3 38	2 0	4 16	5 16	2 19	12 23	16 0	8 10	5 58	14 22	11 45
16	2 35	3 43	1 49	4 26	5 8	2 40	12 39	15 55	7 44	6 24	14 27	11 31
17	2 17	3 48	1 38	4 35	4 59	3 1	12 55	15 50	7 18	6 49	14 31	11 16
18	2 0	3 52	1 26	4 44	4 50	3 22	13 10	15 44	6 51	7 14	14 35	11 1
19	1 42	3 55	1 14	4 53	4 41	3 43	13 25	15 37	6 24	7 39	14 38	10 45
20	1 25	3 58	1 2	5 1	4 31	4 4	13 39	15 30	5 57	8 3	14 39	10 29
21	1 8	4 0	0 50	5 9	4 20	4 25	13 53	15 21	5 29	8 26	14 40	10 13
22	0 51	4 2	0 37	5 16	4 9	4 47	14 6	15 12	5 0	8 49	14 41	9 56
23	0 35	4 3	0 24	5 23	3 57	5 8	14 18	15 2	4 32	9 12	14 41	9 40
24	0 19	4 3	0 11	5 29	3 44	5 29	14 30	14 51	4 4	9 33	14 40	9 23
25	0 3	4 3	+ 0 3	5 35	3 31	5 51	14 42	14 39	3 35	9 54	14 38	9 5
26	— 0 13	4 2	0 16	5 40	3 18	6 12	14 52	14 27	3 6	10 15	14 36	8 48
27	0 28	4 1	0 30	5 44	3 4	6 33	15 2	14 13	2 37	10 34	14 33	8 30
28	0 42	3 59	0 43	5 48	2 49	6 54	15 12	13 59	2 7	10 54	14 29	8 12
29	0 56	3 56	0 57	5 51	2 34	7 15	15 21	13 44	1 38	11 12	14 24	7 53
30	1 10	3 53	1 10	5 54	2 19	7 37	15 29	13 29	1 9	11 19	14 29	7 35

Changez les signes + en — & — en + pour convertir le tems moyen en tems vrai.

Epoques des longitudes moyennes du Soleil pour les années Gregoriennes.

Années Gregoriennes.	Long.moy.☉ S.	°	'	"	Long.Ap.☉ S.	°	'	"
omm. 1700	9	10	7	24	3	7	44	25
1710	9	9	42	25	3	7	54	55
iſſext. 1720	9	10	16	33	3	8	5	25
1730	9	9	51	34	3	8	15	55
iſſext. 1740	9	10	25	43	3	8	26	25
1750	9	10	0	44	3	8	36	55
iſſext. 1760	9	10	34	52	3	8	47	25
1761	9	10	20	32	3	8	48	28
1762	9	10	6	13	3	8	49	31
1763	9	9	51	53	3	8	50	34
iſſext. 1764	9	10	36	42	3	8	51	37
1765	9	10	22	22	3	8	52	40
1766	9	10	8	3	3	8	53	43
1767	9	9	53	43	3	8	54	46
iſſext. 1768	9	10	38	32	3	8	55	49
1769	9	10	24	12	3	8	56	52
1770	9	10	9	53	3	8	57	55
1771	9	9	55	33	3	8	58	58
Biſſext. 1772	9	10	40	22	3	9	0	1
1773	9	10	26	2	3	9	1	4
1774	9	10	11	43	3	9	2	7
1775	9	9	57	23	3	9	3	10
Biſſext. 1776	9	10	42	12	3	9	4	13
1777	9	10	27	52	3	9	5	16
1778	9	10	13	32	3	9	6	19
1779	9	9	59	13	3	9	7	22
Biſſext. 1780	9	10	44	2	3	9	8	25

Années Gregoriennes.	Long.moy.☉ S.	°	'	"	Long.Ap.☉ S.	°	'	"
1781	9	10	29	42	3	9	9	28
1782	9	10	15	23	3	9	10	31
1783	9	10	1	3	3	9	11	34
Biſſext. 1784	9	10	45	52	3	9	12	37
1785	9	10	31	32	3	9	13	40
1786	9	10	17	13	3	9	14	43
1787	9	10	2	53	3	9	15	46
Biſſext. 1788	9	10	47	42	3	9	16	49
1789	9	10	33	22	3	9	17	52
1790	9	10	19	3	3	9	18	55
1791	9	10	4	43	3	9	19	58
Biſſext. 1792	9	10	49	32	3	9	21	1
1793	9	10	35	12	3	9	22	4
1794	9	10	20	52	3	9	23	7
1795	9	10	6	33	3	9	24	10
Biſſext. 1796	9	10	51	21	3	9	25	13
1797	9	10	37	2	3	9	26	16
1798	9	10	22	42	3	9	27	19
1799	9	10	8	23	3	9	28	22
Comm. 1800	9	9	54	3	3	9	29	25
1801	9	9	39	43	3	9	30	28
1802	9	9	25	24	3	9	31	31
1803	9	9	11	4	3	9	32	34
Biſſext. 1804	9	9	55	53	3	9	33	37

Mouvement moyen du Soleil pour les années completes.

Années complétes.	Mouv. moy. ☉ S.	°	'	"	M. de l'Ap. S.	°	'	"
1	11	29	45	40	0	0	1	3
2	11	29	31	21	0	0	2	6
3	11	29	17	1	0	0	3	9
Biſſextile 4	0	0	1	50	0	0	4	12
5	11	29	47	30	0	0	5	15
6	11	29	33	11	0	0	6	18
7	11	29	18	51	0	0	7	21
Biſſextile 8	0	0	3	40	0	0	8	24
9	11	29	49	20	0	0	9	27
10	11	29	35	1	0	0	10	30
11	11	29	20	41	0	0	11	33
Biſſextile 12	0	0	5	30	0	0	12	36

Années complétes.	Mouv. moy. ☉ S.	°	'	"	M. de l'Ap. S.	°	'	"
Biſſext. 20	0	0	9	9	0	0	21	0
B. 40	0	0	18	19	0	0	42	0
B. 60	0	0	27	28	0	1	3	0
B. 80	0	0	36	37	0	1	24	0
B. 100	0	0	45	47	0	1	45	0
B. 500	0	3	48	53	0	8	45	0
B. 1000	0	7	37	47	0	17	30	0
B. 2000	0	15	15	33	1	5	0	0

TABLE III.

Mouvement moyen du Soleil pour chaque jour des années communes.

Jours.	JANVIER. Mouv. moy. du Soleil. S.	°	'	"	Ap. ⊙ "	FEVRIER. Mouv. moy. du ⊙ S.	°	'	"	Ap. ⊙ "	MARS. Mouv. moy. du ⊙ S.	°	'	"	Ap. ⊙ "	AVRIL. Mouv. moy. du ⊙ S.	°	'	"	Ap. ⊙ "
1	0	0	59	8	0	1	1	32	27	5	1	29	8	19	10	2	29	41	38	16
2	0	1	58	17	0	1	2	31	35	5	2	0	7	28	10	3	0	40	47	16
3	0	2	57	25	0	1	3	30	43	6	2	1	6	36	11	3	1	39	55	16
4	0	3	56	33	1	1	4	29	52	6	2	2	5	45	11	3	2	39	3	17
5	0	4	55	42	1	1	5	29	0	6	2	3	4	53	11	3	3	38	11	17
6	0	5	54	50	1	1	6	28	8	6	2	4	4	2	11	3	4	37	20	17
7	0	6	53	58	1	1	7	27	17	6	2	5	3	10	11	3	5	36	28	17
8	0	7	53	7	1	1	8	26	25	7	2	6	2	18	12	3	6	35	36	17
9	0	8	52	15	1	1	9	25	33	7	2	7	1	26	12	3	7	34	45	18
10	0	9	51	23	2	1	10	24	42	7	2	8	0	35	12	3	8	33	53	18
11	0	10	50	32	2	1	11	23	50	7	2	8	59	43	12	3	9	33	1	18
12	0	11	49	40	2	1	12	22	58	7	2	9	58	51	12	3	10	32	10	18
13	0	12	48	48	2	1	13	22	7	7	2	10	58	0	13	3	11	31	18	18
14	0	13	47	57	2	1	14	21	15	8	2	11	57	8	13	3	12	30	26	18
15	0	14	47	5	3	1	15	20	23	8	2	12	56	16	13	3	13	29	34	19
16	0	15	46	13	3	1	16	19	32	8	2	13	55	25	13	3	14	28	43	19
17	0	16	45	22	3	1	17	18	40	8	2	14	54	33	13	3	15	27	51	19
18	0	17	44	30	3	1	18	17	48	8	2	15	53	41	13	3	16	27	0	19
19	0	18	43	38	3	1	19	16	57	8	2	16	52	50	14	3	17	26	8	19
20	0	19	42	47	3	1	20	16	5	8	2	17	51	58	14	3	18	25	16	19
21	0	20	41	55	4	1	21	15	13	9	2	18	51	6	14	3	19	24	25	20
22	0	21	41	3	4	1	22	14	22	9	2	19	50	14	14	3	20	23	33	20
23	0	22	40	12	4	1	23	13	30	9	2	20	49	23	14	3	21	22	41	20
24	0	23	39	20	4	1	24	12	38	9	2	21	48	31	14	3	22	21	50	20
25	0	24	38	28	4	1	25	11	47	9	2	22	47	40	15	3	23	20	58	20
26	0	25	37	37	4	1	26	10	55	10	2	23	46	48	15	3	24	20	6	20
27	0	26	36	45	5	1	27	10	3	10	2	24	45	56	15	3	25	19	15	21
28	0	27	35	53	5	1	28	9	11	10	2	25	45	5	15	3	26	18	23	21
29	0	28	35	2	5						2	26	44	13	15	3	27	17	31	21
30	0	29	34	10	5						2	27	43	21	16	3	28	16	40	21
31	1	0	33	18							2	28	42	30	16					

Dans les années Biſſextiles, il faut ôter un jour de la date propoſée dans les mois de Janvier & de Février : par exemple, ſi vous voulez calculer le lieu du Soleil pour le 3, il faut prendre le mouvement pour le 2.

TABLE III.

Mouvement moyen du Soleil pour chaque Jour de l'année.

Jours.	MAI. Mouv. moy. du ☉ S.	°	′	″	Ap. ☉ ″	JUIN. Mouv. moy. du ☉ S.	°	′	″	Ap. ☉ ″	JUILLET. Mouv. moy. du ☉ S.	°	′	″	Ap. ☉ ″	AOÛT. Mouv. moy. du ☉ S.	°	′	″	Ap. ☉ ″
1	3	29	15	48	21	4	29	49	6	26	5	29	23	16	31	6	29	56	34	37
2	4	0	14	56	21	5	0	48	15	26	6	0	22	24	31	7	0	55	42	37
3	4	1	14	5	21	5	1	47	23	27	6	1	21	33	32	7	1	54	51	37
4	4	2	13	13	22	5	2	46	31	27	6	2	20	41	32	7	2	53	59	38
5	4	3	12	21	22	5	3	45	39	27	6	3	19	49	32	7	3	53	7	38
6	4	4	11	30	22	5	4	44	48	27	6	4	18	58	32	7	4	52	16	38
7	4	5	10	38	22	5	5	43	56	27	6	5	18	6	32	7	5	51	24	38
8	4	6	9	46	22	5	6	43	4	27	6	6	17	14	33	7	6	50	32	38
9	4	7	8	55	22	5	7	42	13	28	6	7	16	22	33	7	7	49	41	38
10	4	8	8	3	23	5	8	41	21	28	6	8	15	31	33	7	8	48	49	39
11	4	19	7	11	23	5	9	40	29	28	6	9	14	39	33	7	9	47	57	39
12	4	10	6	20	23	5	10	39	38	28	6	10	13	47	33	7	10	47	6	39
13	4	11	5	28	23	5	11	38	46	28	6	11	12	56	34	7	11	46	14	39
14	4	12	4	36	23	5	12	37	55	29	6	12	12	4	34	7	12	45	22	39
15	4	13	3	45	23	5	13	37	3	29	6	13	11	12	34	7	13	44	31	40
16	4	14	2	53	24	5	14	36	11	29	6	14	10	21	34	7	14	43	39	40
17	4	15	2	1	24	5	15	35	20	29	6	15	9	29	34	7	15	42	47	40
18	4	16	1	10	24	5	16	34	28	29	6	16	8	37	34	7	16	41	56	40
19	4	17	0	18	24	5	17	33	36	29	6	17	7	46	35	7	17	41	4	40
20	4	17	59	26	24	5	18	32	45	30	6	18	6	54	35	7	18	40	12	40
21	4	18	58	35	25	5	19	31	53	30	6	19	6	2	35	7	19	39	21	41
22	4	19	57	43	25	5	20	31	1	30	6	20	5	11	35	7	20	38	29	41
23	4	20	56	51	25	5	21	30	10	30	6	21	4	19	35	7	21	37	37	41
24	4	21	56	0	25	5	22	29	18	30	6	22	3	28	36	7	22	36	46	41
25	4	22	55	8	25	5	23	28	26	31	6	23	2	36	36	7	23	35	54	41
26	4	23	54	16	25	5	24	27	35	31	6	24	1	44	36	7	24	35	2	42
27	4	24	53	25	26	5	25	26	43	31	6	25	0	52	36	7	25	34	11	42
28	4	25	52	33	26	5	26	25	51	31	6	26	0	1	36	7	26	33	19	42
29	4	26	51	41	26	5	27	25	0	31	6	26	59	9	36	7	27	32	27	42
30	4	27	50	50	26	5	28	24	8	31	6	27	58	17	37	7	28	31	36	42
31	4	28	49	58	26						6	28	57	26	37	7	29	30	44	42

TABLE III.

Mouvement moyen du Soleil pour chaque Jour de l'année.

Jours.	SEPTEMBRE.					OCTOBRE.					NOVEMBRE.					DECEMBRE.				
	Mouv. moy. du ⊙				Ap. ⊙	Mouv. moy. du ⊙				Ap. ⊙	Mouv. moyen du ⊙				Ap. ⊙	Mouv. moyen du ⊙				Ap. ⊙
	S.	°	'	"	"	S.	°	'	"	"	S.	°	'	"	"	S.	°	'	"	' "
1	8	0	29	52	42	9	0	4	2	47	10	0	37	20	53	11	0	11	30	58
2	8	1	29	1	43	9	1	3	10	48	10	1	36	29	53	11	1	10	38	58
3	8	2	28	9	43	9	2	2	19	48	10	2	35	37	53	11	2	9	47	58
4	8	3	27	17	43	9	3	1	27	48	10	3	34	45	53	11	3	8	55	58
5	8	4	26	26	43	9	4	0	35	48	10	4	33	54	53	11	4	8	3	59
6	8	5	25	34	43	9	4	59	44	48	10	5	33	2	54	11	5	7	12	59
7	8	6	24	42	43	9	5	58	52	48	10	6	32	10	54	11	6	6	20	59
8	8	7	23	51	44	9	6	58	0	49	10	7	31	19	54	11	7	5	28	59
9	8	8	22	59	44	9	7	57	8	49	10	8	30	27	54	11	8	4	37	59
10	8	9	22	7	44	9	8	56	17	49	10	9	29	35	54	11	9	3	45	59
11	8	10	21	16	44	9	9	55	25	49	10	10	28	44	54	11	10	2	53	1 0
12	8	11	20	24	44	9	10	54	34	49	10	11	27	52	54	11	11	2	2	1 0
13	8	12	19	32	44	9	11	53	42	49	10	12	27	0	55	11	12	1	10	1 0
14	8	13	18	41	45	9	12	52	50	50	10	13	26	9	55	11	13	0	18	1 0
15	8	14	17	49	45	9	13	51	59	50	10	14	25	17	55	11	13	59	27	1 0
16	8	15	16	57	45	9	14	51	7	50	10	15	24	25	55	11	14	58	35	1 0
17	8	16	16	5	45	9	15	50	15	50	10	16	23	34	55	11	15	57	43	1 1
18	8	17	15	14	45	9	16	49	24	50	10	17	22	42	55	11	16	56	52	1 1
19	8	18	14	22	45	9	17	48	32	50	10	18	21	50	56	11	17	56	0	1 1
20	8	19	13	30	46	9	18	47	40	51	10	19	20	59	56	11	18	55	8	1 1
21	8	20	12	39	46	9	19	46	49	51	10	20	20	7	56	11	19	54	17	1 1
22	8	21	11	47	46	9	20	45	57	51	10	21	19	15	56	11	20	53	25	1 1
23	8	22	10	55	46	9	21	45	5	51	10	22	18	24	56	11	21	52	33	1 2
24	8	23	10	4	46	9	22	44	14	51	10	23	17	32	56	11	22	51	42	1 2
25	8	24	9	12	46	9	23	43	22	51	10	24	16	40	57	11	23	50	50	1 2
26	8	25	8	20	47	9	24	42	30	52	10	25	15	49	57	11	24	49	58	1 2
27	8	26	7	29	47	9	25	41	39	52	10	26	14	57	57	11	25	49	7	1 2
28	8	27	6	37	47	9	26	40	47	52	10	27	14	5	57	11	26	48	15	1 2
29	8	28	5	45	47	9	27	39	55	52	10	28	13	13	57	11	27	47	23	1 3
30	8	29	4	54	47	9	28	39	4	52	10	29	12	22	57	11	28	46	32	1 3
31						9	29	38	12	53						11	29	45	40	1 3

TABLE IV.

Mouvement du Soleil pour les Heures, Minutes & Secondes.

HEURES.

Heures.	Mouv. du Soleil. ′	″
1	2	28
2	4	56
3	7	24
4	9	51
5	12	19
6	14	47
7	17	15
8	19	43
9	22	11
10	24	38
11	27	6
12	29	34
13	32	2
14	34	30
15	36	58
16	39	25
17	41	53
18	44	21
19	46	49
20	49	17
21	51	45
22	54	13
23	56	40
24	59	8

MINUTES.

Minutes.	Mouvem. du Soleil. ′	″	Minutes.	Mouvem. du Soleil. ′	″
1	0	2,5	31	1	16,4
2	0	4,9	32	1	18,8
3	0	7,4	33	1	21,3
4	0	9,9	34	1	23,8
5	0	12,3	35	1	26,2
6	0	14,8	36	1	28,7
7	0	17,2	37	1	31,2
8	0	19,7	38	1	33,6
9	0	22,2	39	1	36,1
10	0	24,6	40	1	38,6
11	0	27,1	41	1	41,0
12	0	29,6	42	1	43,5
13	0	32,0	43	1	46,0
14	0	34,5	44	1	48,4
15	0	37,0	45	1	50,9
16	0	39,4	46	1	53,3
17	0	41,9	47	1	55,8
18	0	44,4	48	1	58,3
19	0	46,8	49	2	0,7
20	0	49,3	50	2	3,2
21	0	51,7	51	2	5,7
22	0	54,2	52	2	8,1
23	0	56,7	53	2	10,6
24	0	59,1	54	2	13,1
25	1	1,6	55	2	15,5
26	1	4,1	56	2	18,0
27	1	6,5	57	2	20,4
28	1	9,0	58	2	22,9
29	1	11,5	59	2	25,4
30	1	13,9	60	2	27,8

SECONDES de 5 en 5.

Secondes.	Mouv. du Soleil. ″
5	0,2
10	0,4
15	0,6
20	0,8
25	1,0
30	1,2
35	1,4
40	1,6
45	1,8
50	2,1
55	2,3
60	2,5

TABLE V.

Equation du centre du Soleil.

Argument. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Degrés.	O.	differ.	I.	differ.	II.	differ.	
	—		—		—		
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	
0	0 0 0	1 59	0 56 43	1 42	1 38 58	1 1	30
1	0 1 59	1 59	0 58 25	1 41	1 39 59	0 59	29
2	0 3 58	1 58	1 0 6	1 41	1 40 58	0 57	28
3	0 5 56	1 58	1 1 47	1 40	1 41 55	0 55	27
4	0 7 54	1 58	1 3 27	1 39	1 42 50	0 54	26
5	0 9 52	1 58	1 5 6	1 38	1 43 44	0 52	25
6	0 11 50	1 58	1 6 44	1 37	1 44 36	0 50	24
7	0 13 48	1 57	1 8 21	1 36	1 45 26	0 48	23
8	0 15 45	1 57	1 9 57	1 34	1 46 14	0 46	22
9	0 17 42	1 57	1 11 31	1 33	1 47 0	0 44	21
10	0 19 39	1 57	1 13 4	1 32	1 47 44	0 42	20
11	0 21 36	1 56	1 14 36	1 30	1 48 26	0 40	19
12	0 23 32	1 56	1 16 6	1 29	1 49 6	0 38	18
13	0 25 28	1 55	1 17 35	1 27	1 49 44	0 36	17
14	0 27 23	1 55	1 19 2	1 26	1 50 20	0 35	16
15	0 29 18	1 54	1 20 28	1 25	1 50 55	0 33	15
16	0 31 12	1 54	1 21 53	1 23	1 51 28	0 31	14
17	0 33 6	1 53	1 23 16	1 22	1 51 59	0 29	13
18	0 34 59	1 53	1 24 38	1 20	1 52 28	0 27	12
19	0 36 52	1 52	1 25 58	1 19	1 52 55	0 24	11
20	0 38 44	1 51	1 27 17	1 17	1 53 19	0 22	10
21	0 40 35	1 51	1 28 34	1 16	1 53 41	0 20	9
22	0 42 26	1 50	1 29 50	1 14	1 54 1	0 18	8
23	0 44 16	1 49	1 31 4	1 13	1 54 19	0 16	7
24	0 46 5	1 49	1 32 17	1 11	1 54 35	0 15	6
25	0 47 54	1 48	1 33 28	1 9	1 54 50	0 12	5
26	0 49 42	1 47	1 34 37	1 8	1 55 2	0 10	4
27	0 51 29	1 46	1 35 45	1 6	1 55 12	0 8	3
28	0 53 15	1 45	1 36 51	1 4	1 55 20	0 6	2
29	0 54 0	1 43	1 37 55	1 3	1 55 26	0 3	1
30	0 56 43		1 38 58		1 55 29		0
	+		+		+		
	XI.		X		IX.		D.

Equation du centre du Soleil.

Argument. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Degrés.	III. ° ' "	differ. ' "	IV. ° ' "	differ. ' "	V. ° ' "	differ. ' "	
0	1 55 29	0 1	1 41 4	1 0	0 58 49	1 47	30
1	1 55 30	0 1	1 40 4	1 2	0 57 2	1 48	29
2	1 55 29	0 3	1 39 2	1 4	0 55 14	1 49	28
3	1 55 26	0 5	1 37 58	1 6	0 53 25	1 50	27
4	1 55 21	0 6	1 36 52	1 7	0 51 35	1 50	26
5	1 55 15	0 9	1 35 45	1 10	0 49 45	1 51	25
6	1 55 6	0 11	1 34 35	1 11	0 47 54	1 52	24
7	1 54 55	0 13	1 33 24	1 13	0 46 2	1 53	23
8	1 54 42	0 16	1 32 11	1 15	0 44 9	1 55	22
9	1 54 26	0 18	1 30 56	1 16	0 42 14	1 56	21
10	1 54 8	0 20	1 29 40	1 18	0 40 18	1 56	20
11	1 53 48	0 22	1 28 22	1 20	0 38 22	1 57	19
12	1 53 26	0 24	1 27 2	1 21	0 36 25	1 57	18
13	1 53 2	0 26	1 25 41	1 23	0 34 28	1 58	17
14	1 52 36	0 27	1 24 18	1 25	0 32 30	1 59	16
15	1 52 9	0 30	1 22 53	1 26	0 30 31	1 59	15
16	1 51 39	0 32	1 21 27	1 28	0 28 32	2 0	14
17	1 51 7	0 34	1 19 59	1 29	0 26 32	2 0	13
18	1 50 33	0 36	1 18 30	1 31	0 24 32	2 1	12
19	1 49 57	0 39	1 16 59	1 32	0 22 31	2 2	11
20	1 49 18	0 41	1 15 27	1 34	0 20 29	2 2	10
21	1 48 37	0 43	1 13 53	1 35	0 18 27	2 2	9
22	1 47 54	0 44	1 12 18	1 37	0 16 25	2 2	8
23	1 47 10	0 46	1 10 41	1 38	0 14 23	2 3	7
24	1 46 24	0 48	1 9 3	1 39	0 12 20	2 3	6
25	1 45 36	0 50	1 7 24	1 40	0 10 17	2 3	5
26	1 44 46	0 52	1 5 44	1 42	0 8 14	2 3	4
27	1 43 54	0 54	1 4 2	1 43	0 6 11	2 3	3
28	1 43 0	0 57	1 2 19	1 44	0 4 8	2 4	2
29	1 42 3	0 59	1 0 35	1 46	0 2 4	2 4	1
30	1 41 4		0 58 49		0 0 0		0
	+		+		+		
	VIII.		VII.		VI.		D.

TABLE VI.

Equation du tems qui répond l'Anomalie moyenne, pour changer le tems vrai en tems moyen.

Argument. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Otez. Degrés.	O.		I.		II.		III.		IV.		V.		Otez.
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	3	47	6	36	7	42	6	44	3	55	30
1	0	8	3	54	6	40	7	42	6	40	3	48	29
2	0	16	4	0	6	44	7	42	6	36	3	41	28
3	0	24	4	7	6	48	7	42	6	32	3	34	27
4	0	32	4	14	6	51	7	41	6	27	3	26	26
5	0	39	4	20	6	55	7	41	6	23	3	19	25
6	0	47	4	27	6	58	7	40	6	18	3	11	24
7	0	55	4	33	7	2	7	40	6	14	3	4	23
8	1	3	4	40	7	5	7	39	6	9	2	56	22
9	1	11	4	46	7	8	7	38	6	4	2	49	21
10	1	18	4	52	7	11	7	37	5	59	2	41	20
11	1	26	4	58	7	14	7	35	5	53	2	33	19
12	1	34	5	4	7	16	7	34	5	48	2	26	18
13	1	42	5	10	7	19	7	32	5	43	2	18	17
14	1	49	5	16	7	21	7	30	5	37	2	10	16
15	1	57	5	22	7	24	7	29	5	31	2	2	15
16	2	5	5	27	7	26	7	27	5	26	1	54	14
17	2	12	5	33	7	28	7	25	5	20	1	46	13
18	2	20	5	38	7	30	7	22	5	14	1	38	12
19	2	27	5	44	7	32	7	20	5	8	1	30	11
20	2	35	5	49	7	33	7	17	5	2	1	22	10
21	2	42	5	54	7	35	7	14	4	55	1	14	9
22	2	50	5	59	7	36	7	12	4	49	1	6	8
23	2	57	6	4	7	37	7	9	4	43	0	57	7
24	3	4	6	9	7	38	7	6	4	36	0	49	6
25	3	11	6	14	7	39	7	2	4	29	0	41	5
26	3	19	6	18	7	40	6	59	4	23	0	33	4
27	3	26	6	23	7	41	6	56	4	16	0	25	3
28	3	33	6	27	7	41	6	52	4	9	0	16	2
29	3	40	6	31	7	42	6	48	4	2	0	8	1
30	3	47	6	36	7	42	6	44	3	55	0	0	0
ajoutez	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		ajout.

Il faut changer les titres, & mettre *ajoutez* au lieu de *ôtez*, lorsqu'on connoit le tems moyen & qu'on veut trouver le tems vrai ou apparent.

TABLE VII.

Equation du tems qui répond à la longitude vraie du Soleil.

Argument. *Longitude vraie du Soleil.*

Degrés.	O. VI.		I. VII.		II. VIII.		
	Otez du tems vrai en descendant.						
	′	″	′	″	′	″	Deg.
0	0	0	8	23	8	45	30
1	0	20	8	33	8	35	29
2	0	40	8	43	8	24	28
3	0	59	8	52	8	12	27
4	1	19	9	1	8	0	26
5	1	39	9	9	7	47	25
6	1	58	9	17	7	34	24
7	2	18	9	23	7	20	23
8	2	37	9	29	7	5	22
9	2	56	9	35	6	50	21
10	3	15	9	40	6	34	20
11	3	34	9	44	6	18	19
12	3	52	9	47	6	1	18
13	4	10	9	50	5	44	17
14	4	28	9	52	5	26	16
15	4	46	9	53	5	8	15
16	5	3	9	54	4	49	14
17	5	20	9	53	4	30	13
18	5	37	9	52	4	11	12
19	5	53	9	51	3	51	11
20	6	9	9	48	3	31	10
21	6	25	9	45	3	11	9
22	6	40	9	41	2	51	8
23	6	54	9	37	2	30	7
24	7	8	9	32	2	9	6
25	7	22	9	26	1	47	5
26	7	35	9	19	1	26	4
27	6	48	9	11	1	5	3
28	8	0	6	3	0	43	2
29	8	12	8	54	0	22	1
30	8	23	8	45	0	0	0
	XI. V.		X. IV.		IX. III.		

Ajoutez au tems vrai en montant.

TABLE VIII.

Pour réduire le tems en parties de l'Equateur.

Heures	Degrés
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90
7	105
8	120
9	135
10	150
11	165
12	180
13	195
14	210
15	225
16	240
17	255
18	270
19	285
20	300
21	315
22	330
23	345
24	360

M.	Deg.	M.	M.	Deg.	M.
S.	Min.	Sec.	S.	Min.	Sec.
T.	Sec.	T.	T.	S.	Tierc.
1	0	15	31	7	45
2	0	30	32	8	0
3	0	45	33	8	15
4	1	0	34	8	30
5	1	15	35	8	45
6	1	30	36	9	0
7	1	45	37	9	15
8	2	0	38	9	30
9	2	15	39	9	45
10	2	30	40	10	0
11	2	45	41	10	15
12	3	0	42	10	30
13	3	15	43	10	45
14	3	30	44	11	0
15	3	45	45	11	15
16	4	0	46	11	30
17	4	15	47	11	45
18	4	30	48	12	0
19	4	45	49	12	15
20	5	0	50	12	30
21	5	15	51	12	45
22	5	30	52	13	0
23	5	45	53	13	15
24	6	0	54	13	30
25	6	15	55	13	45
26	6	30	56	14	0
27	6	45	57	14	15
28	7	0	58	14	30
29	7	15	59	14	45
30	7	30	60	15	0

TABLE IX.

Pour réduire en tems les parties de l'Equateur.

D. M. S.	H. ' " ‴		D. M. S.	H. ' " ‴		Degrés.	Heures.	Minutes.
1	0	4	31	2	4	70	4	40
2	0	8	32	2	8	80	5	20
3	0	12	33	2	12	90	6	0
4	0	16	34	2	16	100	6	40
5	0	20	35	2	20	110	7	20
6	0	24	36	2	24	120	8	0
7	0	28	37	2	28	130	8	40
8	0	32	38	2	32	140	9	20
9	0	36	39	2	36	150	10	0
10	0	40	40	2	40	160	10	40
11	0	44	41	2	44	170	11	20
12	0	48	42	2	48	180	12	0
13	0	52	43	2	52	190	12	40
14	0	56	44	2	56	200	13	20
15	1	0	45	3	0	210	14	0
16	1	4	46	3	4	220	14	40
17	1	8	47	3	8	230	15	20
18	1	12	48	3	12	240	16	0
19	1	16	49	3	16	250	16	40
20	1	20	50	3	20	260	17	20
21	1	24	51	3	24	270	18	0
22	1	28	52	3	28	280	18	40
23	1	32	53	3	32	290	19	20
24	1	36	54	3	36	300	20	0
25	1	40	55	3	40	310	20	40
26	1	44	56	3	44	320	21	20
27	1	48	57	3	48	330	22	0
28	1	52	58	3	52	340	22	40
29	1	56	59	3	56	350	23	20
30	2	0	60	4	0	360	24	0

TABLE X.

De l'inclinaison de l'horison de la Mer.

Elevation de l'œil au-dessus de la surface de la Mer.		Minutes d'inclinaison.
Pieds.	Pouc.	Min.
0	11	1
3	9	2
8	7	3
15	3	4
23	10	5
34	0	6
46	6	7
61	0	8
77	0	9
95	0	10
115	0	11
137	0	12
161	0	13
186	6	14
214	0	15

Voyez l'usage des Tables X & XI. pag. 85 & 86.

TABLE XI.

De la Réfraction à divers degrés de hauteur.

Hauteurs observées.	Réfract.	Distances au Zénith.
D.	Min.	D.
0	32,2	90
1	27,4	89
2	20,5	88
3	15,7	87
4	12,4	86
5	10,2	85
6	8,2	84
7	7,3	83
8	6,5	82
9	5,8	81
10	5,3	80
11	4,9	79
12	4.5	78
13	4,1	77
14	3,8	76
15	3,5	75
16	3,3	74
17	3,1	73
18	2,9	72
19	2,8	71
20	2,7	70
25	2,2	65
30	1,8	60
35	1,5	55
40	1,2	50
50	0,9	40
60	0,6	30
70	0,4	20
80	0,2	10
90	0,0	0

TABLES DE LA LUNE.

Epoques des Longitudes moyennes de la Lune, de ſon Apogée & de ſon Nœud.

Années Gregoriennes.	Long. moyenne de la Lune.				Longit. moyenne de l'Apogée.				Long. moyenne du Nœud ☊.			
	S.	°	'	"	S.	°	'	"	S	°	'	"
1700	1	10	56	12	9	26	24	30	5	17	23	11
1710	9	11	8	8	11	13	16	17	11	3	59	39
Biſſext. 1720	5	24	30	40	1	0	14	45	4	20	32	56
1730	1	24	42	36	2	17	6	32	10	7	9	24
Biſſext. 1740	10	8	5	8	4	4	5	0	3	23	42	41
1750	6	8	17	4	5	20	56	47	9	10	19	9
Biſſext. 1760	2	21	39	36	7	7	55	15	2	26	52	26
1761	7	1	2	41	8	18	35	5	2	7	32	43
1762	11	10	25	45	9	29	14	56	1	18	13	0
1763	3	19	48	50	11	9	54	46	0	28	53	17
Biſſext. 1764	8	12	22	30	0	20	41	18	0	9	30	23
1765	0	21	45	34	2	1	21	8	11	20	10	40
1766	5	1	8	39	3	12	0	59	11	0	50	57
1767	9	10	31	44	4	22	40	49	10	11	31	14
Biſſext. 1768	2	3	5	23	6	3	27	21	9	22	8	20
1769	6	12	28	28	7	14	7	11	9	2	48	37
1770	10	21	51	32	8	24	47	2	8	13	28	54
1771	3	1	14	37	10	5	26	52	7	24	9	11
Biſſext. 1772	7	23	48	17	11	16	13	24	7	4	46	17
1773	0	3	11	21	0	26	53	14	6	15	26	34
1774	4	12	34	26	2	7	23	5	5	26	6	51
1775	8	21	57	31	3	18	12	55	5	6	47	8
Biſſext. 1776	1	14	31	10	4	28	59	27	4	17	24	14
1777	5	23	54	15	6	9	39	17	3	28	4	31
1778	10	3	17	20	7	20	19	8	3	8	44	48
1779	2	12	40	24	9	0	58	58	2	19	25	5
Biſſext. 1780	7	5	14	4	10	11	45	30	2	0	2	11
1781	11	14	37	9	11	22	25	20	1	10	42	28
1782	3	24	0	13	1	3	5	11	0	21	22	45
1783	8	3	23	18	2	13	45	1	0	2	3	2

Epoques des Longitudes moyennes de la Lune, de son Apogée & de son Nœud.

Années Gregoriennes.	Long. moyenne de la Lune.				Long. moyenne de l'Apogée.				Long. moyenne du Nœud ☊.			
	S.	°	'	"	S.	°	'	"	S.	°	'	"
Bissext. 1784	0	25	56	58	3	24	31	33	11	12	40	8
1785	5	5	20	2	5	5	11	23	10	23	20	25
1786	9	14	43	7	6	15	51	14	10	4	0	42
1787	1	24	6	12	7	26	31	4	9	14	40	59
Bissext. 1788	6	16	39	51	9	7	17	36	8	25	18	5
1789	10	26	2	56	10	17	57	26	8	5	58	22
1790	3	5	26	0	11	28	37	17	7	16	38	39
1791	7	14	49	5	1	9	17	7	6	27	18	56
Bissext. 1792	0	7	22	45	2	20	3	39	6	7	56	2
1793	4	16	45	49	4	0	43	29	5	18	36	19
1794	8	26	8	54	5	11	13	20	4	29	16	36
1795	1	5	31	59	6	22	3	10	4	9	56	33
Bissext. 1796	5	28	5	38	8	2	49	42	3	20	33	59
1797	10	7	28	43	9	13	29	32	3	1	14	16
1798	2	16	51	48	10	24	9	23	2	11	54	33
1799	6	26	14	52	0	4	49	13	1	22	34	50
1800	11	5	37	57	1	15	29	3	1	3	14	7
1801	3	15	1	2	2	26	8	53	0	13	54	24
1802	7	24	24	6	4	6	48	44	11	24	34	41
1803	0	3	47	11	5	17	28	34	11	5	14	58
Bissext. 1804	4	26	20	51	6	28	15	6	10	15	52	4

Mouvement moyen de la Lune pour les Années completes.

Années complétes.	Mouvement de la Lune.				Mouvement de l'Apogée.				Mouvement du Nœud ☊.			
	S.	°	'	"	S.	°	'	"	S.	°	'	"
1	4	9	23	5	1	10	39	50	0	19	19	43
2	8	18	46	9	2	21	19	41	1	8	39	26
3	0	28	9	14	4	1	59	31	1	27	59	9
Biſſextile 4	5	20	42	54	5	12	46	3	2	17	22	3
5	10	0	5	58	6	23	25	53	3	6	41	46
6	2	9	29	3	8	4	5	44	3	26	1	29
7	6	18	52	8	9	14	45	34	4	15	21	12
Biſſextile 8	11	11	25	47	10	25	32	6	5	4	44	6
9	3	20	48	52	0	6	11	56	5	24	1	49
10	8	0	11	56	1	16	51	47	6	13	23	32
11	0	9	35	1	2	27	31	37	7	2	43	15
Biſſextile 12	5	2	8	41	4	8	18	9	7	22	6	9
Biſſext. 20	4	13	34	28	3	3	50	15	0	26	50	15
B. 40	8	27	8	56	6	7	40	30	1	23	40	30
B. 60	1	10	43	24	9	11	30	45	2	20	30	45
B. 80	5	24	17	52	0	15	21	0	3	17	21	0
B. 100	10	7	52	20	3	19	11	15	4	14	11	15
B. 500	3	9	21	40	6	5	56	15	10	10	56	15
B. 1000	6	18	43	20	0	11	52	30	8	21	52	30

Accélération du mouvement moyen de la Lune, qu'il faut ajouter à la longitude moyenne.

Années.	'	"
1500	0	27
1600	0	7
1650	0	2
1700	0	0
1750	0	2
1800	0	7
1850	0	15
1900	0	27
1950	0	42
2000	1	0

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

Années Biss.	An. comm.	JANVIER. Mouv. de la Lune. S.	°	′	″	Mouv. de l'Apogée °	′	″	Mouv. du Nœud ☊ °	′	″
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	13	10	35	0	6	41	0	3	11
3	2	0	26	21	10	0	13	22	0	6	21
4	3	1	9	31	45	0	20	3	0	9	32
5	4	1	22	42	20	0	26	44	0	12	43
6	5	2	5	52	55	0	33	25	0	15	53
7	6	2	19	3	30	0	40	6	0	19	4
8	7	3	2	14	5	0	46	47	0	22	14
9	8	3	15	24	40	0	53	29	0	25	25
10	9	3	28	35	15	1	0	10	0	28	36
11	10	4	11	45	50	1	6	51	0	31	46
12	11	4	24	56	25	1	13	32	0	34	57
13	12	5	8	7	0	1	20	13	0	38	8
14	13	5	21	17	35	1	26	54	0	41	18
15	14	6	4	28	10	1	33	35	0	44	29
16	15	6	17	38	45	1	40	16	0	47	40
17	16	7	0	49	20	1	46	57	0	50	50
18	17	7	13	59	55	1	53	38	0	54	1
19	18	7	27	10	30	2	0	19	0	57	11
20	19	8	10	21	6	2	7	0	1	0	22
21	20	8	23	31	41	2	13	41	1	3	33
22	21	9	6	42	16	2	20	22	1	6	43
23	22	9	19	52	51	2	27	4	1	9	54
24	23	10	3	3	26	2	33	45	1	13	5
25	24	10	16	14	1	2	40	26	1	16	15
26	25	10	29	24	36	2	47	7	1	19	25
27	26	11	12	53	11	2	53	48	1	22	37
28	27	11	25	45	46	3	0	29	1	25	47
29	28	0	8	56	21	3	7	10	1	28	58
30	29	0	22	6	56	3	13	51	1	32	9
31	30	1	5	17	31	3	20	32	1	35	19
	31	1	18	28	6	3	27	13	1	38	30

An. Bissext.	Ann. com.	FEVRIER. Mouv. de la Lune. S.	°	′	″	Mouv. de l'Apogée °	′	″	Mouv. du Nœud ☊ °	′	″
1	0	1	18	28	6	3	27	13	1	38	30
2	1	2	1	38	41	3	33	54	1	41	41
3	2	2	14	49	16	3	40	35	1	44	52
4	3	3	27	59	51	3	47	16	1	48	2
5	4	3	11	10	26	3	53	57	1	51	13
6	5	3	24	21	1	4	0	39	1	54	24
7	6	4	7	31	36	4	7	20	1	57	34
8	7	4	20	42	11	4	14	1	2	0	44
9	8	5	3	52	46	4	20	42	2	3	55
10	9	5	17	3	21	4	27	23	2	7	6
11	10	6	0	13	56	4	34	4	2	10	16
12	11	6	13	24	31	4	40	45	2	13	27
13	12	6	36	35	6	4	47	26	2	16	38
14	13	7	9	45	41	4	54	7	2	19	49
15	14	7	22	56	16	5	0	48	2	22	59
16	15	8	6	6	51	5	7	29	2	26	10
17	16	8	19	17	26	5	14	10	2	29	20
18	17	9	2	28	1	5	20	51	2	32	31
19	18	9	15	38	36	5	27	32	2	35	41
20	19	9	28	49	11	5	34	13	2	38	52
21	20	10	11	59	46	5	40	55	2	42	2
22	21	10	25	10	21	5	47	36	2	45	13
23	22	11	8	20	56	5	54	17	2	48	24
24	23	11	21	31	31	6	0	58	2	51	35
25	24	0	4	42	6	6	7	39	2	54	45
26	25	0	17	52	41	6	14	20	2	57	56
27	26	1	1	3	17	6	21	1	3	1	7
28	27	1	14	13	52	6	27	42	3	4	17
29	28	1	27	24	27	6	34	23	3	7	28

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

MARS.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée			Mouv. du Nœud ☊		
	S.	°	'	"	°	'	"	°	'	"
1	2	10	35	2	6	41	4	3	10	38
2	2	23	45	37	6	47	45	3	13	49
3	3	6	56	12	6	54	26	3	16	59
4	3	20	6	47	7	1	7	3	20	10
5	4	3	17	22	7	7	48	3	23	20
6	4	16	27	57	7	14	30	3	26	31
7	4	29	38	31	7	21	11	3	29	42
8	5	12	49	7	7	27	52	3	32	52
9	4	25	59	42	7	34	33	3	36	3
10	6	9	10	17	7	41	14	3	39	14
11	6	22	20	52	7	47	55	3	42	24
12	7	5	31	27	7	54	36	3	45	35
13	7	18	42	2	8	1	17	3	48	46
14	8	1	52	37	8	7	58	3	51	56
15	8	15	3	12	8	14	39	3	55	7
16	8	28	13	47	8	21	20	3	58	17
17	9	11	24	22	8	28	1	4	1	28
18	9	24	34	57	8	34	42	4	4	39
19	10	7	45	32	8	41	23	4	7	49
20	10	20	56	7	8	48	4	4	11	0
21	11	4	6	42	8	54	46	4	14	10
22	11	17	17	17	9	1	27	4	17	21
23	0	0	27	52	9	8	8	4	20	32
24	0	13	38	27	9	14	49	4	23	42
25	0	26	49	2	9	21	30	4	26	53
26	1	9	59	37	9	28	11	4	30	4
27	1	23	10	12	9	34	52	4	33	14
28	2	6	20	47	9	41	33	4	36	25
29	2	19	31	22	9	48	14	4	39	36
30	3	2	41	57	9	54	55	4	42	46
31	3	15	52	32	10	1	36	4	45	57

AVRIL.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée			Mouv. du Nœud ☊		
	S.	°	'	"	°	'	"	°	'	"
1	3	29	3	7	10	8	17	4	49	8
2	4	12	13	42	10	14	58	4	52	18
3	5	25	24	17	10	21	39	4	55	29
4	5	8	34	52	10	28	21	4	58	40
5	5	21	45	28	10	35	2	5	1	50
6	6	4	56	3	10	41	43	5	5	1
7	6	18	6	38	10	48	24	5	8	12
8	7	1	17	13	10	55	5	5	11	22
9	7	14	27	48	11	1	46	5	14	33
10	7	27	38	23	11	8	27	5	17	44
11	8	10	48	58	11	15	8	5	20	54
12	8	23	59	33	11	21	49	5	24	5
13	9	7	10	8	11	28	30	5	27	16
14	9	20	20	43	11	35	11	5	30	27
15	10	3	31	18	11	41	52	5	33	37
16	10	16	41	53	11	48	33	5	36	48
17	10	29	52	28	11	55	14	5	39	59
18	11	13	3	3	12	1	56	5	43	9
19	11	26	13	38	12	8	37	5	46	20
20	0	9	24	13	12	15	18	5	49	31
21	0	22	34	48	12	21	59	5	52	42
22	1	5	45	23	12	28	40	5	55	53
23	1	18	55	58	12	35	21	5	59	3
24	2	2	6	33	12	42	2	6	2	14
25	2	15	17	8	12	48	43	6	5	24
26	2	28	27	43	12	55	24	6	8	35
27	3	11	38	18	13	2	5	6	11	45
28	3	24	48	53	13	8	46	6	14	56
29	4	7	59	28	13	15	27	6	18	6
30	4	21	10	3	13	22	8	6	21	17

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

MAI.

Jours.	Mouv. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée.			Mouv. du Nœud ☊		
	S.	°	′	″	°	′	″	°	′	″
1	5	4	20	38	13	28	49	6	24	27
2	5	17	31	13	13	35	30	6	27	38
3	6	0	41	48	13	42	12	6	30	48
4	6	13	52	23	13	48	53	6	33	59
5	6	27	2	58	13	55	34	6	37	10
6	7	10	13	33	14	2	15	6	40	20
7	7	23	24	8	14	8	56	6	43	31
8	8	6	34	43	14	15	37	6	46	42
9	8	19	45	18	14	22	18	6	49	52
10	9	2	55	53	14	28	59	6	53	3
11	9	16	6	28	14	35	40	6	56	14
12	9	29	17	3	14	42	21	6	59	24
13	10	12	27	39	14	49	12	7	2	35
14	10	25	38	14	14	55	43	7	5	46
15	11	8	48	49	15	2	24	7	8	56
16	11	21	59	24	15	9	5	7	12	7
17	0	5	9	59	15	15	47	7	15	18
18	0	18	20	34	15	22	28	7	18	28
19	1	1	31	9	15	29	9	7	21	39
20	1	14	41	44	15	35	50	7	24	50
21	1	27	52	19	15	42	31	7	28	0
22	2	11	2	54	15	49	12	7	31	11
23	2	24	13	29	15	55	53	7	34	22
24	3	7	24	4	16	2	34	7	37	32
25	3	20	34	39	16	9	15	7	40	43
26	4	3	45	14	16	15	56	7	43	54
27	4	16	55	49	16	22	37	7	47	4
28	5	0	6	24	16	29	18	7	50	15
29	5	13	16	59	16	35	59	7	53	25
30	5	26	27	34	16	42	40	7	56	36
31	6	9	38	9	16	49	21	7	59	47

JUIN.

Jours.	Mouv. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée.			Mouv. du Nœud ☊		
	S.	°	′	″	°	′	″	°	′	″
1	6	22	48	44	16	56	3	8	2	57
2	7	5	59	19	17	2	44	8	6	8
3	7	19	9	54	17	9	25	8	9	18
4	8	2	20	29	17	16	6	8	12	29
5	8	15	31	4	17	22	47	8	15	40
6	8	28	41	39	17	29	28	8	18	50
7	9	11	52	14	17	36	9	8	22	1
8	9	25	2	49	17	42	50	8	25	11
9	10	8	13	24	17	49	31	8	28	22
10	10	21	23	59	17	56	12	8	31	33
11	11	4	34	34	18	2	53	8	34	43
12	11	17	45	9	18	9	34	8	37	54
13	0	0	55	44	18	16	15	8	41	5
14	0	14	6	19	18	22	56	8	44	15
15	0	27	16	54	18	29	38	8	47	26
16	1	10	27	29	18	36	19	8	50	37
17	1	23	38	4	18	43	0	8	53	47
18	2	6	48	39	18	49	41	8	56	58
19	2	19	59	14	18	56	22	9	0	9
20	3	3	9	50	19	3	3	9	3	19
21	3	16	20	25	19	9	44	9	6	30
22	3	29	31	0	19	16	25	9	9	41
23	4	12	41	35	19	23	6	9	12	51
24	4	25	52	10	19	29	47	9	16	2
25	5	9	2	45	19	36	28	9	19	13
26	5	22	13	20	19	43	9	9	22	23
27	6	5	23	55	19	49	50	9	26	34
28	6	18	34	30	19	56	31	9	28	43
29	7	1	45	5	20	3	13	9	31	55
30	7	14	55	40	20	9	54	9	35	6

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

Jours.	JUILLET. Mouv. de la Lune. S.	°	′	″	Mouv. de l'Apogée. °	′	″	Mouv. du Nœud ☊ °	′	″	Jours.	AOUT. Mouv. de la Lune. S.	°	′	″	Mouv. de l'Apogée. °	′	″	Mouv. du Nœud ☊. °	′	″
1	7	28	6	15	20	16	35	9	38	16	1	9	16	34	21	23	43	48	11	16	45
2	8	11	16	50	20	23	16	9	41	27	2	9	29	44	56	23	50	29	11	19	56
3	8	24	27	25	20	29	57	9	44	37	3	10	12	55	31	23	57	10	11	23	6
4	9	7	38	0	20	36	38	9	47	48	4	10	26	6	6	24	3	51	11	26	17
5	9	20	48	35	20	43	19	9	50	59	5	11	9	16	41	24	10	32	11	29	28
6	10	3	59	10	20	50	0	9	54	9	6	11	22	27	16	24	17	13	11	32	38
7	10	17	9	45	20	56	41	9	57	20	7	0	5	37	51	24	23	54	11	35	49
8	11	0	20	20	21	3	22	10	0	31	8	0	18	48	26	24	30	35	11	39	0
9	11	13	30	55	21	10	3	10	3	41	9	1	1	59	1	24	37	16	11	42	10
10	11	26	41	30	21	16	44	10	6	52	10	1	15	9	36	24	43	57	11	45	21
11	0	9	52	5	21	23	25	10	10	3	11	1	28	20	11	24	50	38	11	48	31
12	0	23	2	40	21	30	6	10	13	13	12	2	11	30	46	24	57	20	11	51	42
13	1	6	13	15	21	36	47	10	16	24	13	2	24	41	21	25	4	1	11	54	53
14	1	19	23	50	21	43	29	10	19	35	14	3	7	51	56	25	10	42	11	58	3
15	2	2	34	25	21	50	10	10	22	45	15	3	21	2	31	25	17	23	12	1	14
16	2	15	45	0	21	56	51	10	25	56	16	4	4	13	6	25	24	4	12	4	25
17	2	28	55	35	22	3	32	10	29	7	17	4	17	23	41	25	30	45	12	7	35
18	3	12	6	10	22	10	13	10	32	17	18	5	0	34	16	25	37	26	12	10	46
19	3	25	16	45	22	16	54	10	35	28	19	5	13	44	51	25	44	7	12	13	57
20	4	8	27	20	22	23	35	10	38	39	20	5	26	55	26	25	50	48	12	17	7
21	4	21	37	55	22	30	16	10	41	49	21	6	10	6	1	25	57	29	12	20	18
22	5	4	48	30	22	36	57	10	45	0	22	6	23	16	36	26	4	10	12	23	29
23	5	17	59	5	22	43	38	10	48	10	23	7	6	27	11	26	10	51	12	26	39
24	6	1	9	40	22	50	19	10	51	21	24	7	19	37	46	26	17	32	12	29	50
25	6	14	20	15	22	57	0	10	54	31	25	8	2	48	21	26	24	13	12	33	1
26	6	27	30	50	23	3	41	10	57	42	26	8	15	58	56	26	30	55	12	36	11
27	7	10	41	25	23	10	22	11	0	52	27	8	29	9	31	26	37	36	12	39	22
28	7	23	52	1	23	17	4	11	4	3	28	9	12	20	6	26	44	17	12	42	33
29	8	7	2	36	23	23	45	11	7	14	29	9	25	30	41	26	50	58	12	45	43
30	8	20	13	11	23	30	26	11	10	24	30	10	8	41	16	26	57	39	12	48	54
31	9	3	23	46	23	37	7	11	13	35	31	10	21	51	51	27	4	20	12	52	5

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

SEPTEMBRE.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée.				Mouv. du Nœud ☊.		
	S.	°	′	″	S.	°	′	″	°	′	″
1	11	5	2	26	0	27	11	1	12	55	15
2	11	18	13	1	0	27	17	42	12	58	26
3	0	1	23	36	0	27	24	23	13	1	36
4	0	14	34	12	0	27	31	4	13	4	47
5	0	27	44	47	0	27	37	45	13	7	58
6	1	10	55	22	0	27	44	26	13	11	8
7	1	24	5	57	0	27	51	7	13	14	19
8	2	7	16	32	0	27	57	48	13	17	30
9	2	20	27	7	0	28	4	30	13	20	40
10	3	3	37	42	0	28	11	11	13	23	51
11	3	16	48	17	0	28	17	52	13	27	1
12	3	29	58	52	0	28	24	33	13	30	12
13	4	13	9	27	0	28	31	14	13	33	23
14	4	26	20	2	0	28	37	55	13	36	33
15	5	9	30	37	0	28	44	36	13	39	44
16	5	22	41	12	0	28	51	17	13	42	55
17	6	5	51	47	0	28	57	58	13	46	5
18	6	19	2	22	0	29	4	49	13	49	16
19	7	2	12	57	0	29	11	20	13	52	27
20	7	15	23	32	0	29	18	1	13	55	37
21	7	28	34	7	0	29	24	42	13	58	48
22	8	11	44	42	0	29	21	23	14	1	59
23	8	24	55	17	0	29	38	4	14	5	9
24	9	8	5	52	0	29	44	46	14	8	20
25	9	21	16	27	0	29	51	27	14	11	30
26	10	4	27	2	0	29	58	8	14	14	41
27	10	17	37	37	1	0	4	49	14	17	52
28	11	0	48	12	1	0	11	30	14	21	2
29	11	13	58	47	1	0	18	11	14	24	13
30	11	27	9	22	1	0	24	52	14	27	24

OCTOBRE.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée.				Mouv. du Nœud ☊.		
	S.	°	′	″	S.	°	′	″	°	′	″
1	0	10	19	57	1	0	31	33	14	30	34
2	0	23	30	32	1	0	38	14	14	33	45
3	1	6	41	7	1	0	44	55	14	36	56
4	1	19	51	42	1	0	51	36	14	40	6
5	2	3	2	17	1	0	58	17	14	43	17
6	2	16	12	52	1	1	4	58	14	46	27
7	2	29	23	24	1	1	11	39	14	49	38
8	3	12	34	2	1	1	18	21	14	52	49
9	3	25	44	37	1	1	25	2	14	55	59
10	4	8	55	12	1	1	31	43	14	59	10
11	4	22	5	48	1	1	38	24	15	2	21
12	5	5	16	23	1	1	45	5	15	5	32
13	5	18	26	58	1	1	51	46	15	8	42
14	6	1	37	33	1	1	58	27	15	11	53
15	6	14	48	8	1	2	5	8	15	15	3
16	6	27	58	43	1	2	11	49	15	18	14
17	7	11	9	18	1	2	18	30	15	21	25
18	7	24	19	53	1	2	25	11	15	24	35
19	8	7	30	28	1	2	31	52	15	27	46
20	8	20	41	3	1	2	38	33	15	30	56
21	9	3	51	38	1	2	45	14	15	34	7
22	9	17	2	13	1	2	51	55	15	37	18
23	10	0	12	48	1	2	58	37	15	40	28
24	10	13	23	23	1	3	5	18	15	43	39
25	10	26	33	58	1	3	11	59	15	46	50
26	11	9	44	33	1	3	18	40	15	50	0
27	11	22	55	8	1	3	25	21	15	53	11
28	0	6	5	43	1	3	32	2	15	56	21
29	0	19	16	18	1	3	38	43	15	59	32
30	1	2	26	53	1	3	45	24	16	2	43
31	1	15	37	28	1	3	52	5	16	5	5[illegible]

Mouvements moyens de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour chaque Jour du mois.

NOVEMBRE.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouv. de l'Apogée.				Mouv. du Nœud ☊.		
	S.	°	'	"	S.	°	'	"	°	'	"
1	1	28	48	3	1	3	58	46	16	9	4
2	2	11	58	38	1	4	5	27	16	12	15
3	2	25	9	13	1	4	12	8	16	15	25
4	3	8	19	48	1	4	18	49	16	18	36
5	3	21	30	23	1	4	25	30	16	21	47
6	4	4	40	58	1	4	32	12	16	24	57
7	4	17	51	33	1	4	38	53	16	28	8
8	5	1	2	8	1	4	45	34	16	31	19
9	5	14	12	43	1	4	52	15	16	34	29
10	5	27	23	18	1	4	58	56	16	37	40
11	6	10	33	53	1	5	5	37	16	40	50
12	6	23	44	28	1	5	12	18	16	44	1
13	7	6	55	3	1	5	18	59	16	47	12
14	7	20	5	38	1	5	25	40	16	50	22
15	8	3	16	13	1	5	32	21	16	53	33
16	8	16	26	48	1	5	39	2	16	56	44
17	8	29	37	23	1	5	45	43	16	59	54
18	9	12	47	59	1	5	52	24	17	3	5
19	9	25	58	34	1	5	59	5	17	6	16
20	10	9	9	9	1	6	5	47	17	9	26
21	10	22	19	44	1	6	12	28	17	12	37
22	11	5	30	19	1	6	19	9	17	15	48
23	11	18	40	54	1	6	25	50	17	18	58
24	0	1	51	29	1	6	32	31	17	22	9
25	0	15	2	4	1	6	39	12	17	25	20
26	0	28	12	39	1	6	45	53	17	28	30
27	1	11	23	14	1	6	52	34	17	31	41
28	1	24	33	49	1	6	59	15	17	34	51
29	2	7	44	24	1	7	5	56	17	38	2
30	2	20	54	59	1	7	12	37	17	41	12

DECEMBRE.

Jours.	Mouvem. de la Lune.				Mouvem. de l'Apogée.				Mouv. du Nœud ☊.		
	S.	°	'	"	S.	°	'	"	°	'	"
1	3	4	5	34	1	7	19	18	17	44	23
2	3	17	16	9	1	7	25	59	17	47	34
3	4	0	26	44	1	7	32	40	17	50	44
4	4	13	37	19	1	7	39	21	17	53	55
5	4	26	47	54	1	7	46	3	17	57	6
6	5	9	58	29	1	7	52	44	18	0	16
7	5	23	9	4	1	7	59	25	18	3	27
8	6	6	19	39	1	8	6	6	18	6	38
9	6	19	30	14	1	8	12	47	18	9	48
10	7	2	40	49	1	8	19	28	18	12	59
11	7	15	51	24	1	8	26	9	18	16	10
12	7	29	1	59	1	8	32	50	18	19	20
13	8	12	12	34	1	8	39	31	18	22	31
14	8	25	23	9	1	8	46	12	18	25	42
15	9	8	33	44	1	8	52	53	18	28	52
16	9	21	44	19	1	8	59	34	18	32	3
17	10	4	54	54	1	9	6	15	18	35	14
18	10	18	5	29	1	9	12	56	18	38	24
19	11	1	16	4	1	9	19	38	18	41	35
20	12	14	26	39	1	9	26	19	18	44	46
21	11	27	37	14	1	9	33	0	18	47	56
22	0	10	47	49	1	9	39	41	18	51	7
23	0	20	58	24	1	9	46	22	18	54	18
24	1	7	8	59	1	9	53	3	18	57	28
25	1	20	19	34	1	9	59	44	19	0	39
26	2	3	30	10	1	10	6	25	19	3	50
27	2	16	40	45	1	10	13	6	19	7	0
28	2	29	51	20	1	10	19	47	19	10	11
29	3	13	1	55	1	10	26	28	19	13	21
30	3	26	12	30	1	10	33	9	19	16	32
31	4	9	23	5	1	10	39	50	19	19	43

Mouvement moyen de la Lune, de ſon Apogée & de ſon Nœud, pour les heures, minutes & ſecondes.

Heures.	Long. de la ☾. °	′	″	Ap. de la ☾. ′	″	☊ ′	″
1	0	32	56	0	17	0	8
2	1	5	53	0	33	0	16
3	1	38	49	0	50	0	24
4	2	11	46	1	7	0	32
5	2	44	42	1	24	0	40
6	3	17	39	1	40	0	48
7	3	50	35	1	57	0	56
8	4	23	32	2	14	1	4
9	4	56	28	2	30	1	12
10	5	29	25	2	47	1	19
11	6	2	21	3	4	1	27
12	6	35	18	3	21	1	35
13	7	8	14	3	37	1	43
14	7	41	10	3	54	1	51
15	8	14	7	4	11	1	59
16	8	47	3	4	27	2	7
17	9	20	0	4	44	2	15
18	9	52	56	5	1	2	23
19	10	25	53	5	18	2	31
20	10	58	49	5	34	2	39
21	11	31	46	5	51	2	47
22	12	4	42	6	8	2	55
23	12	37	39	6	24	3	3
24	13	10	35	6	41	3	11

M / S.	☾ ′ ″ / ″ ‴		Ap. ″ / ‴	☊ ″ / ‴	M / S.	☾ ′ ″ / ″ ‴		Ap. ″ / ‴	☊ ″ / ‴
1	0	33	0	0	31	17	1	9	4
2	1	6	1	0	32	17	34	9	4
3	1	39	1	0	33	18	7	9	4
4	2	12	1	1	34	18	40	9	4
5	2	45	1	1	35	19	13	10	5
6	3	18	2	1	36	19	46	10	5
7	3	51	2	1	37	20	19	10	5
8	4	24	2	1	38	20	52	11	5
9	4	56	3	1	39	21	25	11	5
10	5	29	3	1	40	21	58	11	5
11	6	2	3	1	41	22	31	11	5
12	6	35	3	2	42	23	4	12	6
13	7	8	4	2	43	23	36	12	6
14	7	41	4	2	44	24	9	12	6
15	8	14	4	2	45	24	42	13	6
16	8	47	4	2	46	25	15	13	6
17	9	20	5	2	47	25	48	13	6
18	9	53	5	2	48	26	21	13	6
19	10	26	5	3	49	26	54	14	6
20	10	59	6	3	50	27	27	14	7
21	11	32	6	3	51	28	0	14	7
22	12	5	6	3	52	28	33	14	7
23	12	38	6	3	53	29	6	15	7
24	13	11	7	3	54	29	39	15	7
25	13	44	7	3	55	30	12	15	7
26	14	16	7	3	56	30	45	16	7
27	14	49	8	4	57	31	18	16	8
28	15	22	8	4	58	31	51	16	8
29	15	55	8	4	59	32	24	16	8
30	16	28	8	4	60	32	56	17	8

I. EQUATION de la Lune.

Argument I. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Degrés.	O. + ′	″	I. + ′	″	II. + ′	″	III. + ′	″	IV. + ′	″	V. + ′	″	
0	0	0	5	31	9	40	11	20	9	58	5	49	30
1	0	12	5	41	9	46	11	20	9	52	5	39	29
2	0	24	5	51	9	52	11	20	9	46	5	28	28
3	0	35	6	1	9	58	11	20	9	39	5	17	27
4	0	47	6	11	10	3	11	19	9	33	5	6	26
5	0	58	6	21	10	9	11	19	9	26	4	55	25
6	1	10	6	30	10	14	11	18	9	19	4	44	24
7	1	21	6	40	10	19	11	17	9	12	4	33	23
8	1	33	6	49	10	24	11	16	9	5	4	22	22
9	1	44	6	58	10	29	11	15	8	58	4	11	21
10	1	55	7	7	10	33	11	13	8	51	3	59	20
11	2	7	7	16	10	37	11	11	8	43	3	48	19
12	2	18	7	25	10	41	11	9	8	35	3	36	18
13	2	29	7	34	10	45	11	7	8	27	3	25	17
14	2	40	7	42	10	49	11	5	8	19	3	13	16
15	2	51	7	51	10	52	11	2	8	11	3	1	15
16	3	2	7	59	10	55	10	59	8	3	2	50	14
17	3	13	8	7	10	58	10	56	7	54	2	38	13
18	3	24	8	15	11	1	10	52	7	45	2	26	12
19	3	35	8	23	11	3	10	49	7	36	2	14	11
20	3	46	8	31	11	6	10	45	7	27	2	2	10
21	3	57	8	39	11	8	10	41	7	18	1	50	9
22	4	8	8	46	11	10	10	37	7	9	1	38	8
23	4	18	8	54	11	12	10	33	7	0	1	26	7
24	4	29	9	1	11	14	10	29	6	50	1	14	6
25	4	40	9	8	11	16	10	24	6	40	1	1	5
26	4	50	9	15	11	17	10	19	6	30	0	49	4
27	5	0	9	21	11	18	10	14	6	20	0	37	3
28	5	11	9	28	11	19	10	9	6	9	0	25	2
29	5	21	9	34	11	20	10	4	5	59	0	13	1
30	5	31	9	40	11	20	9	58	5	49	0	0	0
	— XI.		— X.		— IX.		— VIII.		— VII.		— VI.		D.

II. EQUATION de la Lune.

Argum. II. *Double de la distance moyenne de la Lune au Soleil* + *Argument I.*

Degrés.	O. — VI. + ″	I. — VII. + ″	II. — VIII. + ″	
0	0	27	47	30
1	1	28	47	29
2	2	29	48	28
3	3	29	48	27
4	4	30	49	26
5	5	31	49	25
6	6	31	50	24
7	7	32	50	23
8	8	33	50	22
9	9	34	51	21
10	10	34	51	20
11	11	35	51	19
12	12	36	52	18
13	13	37	52	17
14	13	37	52	16
15	14	38	52	15
16	15	39	52	14
17	16	39	53	13
18	17	40	53	12
19	18	41	53	11
20	19	41	53	10
21	19	42	53	9
22	20	42	53	8
23	21	43	53	7
24	22	44	54	6
25	23	44	54	5
26	23	45	54	4
27	24	45	54	3
28	25	46	54	2
29	26	46	54	1
30	27	47	54	0
	+ XI. — V.	+ X. — IV.	+ IX. — III.	Degrés.

III. EQUATION de la Lune.

Argum. III. *Double de la distance moyenne de la Lune au Soleil — Argument I.*

Degrés.	O. — VI. + ″	I. — VII. + ″	II. — VIII. + ′ ″	
0	0	31	0 54	30
1	1	32	0 54	29
2	2	33	0 55	28
3	3	34	0 55	27
4	4	35	0 56	26
5	6	36	0 56	25
6	7	37	0 56	24
7	8	38	0 57	23
8	9	38	0 57	22
9	10	39	0 58	21
10	11	40	0 58	20
11	12	41	0 58	19
12	13	42	0 59	18
13	14	42	0 59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 2	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	+ XI. — V.	+ X. — IV.	+ IX. — III.	Degrés.

IV. EQUATION de la Lune.

Argument IV.

Argum. II. — Anomalie moyenne de la Lune.

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ′ ″	II. + VIII. — ′ ″	
0	0	0 54	1 34	30
1	2	0 56	1 35	29
2	4	0 57	1 36	28
3	6	0 59	1 37	27
4	8	1 0	1 38	26
5	10	1 2	1 39	25
6	12	1 3	1 39	24
7	13	1 5	1 40	23
8	15	1 6	1 41	22
9	17	1 8	1 41	21
10	19	1 9	1 42	20
11	21	1 10	1 42	19
12	23	1 12	1 43	18
13	24	1 13	1 44	17
14	26	1 15	1 44	16
15	28	1 16	1 45	15
16	30	1 18	1 45	14
17	32	1 19	1 46	13
18	33	1 20	1 46	12
19	35	1 22	1 46	11
20	37	1 23	1 47	10
21	39	1 24	1 47	9
22	41	1 26	1 47	8
23	42	1 27	1 47	7
24	44	1 28	1 47	6
25	46	1 29	1 48	5
26	48	1 30	1 48	4
27	49	1 31	1 48	3
28	51	1 32	1 48	2
29	52	1 33	1 48	1
30	54	1 34	1 48	0
	XI. + V.	X. + IV.	IX. + III.	Degrés.

V. EQUATION de la Lune.

Argument V.

Argum. III. — Anomalie moyenne de la Lune.

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ′ ″	II. + VIII — ′ ″	
0	0	36	1 2	30
1	1	37	1 3	29
2	2	38	1 3	28
3	4	39	1 4	27
4	5	40	1 4	26
5	6	41	1 5	25
6	8	42	1 5	24
7	9	43	1 6	23
8	10	44	1 6	22
9	12	45	1 7	21
10	13	46	1 7	20
11	14	47	1 8	19
12	16	48	1 8	18
13	17	49	1 9	17
14	18	50	1 9	16
15	19	51	1 10	15
16	20	52	1 10	14
17	22	52	1 10	13
18	23	53	1 11	12
19	24	54	1 11	11
20	25	55	1 11	10
21	26	56	1 11	9
22	28	56	1 11	8
23	29	57	1 11	7
24	30	58	1 12	6
25	31	59	1 12	5
26	32	59	1 12	4
27	33	1 0	1 12	3
28	34	1 1	1 12	2
29	35	1 1	1 12	1
30	36	1 2	1 12	0
	XI. + V.	X. + IV.	IX. + III.	Degrés.

VI. EQUATION de la Lune.

Argument. VI. *Double distance de la ☾ au ☉ + Anomalie moyenne de la ☾.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ′ ″	II. + VIII — ′ ″	
0	0	45	1 18	30
1	2	46	1 19	29
2	3	48	1 19	28
3	5	49	1 20	27
4	6	51	1 20	26
5	8	52	1 21	25
6	9	53	1 22	24
7	11	55	1 22	23
8	13	56	1 23	22
9	14	57	1 23	21
10	16	58	1 24	20
11	17	59	1 25	19
12	19	1 1	1 25	18
13	20	1 2	1 26	17
14	22	1 3	1 26	16
15	23	1 4	1 27	15
16	25	1 5	1 27	14
17	26	1 6	1 28	13
18	28	1 7	1 28	12
19	29	1 8	1 28	11
20	31	1 9	1 29	10
21	32	1 10	1 29	9
22	34	1 11	1 29	8
23	35	1 12	1 29	7
24	37	1 13	1 29	6
25	38	1 14	1 30	5
26	39	1 15	1 30	4
27	41	1 16	1 30	3
28	42	1 16	1 30	2
29	44	1 17	1 30	1
30	45	1 18	1 30	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

VII. EQUATION de la Lune.

Argument VII. *Double distance de la ☾ au ☊ — Anom. moyenne de la ☾.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ″	II + VIII — ″	
0	0	29	50	30
1	1	30	50	29
2	2	31	51	28
3	3	31	51	27
4	4	32	52	26
5	5	33	52	25
6	6	34	53	24
7	7	35	53	23
8	8	35	54	22
9	9	36	54	21
10	10	37	54	20
11	11	38	55	19
12	12	38	55	18
13	13	39	55	17
14	14	40	56	16
15	15	41	56	15
16	16	41	56	14
17	17	42	56	13
18	18	43	57	12
19	19	43	57	11
20	20	44	57	10
21	21	45	57	9
22	22	45	57	8
23	23	46	58	7
24	24	46	58	6
25	25	47	58	5
26	26	47	58	4
27	27	48	58	3
28	27	49	58	2
29	28	49	58	1
30	29	50	58	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

VIII. EQUAT. de la Lune.

Argument VIII. *Anomalie moyenne de la ☾ — Argument I.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ″	II. + VIII — ″	
0	0	20	35	30
1	1	20	35	29
2	2	21	36	28
3	2	21	36	27
4	3	22	36	26
5	4	23	37	25
6	4	23	37	24
7	5	24	37	23
8	6	24	37	22
9	6	25	38	21
10	7	26	38	20
11	7	26	38	19
12	8	27	38	18
13	9	27	38	17
14	9	28	38	16
15	10	28	39	15
16	11	29	39	14
17	11	29	39	13
18	12	30	39	12
19	13	30	39	11
20	13	31	39	10
21	14	31	39	9
22	15	32	40	8
23	15	32	40	7
24	16	33	40	6
25	17	33	40	5
26	17	34	40	4
27	18	34	40	3
28	19	34	40	2
29	19	35	40	1
30	20	35	40	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

Mouvement moyen de la Lune, de son Apogée & de son Nœud, pour les heures, minutes & secondes.

Heures.	Long. de la ☾.			Ap. de la ☾.		☊	
	°	′	″	′	″	′	″
1	0	32	56	0	17	0	8
2	1	5	53	0	33	0	16
3	1	38	49	0	50	0	24
4	2	11	46	1	7	0	32
5	2	44	42	1	24	0	40
6	3	17	39	1	40	0	48
7	3	50	35	1	57	0	56
8	4	23	32	2	14	1	4
9	4	56	28	2	30	1	12
10	5	29	25	2	47	1	19
11	6	2	21	3	4	1	27
12	6	35	18	3	21	1	35
13	7	8	14	3	37	1	43
14	7	41	10	3	54	1	51
15	8	14	7	4	11	1	59
16	8	47	3	4	27	2	7
17	9	20	0	4	44	2	15
18	9	52	56	5	1	2	23
19	10	25	53	5	18	2	31
20	10	58	49	5	34	2	39
21	11	31	46	5	51	2	47
22	12	4	42	6	8	2	55
23	12	37	39	6	24	3	3
24	13	10	35	6	41	3	11

M / S.	☾		Ap.	☊	M / S.	☾		Ap.	☊
	′ ″ / ″ ‴		″ / ‴	″ / ‴		′ ″ / ″ ‴		″ / ‴	″ / ‴
1	0	33	0	0	31	17	1	9	4
2	1	6	1	0	32	17	34	9	4
3	1	39	1	0	33	18	7	9	4
4	2	12	1	1	34	18	40	9	4
5	2	45	1	1	35	19	13	10	5
6	3	18	2	1	36	19	46	10	5
7	3	51	2	1	37	20	19	10	5
8	4	24	2	1	38	20	52	11	5
9	4	56	3	1	39	21	25	11	5
10	5	29	3	1	40	21	58	11	5
11	6	2	3	1	41	22	31	11	5
12	6	35	3	2	42	23	4	12	6
13	7	8	4	2	43	23	36	12	6
14	7	41	4	2	44	24	9	12	6
15	8	14	4	2	45	24	42	13	6
16	8	47	4	2	46	25	15	13	6
17	9	20	5	2	47	25	48	13	6
18	9	53	5	2	48	26	21	13	6
19	10	26	5	3	49	26	54	14	6
20	10	59	6	3	50	27	27	14	7
21	11	32	6	3	51	28	0	14	7
22	12	5	6	3	52	28	33	14	7
23	12	38	6	3	53	29	6	15	7
24	13	11	7	3	54	29	39	15	7
25	13	44	7	3	55	30	12	15	7
26	14	16	7	3	56	30	45	16	7
27	14	49	8	4	57	31	18	16	8
28	15	22	8	4	58	31	51	16	8
29	15	55	8	4	59	32	24	16	8
30	16	28	8	4	60	32	56	17	8

I. EQUATION de la Lune.

Argument I. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Degrés.	O. + '	O. + "	I. + '	I. + "	II. + '	II. + "	III. + '	III. + "	IV. + '	IV. + "	V. + '	V. + "	
0	0	0	5	31	9	40	11	20	9	58	5	49	30
1	0	12	5	41	9	46	11	20	9	52	5	39	29
2	0	24	5	51	9	52	11	20	9	46	5	28	28
3	0	35	6	1	9	58	11	20	9	39	5	17	27
4	0	47	6	11	10	3	11	19	9	33	5	6	26
5	0	58	6	21	10	9	11	19	9	26	4	55	25
6	1	10	6	30	10	14	11	18	9	19	4	44	24
7	1	21	6	40	10	19	11	17	9	12	4	33	23
8	1	33	6	49	10	24	11	16	9	5	4	22	22
9	1	44	6	58	10	29	11	15	8	58	4	11	21
10	1	55	7	7	10	33	11	13	8	51	3	59	20
11	2	7	7	16	10	37	11	11	8	43	3	48	19
12	2	18	7	25	10	41	11	9	8	35	3	36	18
13	2	29	7	34	10	45	11	7	8	27	3	25	17
14	2	40	7	42	10	49	11	5	8	19	3	13	16
15	2	51	7	51	10	52	11	2	8	11	3	1	15
16	3	2	7	59	10	55	10	59	8	3	2	50	14
17	3	13	8	7	10	58	10	56	7	54	2	38	13
18	3	24	8	15	11	1	10	52	7	45	2	26	12
19	3	35	8	23	11	3	10	49	7	36	2	14	11
20	3	46	8	31	11	6	10	45	7	27	2	2	10
21	3	57	8	39	11	8	10	41	7	18	1	50	9
22	4	8	8	46	11	10	10	37	7	9	1	38	8
23	4	18	8	54	11	12	10	33	7	0	1	26	7
24	4	29	9	1	11	14	10	29	6	50	1	14	6
25	4	40	9	8	11	16	10	24	6	40	1	1	5
26	4	50	9	15	11	17	10	19	6	30	0	49	4
27	5	0	9	21	11	18	10	14	6	20	0	37	3
28	5	11	9	28	11	19	10	9	6	9	0	25	2
29	5	21	9	34	11	20	10	4	5	59	0	13	1
30	5	31	9	40	11	20	9	58	5	49	0	0	0
	—		—		—		—		—		—		
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		D.

II. EQUATION de la Lune.

Argum. II. *Double de la distance moyenne de la Lune au Soleil + Argument I.*

Degrés.	O. — VI. + "	I. — VII. + "	II. — VIII. + "	
0	0	27	47	30
1	1	28	47	29
2	2	29	48	28
3	3	29	48	27
4	4	30	49	26
5	5	31	49	25
6	6	31	50	24
7	7	32	50	23
8	8	33	50	22
9	9	34	51	21
10	10	34	51	20
11	11	35	51	19
12	12	36	52	18
13	13	37	52	17
14	13	37	52	16
15	14	38	52	15
16	15	39	52	14
17	16	39	53	13
18	17	40	53	12
19	18	41	53	11
20	19	41	53	10
21	19	42	53	9
22	20	42	53	8
23	21	43	53	7
24	22	44	54	6
25	23	44	54	5
26	23	45	54	4
27	24	45	54	3
28	25	46	54	2
29	26	46	54	1
30	27	47	54	0
	+ XI. — V.	+ X. — IV.	+ IX. — III.	Degrés.

III. EQUATION de la Lune.

Argum. III. *Double de la distance moyenne de la Lune au Soleil — Argument I.*

Degrés.	O. — VI. +	I. — VII. +	II. — VIII. +	
	″	″	′ ″	
0	0	31	0 54	30
1	1	32	0 54	29
2	2	33	0 55	28
3	3	34	0 55	27
4	4	35	0 56	26
5	6	36	0 56	25
6	7	37	0 56	24
7	8	38	0 57	23
8	9	38	0 57	22
9	10	39	0 58	21
10	11	40	0 58	20
11	12	41	0 58	19
12	13	42	0 59	18
13	14	42	0 59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 2	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	+ XI. — V.	+ X. — IV.	+ IX. — III.	Degrés.

IV. EQUATION de la Lune.

Argument IV.

Argum. II. — Anomalie moyenne de la Lune.

Degrés.	O. + VI. —	I. + VII. —	II. + VIII. —	
	″	′ ″	′ ″	
0	0	0 54	1 34	30
1	2	0 56	1 35	29
2	4	0 57	1 36	28
3	6	0 59	1 37	27
4	8	1 0	1 38	26
5	10	1 2	1 39	25
6	12	1 3	1 39	24
7	13	1 5	1 40	23
8	15	1 6	1 41	22
9	17	1 8	1 41	21
10	19	1 9	1 42	20
11	21	1 10	1 42	19
12	23	1 12	1 43	18
13	24	1 13	1 44	17
14	26	1 15	1 44	16
15	28	1 16	1 45	15
16	30	1 18	1 45	14
17	32	1 19	1 46	13
18	33	1 20	1 46	12
19	35	1 22	1 46	11
20	37	1 23	1 47	10
21	39	1 24	1 47	9
22	41	1 26	1 47	8
23	42	1 27	1 47	7
24	44	1 28	1 47	6
25	46	1 29	1 48	5
26	48	1 30	1 48	4
27	49	1 31	1 48	3
28	51	1 32	1 48	2
29	52	1 33	1 48	1
30	54	1 34	1 48	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

V. EQUATION de la Lune.

Argument V.

Argum. III. — Anomalie moyenne de la Lune.

Degrés.	O. + VI. —	I. + VII. —	II. + VIII. —	
	″	′ ″	′ ″	
0	0	36	1 2	30
1	1	37	1 3	29
2	2	38	1 3	28
3	4	39	1 4	27
4	5	40	1 4	26
5	6	41	1 5	25
6	8	42	1 5	24
7	9	43	1 6	23
8	10	44	1 6	22
9	12	45	1 7	21
10	13	46	1 7	20
11	14	47	1 8	19
12	16	48	1 8	18
13	17	49	1 9	17
14	18	50	1 9	16
15	19	51	1 10	15
16	20	52	1 10	14
17	22	52	1 10	13
18	23	53	1 11	12
19	24	54	1 11	11
20	25	55	1 11	10
21	26	56	1 11	9
22	28	56	1 11	8
23	29	57	1 11	7
24	30	58	1 12	6
25	31	59	1 12	5
26	32	59	1 12	4
27	33	1 0	1 12	3
28	34	1 1	1 12	2
29	35	1 1	1 12	1
30	36	1 2	1 12	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

VI. EQUATION de la Lune.

Argument. VI. *Double distance de la ☾ au ☉ + Anomalie moyenne de la ☾.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ′ ″	II. + VIII — ′ ″	
0	0	45	1 18	30
1	2	46	1 19	29
2	3	48	1 19	28
3	5	49	1 20	27
4	6	51	1 20	26
5	8	52	1 21	25
6	9	53	1 22	24
7	11	55	1 22	23
8	13	56	1 23	22
9	14	57	1 23	21
10	16	58	1 24	20
11	17	59	1 25	19
12	19	1 1	1 25	18
13	20	1 2	1 26	17
14	22	1 3	1 26	16
15	23	1 4	1 27	15
16	25	1 5	1 27	14
17	26	1 6	1 28	13
18	28	1 7	1 28	12
19	29	1 8	1 28	11
20	31	1 9	1 29	10
21	32	1 10	1 29	9
22	34	1 11	1 29	8
23	35	1 12	1 29	7
24	37	1 13	1 29	6
25	38	1 14	1 30	5
26	39	1 15	1 30	4
27	41	1 16	1 30	3
28	42	1 16	1 30	2
29	44	1 17	1 30	1
30	45	1 18	1 30	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

VII. EQUATION de la Lune.

Argument VII. *Double distance de la ☾ au ☊ — Anom. moyenne de la ☾.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ″	II + VIII — ″	
0	0	29	50	30
1	1	30	50	29
2	2	31	51	28
3	3	31	51	27
4	4	32	52	26
5	5	33	52	25
6	6	34	53	24
7	7	35	53	23
8	8	35	54	22
9	9	36	54	21
10	10	37	54	20
11	11	38	55	19
12	12	38	55	18
13	13	39	55	17
14	14	40	56	16
15	15	41	56	15
16	16	41	56	14
17	17	42	56	13
18	18	43	57	12
19	19	43	57	11
20	20	44	57	10
21	21	45	57	9
22	22	45	57	8
23	23	46	58	7
24	24	46	58	6
25	25	47	58	5
26	26	47	58	4
27	27	48	58	3
28	27	49	58	2
29	28	49	58	1
30	29	50	58	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

VIII. EQUAT. de la Lune.

Argument VIII. *Anomalie moyenne de la ☾ — Argument I.*

Degrés.	O. + VI. — ″	I. + VII. — ″	II. + VIII — ″	
0	0	20	35	30
1	1	20	35	29
2	2	21	36	28
3	2	21	36	27
4	3	22	36	26
5	4	23	37	25
6	4	23	37	24
7	5	24	37	23
8	6	24	37	22
9	6	25	38	21
10	7	26	38	20
11	7	26	38	19
12	8	27	38	18
13	9	27	38	17
14	9	28	38	16
15	10	28	39	15
16	11	29	39	14
17	11	29	39	13
18	12	30	39	12
19	13	30	39	11
20	13	31	39	10
21	14	31	39	9
22	15	32	40	8
23	15	32	40	7
24	16	33	40	6
25	17	33	40	5
26	17	34	40	4
27	18	34	40	3
28	19	34	40	2
29	19	35	40	1
30	20	35	40	0
	— XI. + V.	— X. + IV.	— IX. + III.	Degrés.

IX. EQUATION de la Lune.

Argument IX.
Longitude du ☊ — longit. vraie du ☉.

Degrés.	O. + VI. +	I. + VII. +	II. + VIII. +	
	"	"	"	
0	0	41	41	30
1	2	41	40	29
2	3	42	39	28
3	5	43	38	27
4	6	43	37	26
5	8	44	36	25
6	10	44	35	24
7	11	45	34	23
8	13	45	32	22
9	14	46	31	21
10	16	46	30	20
11	17	46	29	19
12	19	47	27	18
13	20	47	26	17
14	22	47	25	16
15	23	47	23	15
16	25	47	22	14
17	26	47	20	13
18	27	47	19	12
19	29	46	17	11
20	30	46	16	10
21	31	46	14	9
22	32	45	13	8
23	34	45	11	7
24	35	44	10	6
25	36	44	8	5
26	37	43	6	4
27	38	43	5	3
28	39	42	3	2
29	40	41	2	1
30	41	41	0	0
	XI. — V.	X. — IV.	IX. — III.	Degrés.

X. EQUATION de la Lune.

Argument X.

Distance de la ☾ au ☉ — Anomalie moyenne de la ☾.

Degrés.	O. +	I. +	II. +	III. ±	IV. —	V. —	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	3 11	3 22	0 29	2 32	2 42	30
1	0 8	3 15	3 19	0 22	2 35	2 39	29
2	0 15	3 19	3 15	0 15	2 39	2 36	28
3	0 23	3 22	3 11	0 8	2 42	2 32	27
4	0 30	3 25	3 7	0 1	2 45	2 28	26
				—			
5	0 38	3 28	3 3	0 6	2 48	2 24	25
6	0 45	3 31	2 58	0 13	2 51	2 20	24
7	0 53	3 33	2 53	0 20	2 53	2 15	23
8	1 0	3 36	2 48	0 27	2 55	2 11	22
9	1 8	3 38	2 43	0 34	2 57	2 6	21
10	1 15	3 40	2 38	0 41	2 59	2 1	20
11	1 22	3 42	2 32	0 48	3 0	1 56	19
12	1 29	3 43	2 27	0 54	3 1	1 51	18
13	1 36	3 44	2 21	1 1	3 2	1 46	17
14	1 43	3 44	2 16	1 8	3 3	1 40	16
15	1 50	3 45	2 10	1 14	3 4	1 35	15
16	1 56	3 45	2 4	1 20	3 4	1 29	14
17	2 3	3 44	1 58	1 26	3 3	1 23	13
18	2 9	3 44	1 51	1 32	3 3	1 17	12
19	2 15	3 43	1 45	1 38	3 2	1 11	11
20	2 21	3 43	1 38	1 44	3 2	1 5	10
21	2 26	3 42	1 32	1 49	3 1	0 59	9
22	2 32	3 41	1 25	1 55	3 0	0 53	8
23	2 37	3 39	1 18	2 0	2 59	0 46	7
24	2 43	3 37	1 11	2 5	2 57	0 40	6
25	2 48	3 35	1 4	2 10	2 55	0 33	5
26	2 53	3 33	0 57	2 15	2 53	0 27	4
27	2 58	3 30	0 50	2 19	2 50	0 20	3
28	3 2	3 28	0 43	2 24	2 48	0 14	2
29	3 7	3 25	0 36	2 28	2 45	0 7	1
30	3 11	3 22	0 29	2 32	2 42	0 0	0
Degrés.	— XI.	— X.	— IX.	∓ VIII.	+ VII.	+ VI.	D.

Correction du Nœud & de l'Anomalie moyenne de la Lune.

Argument. *Anomalie moyenne du Soleil.*

On applique cette Equation ſimple à la longide du Nœud, & on en prend le double pour l'Anomalie moyenne de la Lune.

Degrés.	O.		I.		II.		III.		IV.		V.		
	+		+		+		+		+		+		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	5	1	8	47	10	18	9	4	5	17	30
1	0	11	5	10	8	53	10	18	8	59	5	8	29
2	0	22	5	19	8	58	10	18	8	53	4	58	28
3	0	32	5	28	9	3	10	18	8	47	4	48	27
4	0	43	5	37	9	9	10	17	8	41	4	38	26
5	0	53	5	46	9	14	10	17	8	35	4	28	25
6	1	4	5	55	9	19	10	16	8	29	4	18	24
7	1	14	6	3	9	23	10	15	8	22	4	8	23
8	1	25	6	12	9	27	10	14	8	16	3	58	22
9	1	35	6	20	9	31	10	13	8	10	3	48	21
10	1	45	6	28	9	35	10	12	8	3	3	38	20
11	1	55	6	36	9	39	10	10	7	56	3	27	19
12	2	5	6	44	9	42	10	8	7	48	3	17	18
13	2	15	6	52	9	46	10	6	7	41	3	6	17
14	2	25	7	0	9	50	10	4	7	34	2	56	16
15	2	35	7	8	9	53	10	2	7	26	2	45	15
16	2	45	7	16	9	56	9	59	7	18	2	35	14
17	2	55	7	23	9	58	9	56	7	10	2	24	13
18	3	5	7	31	10	1	9	53	7	2	2	13	12
19	3	15	7	38	10	3	9	50	6	54	2	2	11
20	3	25	7	45	10	5	9	46	6	46	1	51	10
21	3	35	7	52	10	7	9	43	6	37	1	40	9
22	3	44	7	58	10	9	9	39	6	29	1	29	8
23	3	54	8	5	10	11	9	35	6	20	1	18	7
24	4	4	8	12	10	13	9	31	6	12	1	7	6
25	4	14	8	18	10	14	9	27	6	3	0	56	5
26	4	23	8	24	10	15	9	23	5	54	0	45	4
27	4	33	8	30	10	16	9	18	5	45	0	34	3
28	4	42	8	36	10	17	9	14	5	36	0	23	2
29	4	52	8	42	10	18	9	9	5	27	0	12	1
30	5	1	8	47	10	18	9	4	5	17	0	0	0
	—		—		—		—		—		—		
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		D.

XI. Equation du centre.

Argument XI. *Anomalie de la Lune doublement corrigée.*

Degrés.	O.					I.					II.					
	—			Differ.		—			Differ.		—			Differ.		
	°	'	"	'	"	°	'	"	'	"	°	'	"	'	"	
0	0	0	0	6	11	2	58	33	5	28	5	16	28	3	27	30
1	0	6	11	6	11	3	4	1	5	25	5	19	55	3	22	29
2	0	12	22	6	10	3	9	26	5	22	5	23	17	3	17	28
3	0	18	32	6	10	3	14	48	5	19	5	26	34	3	12	27
4	0	24	42	6	10	3	20	7	5	17	5	29	46	3	7	26
5	0	30	52	6	10	3	25	24	5	14	5	32	53	3	1	25
6	0	37	2	6	9	3	30	38	5	10	5	35	54	2	55	24
7	0	43	11	6	8	3	35	48	5	7	5	38	49	2	49	23
8	0	49	19	6	8	3	40	55	5	3	5	41	38	2	43	22
9	0	55	27	6	7	3	45	58	4	59	5	44	21	2	37	21
10	1	1	34	6	6	3	50	57	4	56	5	46	58	2	31	20
11	1	7	40	6	5	3	55	53	4	52	5	49	29	2	26	19
12	1	13	45	6	3	4	0	45	4	49	5	51	55	2	20	18
13	1	19	48	6	2	4	5	34	4	45	5	54	15	2	14	17
14	1	25	50	6	2	4	10	19	4	41	5	56	29	2	8	16
15	1	31	52	6	0	4	15	0	4	37	5	58	37	2	2	15
16	1	37	52	5	58	4	19	37	4	33	6	0	39	1	55	14
17	1	43	50	5	57	4	24	10	4	28	6	2	34	1	49	13
18	1	49	47	5	55	4	28	38	4	24	6	4	23	1	43	12
19	1	55	42	5	53	4	33	2	4	20	6	6	6	1	37	11
20	2	1	35	5	51	4	37	22	4	16	6	7	43	1	30	10
21	2	7	26	5	49	4	41	38	4	11	6	9	13	1	24	9
22	2	13	15	5	47	4	45	49	4	6	6	10	37	1	17	8
23	2	19	2	5	46	4	49	55	4	2	6	11	54	1	11	7
24	2	24	48	5	44	4	53	57	3	58	6	13	5	1	5	6
25	2	30	32	5	42	4	57	55	3	53	6	14	10	0	58	5
26	2	36	14	5	39	5	1	48	3	48	6	15	8	0	51	4
27	2	41	53	5	36	5	5	36	3	43	6	15	59	0	44	3
28	2	47	29	5	33	5	9	19	3	37	6	16	43	0	37	2
29	2	53	2	5	31	5	12	56	3	32	6	17	20	0	30	1
30	2	58	33			5	16	28			6	17	50			0
	+					+					+					D.
	XI.					X.					IX.					

XI. Equation du Centre.

Argument XI. *Anomalie de la Lune doublement corrigée.*

Degrés.	III. °	III. ′	III. ″	Differ. ′	Differ. ″	IV. °	IV. ′	IV. ″	Differ. ′	Differ. ″	V. °	V. ′	V. ″	Differ. ′	Differ. ″	D.
0	6	17	50	0	24	5	39	0	3	7	3	21	4	6	0	30
1	6	18	14	0	17	5	35	53	3	13	3	15	4	6	3	29
2	6	18	31	0	10	5	32	40	3	20	3	9	1	6	7	28
3	6	18	41	0	3	5	29	20	3	27	3	2	54	6	11	27
4	6	18	44	0	4	5	25	53	3	32	2	56	43	6	15	26
5	6	18	40	0	11	5	22	21	3	39	2	50	28	6	19	25
6	6	18	29	0	18	5	18	42	3	46	2	44	9	6	22	24
7	6	18	11	0	25	5	14	56	3	52	2	37	47	6	26	23
8	6	17	46	0	32	5	11	4	3	59	2	31	21	6	30	22
9	6	17	14	0	38	5	7	5	4	6	2	24	51	6	33	21
10	6	16	36	0	46	5	2	59	4	12	2	18	18	6	36	20
11	6	15	50	0	53	4	58	47	4	18	2	11	42	6	38	19
12	6	14	57	1	0	4	54	29	4	24	2	5	4	6	41	18
13	6	13	57	1	7	4	50	5	4	29	1	58	23	6	44	17
14	6	12	50	1	14	4	45	36	4	35	1	51	39	6	47	16
15	6	11	36	1	21	4	41	1	4	41	1	44	52	6	49	15
16	6	10	15	1	28	4	36	20	4	47	1	38	3	6	51	14
17	6	8	47	1	35	4	31	33	4	54	1	31	12	6	54	13
18	6	7	12	1	43	4	26	39	4	59	1	24	18	6	55	12
19	6	5	29	1	50	4	21	40	5	6	1	17	23	6	55	11
20	6	3	39	1	57	4	16	34	5	11	1	10	27	6	58	10
21	6	1	42	2	4	4	11	23	5	16	1	3	29	6	59	9
22	5	59	38	2	10	4	6	7	5	21	0	56	30	7	1	8
23	5	57	28	2	17	4	0	46	5	25	0	49	29	7	2	7
24	5	55	11	2	24	3	55	21	5	30	0	42	27	7	4	6
25	5	52	47	2	31	3	49	51	5	35	0	35	23	7	4	5
26	5	50	16	2	38	3	44	16	5	40	0	28	19	7	4	4
27	5	47	38	2	45	3	38	36	5	46	0	21	15	7	5	3
28	5	44	53	2	53	3	32	50	5	50	0	14	10	7	5	2
29	5	42	0	3	0	3	27	0	5	56	0	7	5	7	5	1
30	5	39	0			3	21	4			0	0	0			0
	+					+					+					D.
	VIII.					VII.					VI.					

XII. Equation de la Lune, ou Evection.

Argument XII. *Double distance de la Lune au Soleil corrigée, moins l'Anomalie de la Lune doublement corrigée.*

Degrés.	O. — °	′	″	Differ. ′	″	I. — °	′	″	Differ. ′	″	II. — °	′	″	Differ. ′	″	
0	0	0	0	1	24	0	39	50	1	12	1	9	22	0	42	30
1	0	1	24	1	23	0	41	2	1	12	1	10	4	0	41	29
2	0	2	47	1	23	0	42	14	1	11	1	10	45	0	40	28
3	0	4	10	1	23	0	43	25	1	10	1	11	25	0	39	27
4	0	5	33	1	23	0	44	35	1	9	1	12	4	0	37	26
5	0	6	56	1	23	0	45	44	1	8	1	12	41	0	36	25
6	0	8	19	1	23	0	46	52	1	7	1	13	17	0	34	24
7	0	9	42	1	23	0	47	59	1	7	1	13	51	0	33	23
8	0	11	5	1	22	0	49	6	1	6	1	14	24	0	32	22
9	0	12	27	1	22	0	50	12	1	5	1	14	56	0	31	21
10	0	13	49	1	22	0	51	17	1	4	1	15	27	0	29	20
11	0	15	11	1	22	0	52	21	1	3	1	15	56	0	28	19
12	0	16	33	1	21	0	53	24	1	2	1	16	24	0	26	18
13	0	17	54	1	21	0	54	26	1	1	1	16	50	0	25	17
14	0	19	15	1	21	0	55	27	1	1	1	17	15	0	24	16
15	0	20	36	1	20	0	56	28	1	0	1	17	39	0	22	15
16	0	21	56	1	20	0	57	28	0	58	1	18	1	0	21	14
17	0	23	16	1	19	0	58	26	0	57	1	18	22	0	19	13
18	0	24	35	1	19	0	59	23	0	56	1	18	41	0	18	12
19	0	25	54	1	19	1	0	19	0	55	1	18	59	0	17	11
20	0	27	13	2	18	1	1	14	0	54	1	19	16	0	15	10
21	0	28	31	1	18	1	2	8	0	53	1	19	31	0	14	9
22	0	29	49	1	17	1	3	1	0	52	1	19	45	0	12	8
23	0	31	6	1	17	1	3	53	0	51	1	19	57	0	11	7
24	0	32	23	1	16	1	4	44	0	49	1	20	8	0	9	6
25	0	33	39	1	15	1	5	33	0	48	1	20	17	0	8	5
26	0	34	54	1	15	1	6	21	0	47	1	20	25	0	6	4
27	0	36	9	1	14	1	7	8	0	46	1	20	31	0	5	3
28	0	37	23	1	14	1	7	54	0	45	1	20	36	0	4	2
29	0	38	37	1	13	1	8	39	0	43	1	20	40	0	2	1
30	0	39	50			1	9	22			1	20	42			0
	+					+					+					D.
	XI.					X.					IX.					

XII. Equation de la Lune, ou Evection.

Argument XII. *Double distance de la Lune au Soleil corrigée, moins l'Anomalie de la Lune doublement corrigée.*

Degrés.	III. — °	′	″	Differ. ′	″	IV. — °	′	″	Differ. ′	″	V. — °	′	″	Differ. ′	″	D.
0	1	20	42	0	1	1	10	24	0	42	0	40	52	1	14	30
1	1	20	43	0	1	1	9	42	0	44	0	39	38	1	15	29
2	1	20	42	0	3	1	8	58	0	45	0	38	23	1	16	28
3	1	20	39	0	4	1	8	13	0	46	0	37	7	1	17	27
4	1	20	35	0	5	1	7	27	0	47	0	35	50	1	17	26
5	1	20	30	0	7	1	6	40	0	48	0	34	33	1	18	25
6	1	20	23	0	8	1	5	52	0	50	0	33	15	1	18	24
7	1	20	15	0	10	1	5	2	0	51	0	31	57	1	19	23
8	1	20	5	0	11	1	4	11	0	53	0	30	38	1	19	22
9	1	10	54	0	13	1	3	18	0	54	0	29	19	1	20	21
10	1	19	41	0	14	1	2	24	0	55	0	27	59	1	21	20
11	1	19	27	0	16	1	1	29	0	56	0	26	38	1	21	19
12	1	19	11	0	17	1	0	33	0	57	0	25	17	1	22	18
13	1	18	54	0	19	0	59	36	0	58	0	23	55	1	22	17
14	1	18	35	0	20	0	58	38	0	59	0	22	33	1	22	16
15	1	18	15	0	22	0	57	36	1	0	0	21	11	1	23	15
16	1	17	53	0	23	0	56	39	1	1	0	19	48	1	23	14
17	1	17	30	0	24	0	55	38	1	2	0	18	25	1	24	13
18	1	17	6	0	26	0	54	36	1	4	0	17	1	1	24	12
19	1	16	40	0	27	0	53	32	1	5	0	15	37	1	24	11
20	1	16	13	0	29	0	52	27	1	6	0	14	13	1	25	10
21	1	15	44	0	30	0	51	21	1	6	0	12	48	1	25	9
22	1	15	14	0	31	0	50	15	1	7	0	11	23	1	25	8
23	1	14	43	0	33	0	49	8	1	8	0	9	58	1	25	7
24	1	14	10	0	34	0	48	0	1	9	0	8	33	1	25	6
25	1	13	36	0	36	0	46	51	1	10	0	7	8	1	25	5
26	1	13	0	0	37	0	45	41	1	11	0	5	43	1	25	4
27	1	12	23	0	38	0	44	30	1	12	0	4	18	1	26	3
28	1	11	45	0	40	0	43	18	1	13	0	2	52	1	26	2
29	1	11	5	0	41	0	42	5	1	13	0	1	26	1	26	1
30	1	10	24			0	40	52			0	0	0			0
	+					+					+					D.
	VIII.					VII.					VI.					

XIII. Equation de la Lune ou Variation.

Argument XIII. *Longitude de la Lune égalée par l'équation du centre & par l'Evection, moins la longitude vraie du Soleil.*

Degrés.	O.		I.		II.		III.		IV.		V.		
	+	Diff.	+	Diff.	±	Diff.	—	Diff.	—	Diff.	—	Diff.	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	1 24	34 17	0 39	33 2	0 45	1 57	1 24	36 21	0 40	36 8	0 45	30
1	1 24	1 24	34 56	0 36	32 17	0 47	3 21	1 23	37 1	0 38	35 23	0 47	29
2	2 48	1 23	35 32	0 33	31 30	0 50	4 44	1 23	37 39	0 35	34 36	0 50	28
3	4 11	1 23	36 5	0 30	30 40	0 53	6 7	1 22	38 14	0 33	33 46	0 52	27
4	5 34	1 23	36 35	0 27	29 47	0 55	7 29	1 22	38 47	0 30	32 54	0 55	26
5	6 57	1 22	37 2	0 24	28 52	0 57	8 51	1 21	39 17	0 27	31 59	0 57	25
6	8 19	1 21	37 26	0 22	27 55	0 59	10 12	1 21	39 44	0 24	31 2	0 59	24
7	9 40	1 21	37 48	0 19	26 56	1 0	11 33	1 20	40 8	0 22	30 3	1 2	23
8	11 1	1 20	38 7	0 17	25 56	1 2	12 53	1 20	40 30	0 19	29 1	1 4	22
9	12 21	1 19	38 24	0 14	24 54	1 4	14 13	1 19	40 49	0 16	27 57	1 6	21
10	13 40	1 18	38 38	0 11	23 50	1 6	15 32	1 18	41 5	0 13	26 51	1 8	20
11	14 58	1 17	38 49	0 8	22 44	1 8	16 50	1 16	41 18	0 10	25 43	1 10	19
12	16 15	1 16	38 57	0 9	21 36	1 9	18 6	1 15	41 28	0 7	24 33	1 11	18
13	17 31	1 14	39 2	0 1	20 27	1 11	19 21	1 14	41 35	0 4	23 22	1 13	17
14	18 45	1 13	39 3	0 2	19 16	1 13	20 35	1 13	41 39	0 2	22 9	1 15	16
15	19 58	1 11	39 1	0 5	18 3	1 14	21 48	1 11	41 41	0 1	20 54	1 16	15
16	21 9	1 9	38 56	0 7	16 49	1 15	22 59	1 10	41 40	0 5	19 38	1 18	14
17	22 18	1 7	38 49	0 10	15 34	1 16	24 9	1 8	41 35	0 8	18 20	1 19	13
18	23 25	1 6	38 39	0 13	14 18	1 17	25 17	1 6	41 27	0 11	17 1	1 21	12
19	24 31	1 4	38 26	0 15	13 1	1 19	26 23	1 5	41 16	0 14	15 40	1 22	11
20	25 35	1 2	38 11	0 18	11 42	1 20	27 28	1 3	41 2	0 17	14 18	1 23	10
21	26 37	1 0	37 53	0 21	10 22	1 20	28 31	1 1	40 45	0 20	12 55	1 24	9
22	27 37	0 58	37 32	0 24	9 2	1 21	29 32	0 59	40 25	0 22	11 31	1 24	8
23	28 35	0 56	37 8	0 27	7 41	1 21	30 31	0 57	40 3	0 25	10 7	1 25	7
24	29 31	0 54	36 41	0 31	6 20	1 22	31 28	0 54	39 38	0 28	8 42	1 26	6
25	30 25	0 51	36 10	0 33	4 58	1 22	32 22	0 52	39 10	0 31	7 16	1 26	5
26	31 16	0 49	35 37	0 35	3 36	1 23	33 14	0 50	38 39	0 34	5 50	1 27	4
27	32 5	0 46	35 2	0 38	2 13	1 23	34 4	0 48	38 5	0 36	4 23	1 27	3
28	32 51	0 44	34 24	0 40	0 50	1 23	34 52	0 46	37 29	0 39	2 56	1 28	2
29	33 35	0 42	33 44	0 42	0 33	1 24	35 38	0 43	36 50	0 42	1 28	1 28	1
30	34 17		33 2		1 57		36 12		36 8		0 0		0
	—		—		∓		+		+		+		
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		D.

I. Latitude de la Lune.

Argument I. *Longitude de la Lune dans ſon orbite, moins la longitude du Nœud corrigée.*

Bor.	O.		I.		II.		Bor.
Auſt.	VI.	Diff.	VII.	Diff.	VIII.	Diff.	Auſt.
Deg.	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	Deg.
0	0 0 0	5 23	2 34 25	4 39	4 27 38	2 40	30
1	0 5 23	5 23	2 39 4	4 35	4 30 18	2 35	29
2	0 10 46	5 23	2 43 39	4 33	4 32 53	2 29	28
3	0 16 9	5 23	2 48 12	4 30	4 35 22	2 25	27
4	0 21 32	5 22	2 52 42	4 27	4 37 47	2 20	26
5	0 26 54	5 22	2 57 9	4 24	4 40 7	2 14	25
6	0 32 16	5 21	3 1 33	4 20	4 42 21	2 9	24
7	0 37 37	5 21	3 5 53	4 17	4 44 30	2 4	23
8	0 42 58	5 20	3 10 10	4 13	4 46 34	1 59	22
9	0 48 18	5 19	3 14 23	4 10	4 48 33	1 54	21
10	0 53 37	5 18	3 18 33	4 6	4 50 27	1 48	20
11	0 58 55	5 16	3 22 39	4 3	4 52 15	1 43	19
12	1 4 11	5 16	3 26 42	3 59	4 53 58	1 38	18
13	1 9 27	5 15	3 30 41	3 55	4 55 36	1 32	17
14	1 14 42	5 13	3 34 36	3 51	4 57 8	1 27	16
15	1 19 55	5 11	3 38 27	3 47	4 58 35	1 21	15
16	1 25 6	5 10	3 42 14	3 43	4 59 56	1 16	14
17	1 30 16	5 8	3 45 57	3 39	5 1 12	1 10	13
18	1 35 24	5 7	3 49 36	3 35	5 2 22	1 4	12
19	1 40 31	5 5	3 53 11	3 30	5 3 26	0 59	11
20	1 45 36	5 3	3 56 41	3 26	5 4 25	0 54	10
21	1 50 39	5 1	4 0 7	3 22	5 5 19	0 48	9
22	1 55 40	4 59	4 3 29	3 18	5 6 7	0 43	8
23	2 0 39	4 57	4 6 47	3 12	5 6 50	0 36	7
24	2 5 36	4 54	4 9 59	3 8	5 7 26	0 31	6
25	2 10 30	4 52	4 13 7	3 4	5 7 57	0 26	5
26	2 15 22	4 50	4 16 11	2 59	5 8 23	0 20	4
27	2 20 12	4 47	4 19 10	2 54	5 8 43	0 14	3
28	2 24 59	4 44	4 22 4	2 49	5 8 57	0 8	2
29	2 29 43	4 42	4 24 53	2 45	5 9 5	0 3	1
30	2 34 25		4 27 38		5 9 8		0
Auſt.	XI.		X.		IX.		Auſt.
Bor.	V.		IV.		III.		Bor.

II. Latitude de la Lune.

Argument II. *Double de la diſtance vraie de la Lune au Soleil, moins l'Argument I. de latitude.*

Bor.	O.		I.		II.		Bor.
Auſt.	VI.		VII.		VIII.		Auſt.
D.	′	″	′	″	′	″	D.
0	0	0	4	25	7	39	30
1	0	9	4	33	7	43	29
2	0	19	4	41	7	48	28
3	0	28	4	49	7	52	27
4	0	37	5	56	7	56	26
5	0	46	5	4	8	0	25
6	0	55	5	11	8	4	24
7	1	5	5	19	8	7	23
8	1	14	5	26	8	11	22
9	1	23	5	34	8	14	21
10	1	32	5	41	8	18	20
11	1	41	5	48	8	21	19
12	1	50	5	55	8	24	18
13	1	59	6	2	8	27	17
14	2	8	6	9	8	30	16
15	2	17	6	15	8	32	15
16	2	26	6	22	8	34	14
17	2	35	6	28	8	36	13
18	2	44	6	34	8	38	12
19	2	53	6	40	8	40	11
20	3	1	6	46	8	42	10
21	3	10	6	52	8	43	9
22	3	18	6	57	8	45	8
23	3	27	7	3	8	46	7
24	3	35	7	8	8	47	6
25	3	44	7	14	8	48	5
26	3	52	7	19	8	48	4
27	4	1	7	24	8	49	3
28	4	9	7	29	8	49	2
29	4	17	7	34	8	50	1
30	4	25	7	39	8	50	0
A.	XI.		X.		IX.		Auſt.
	V.		IV.		III.		Bor.

XIV. EQUATION

Du lieu de la Lune, ou Réduction à l'Eclipt.

Argument XIV. *Longit. de la Lune dans son orbite, moins la longit. du Nœud corrigée.*

Degrés.	O. VI.		I. VII.		II. VIII.		
	—		—		—		
	'	"	'	"	'	"	
0	0	0	6	2	6	2	30
1	0	14	6	9	5	55	29
2	0	29	6	15	5	47	28
3	0	43	6	21	5	39	27
4	0	58	6	27	5	30	26
5	1	12	6	32	5	20	25
6	1	26	6	37	5	10	24
7	1	41	6	41	5	0	23
8	1	55	6	45	4	50	22
9	2	9	6	48	4	39	21
10	2	23	6	51	4	28	20
11	2	37	6	54	4	17	19
12	2	50	6	56	4	5	18
13	3	3	6	57	3	53	17
14	3	16	6	57	3	41	16
15	3	29	6	57	3	29	15
16	3	41	6	57	3	16	14
17	3	53	6	57	3	3	13
18	4	5	6	56	2	50	12
19	4	17	6	54	2	37	11
20	4	28	6	51	2	23	10
21	4	39	6	48	2	9	9
22	4	50	6	45	1	55	8
23	5	0	6	41	1	41	7
24	5	10	6	37	1	26	6
25	5	20	6	32	1	12	5
26	5	30	6	27	0	58	4
27	5	39	6	21	0	43	3
28	5	47	6	15	0	29	2
29	5	55	6	9	0	14	1
30	6	2	6	2	0	0	0
	+		+		+		D.
	XI. V.		X. IV.		IX. III.		

Correction pour la précession des Equinoxes.

Argument.

Lieu du Nœud de la Lune.

Otez	O.	I.	II.	
Ajout.	VI.	VII.	VIII.	
Degrés	"	"	"	Degrés
0	0	9,1	15,7	30
6	1,9	10,6	16,5	24
12	3,7	12,1	17,2	18
18	5,5	13,5	17,7	12
24	7,3	14,7	18,0	6
30	9,1	15,7	18,1	0
	XI.	X.	IX.	Ajout.
	V.	IV.	III.	Otez

Lieu du Nœud de la Lune.

Pl. 1.

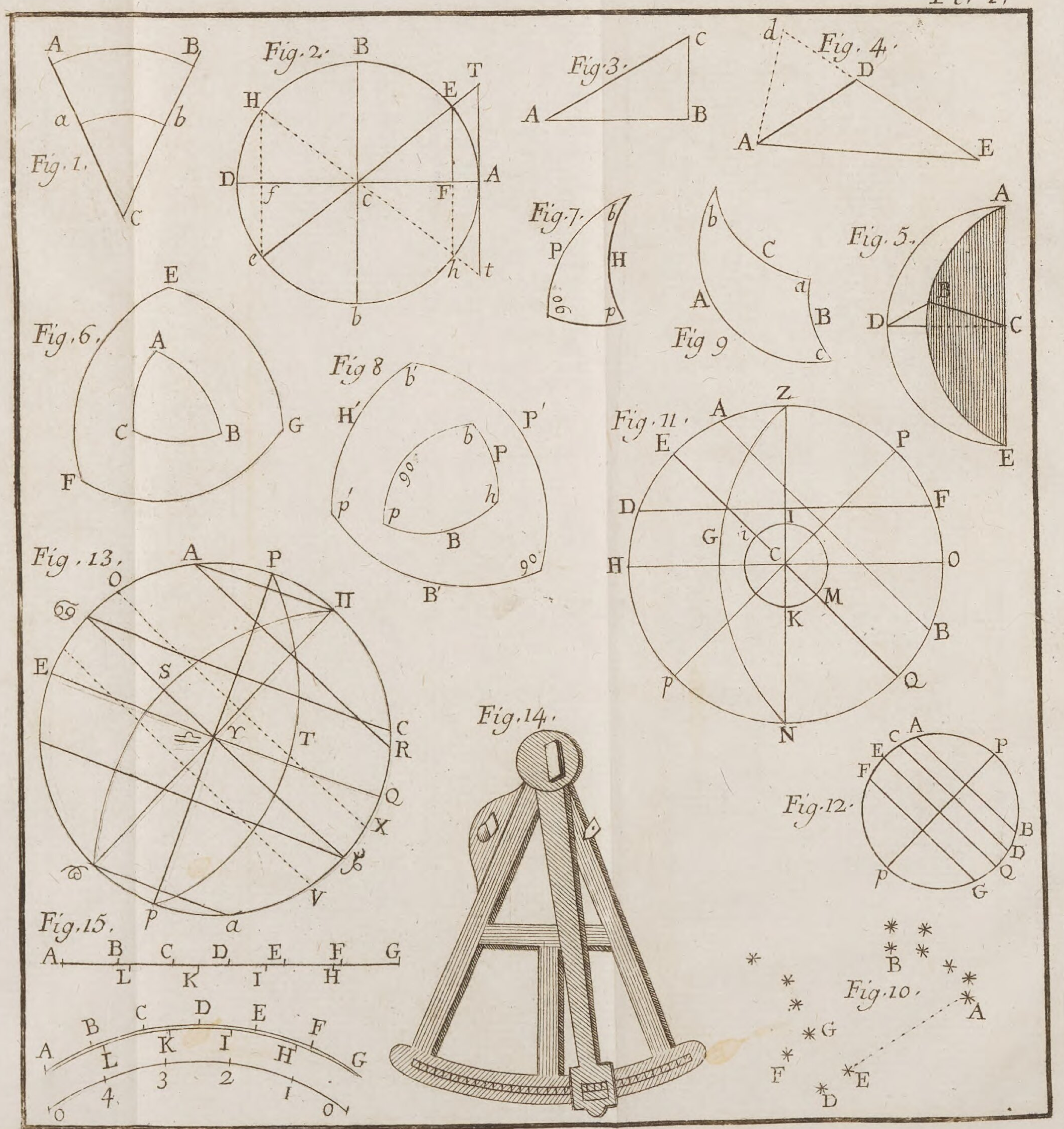
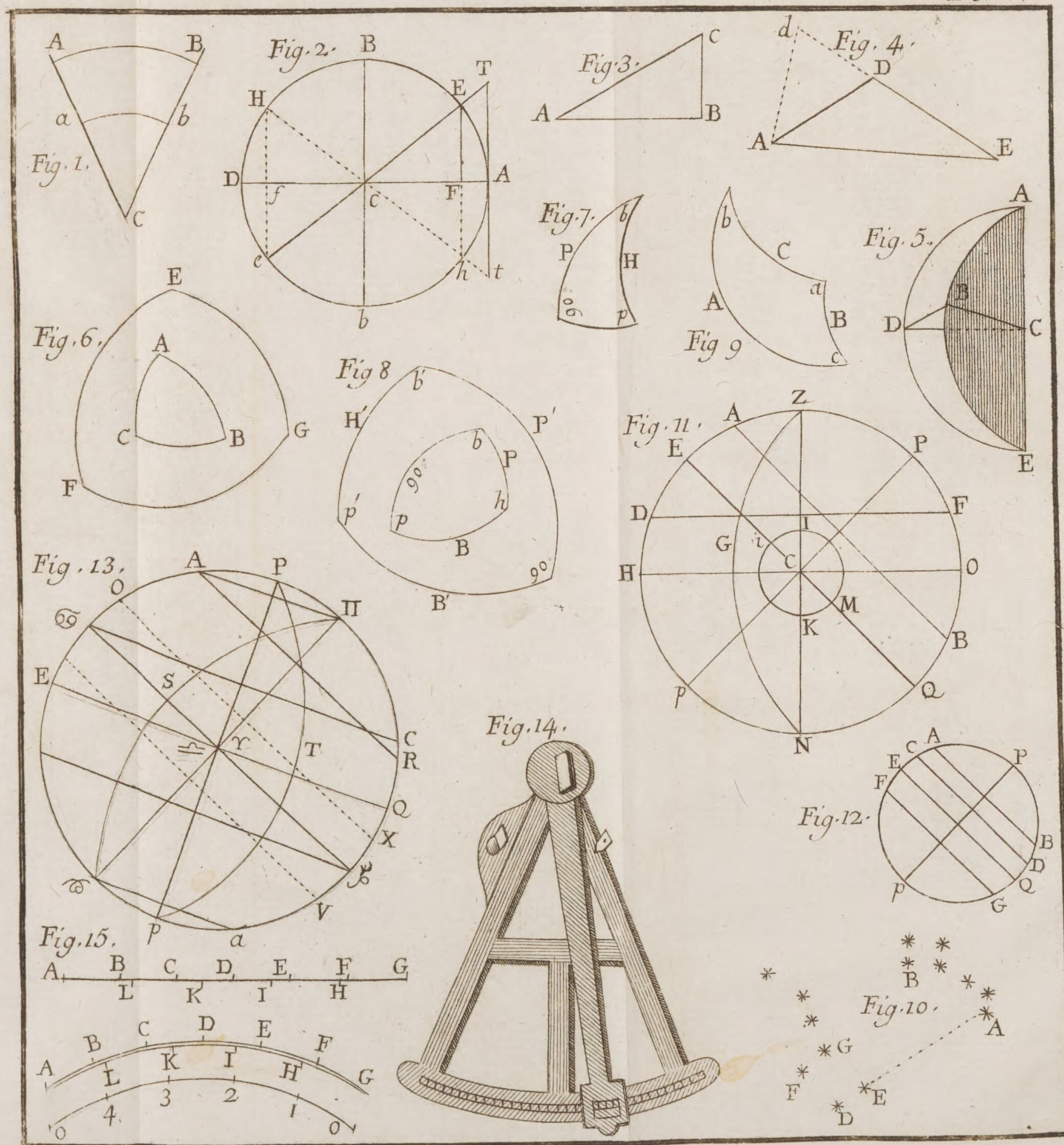
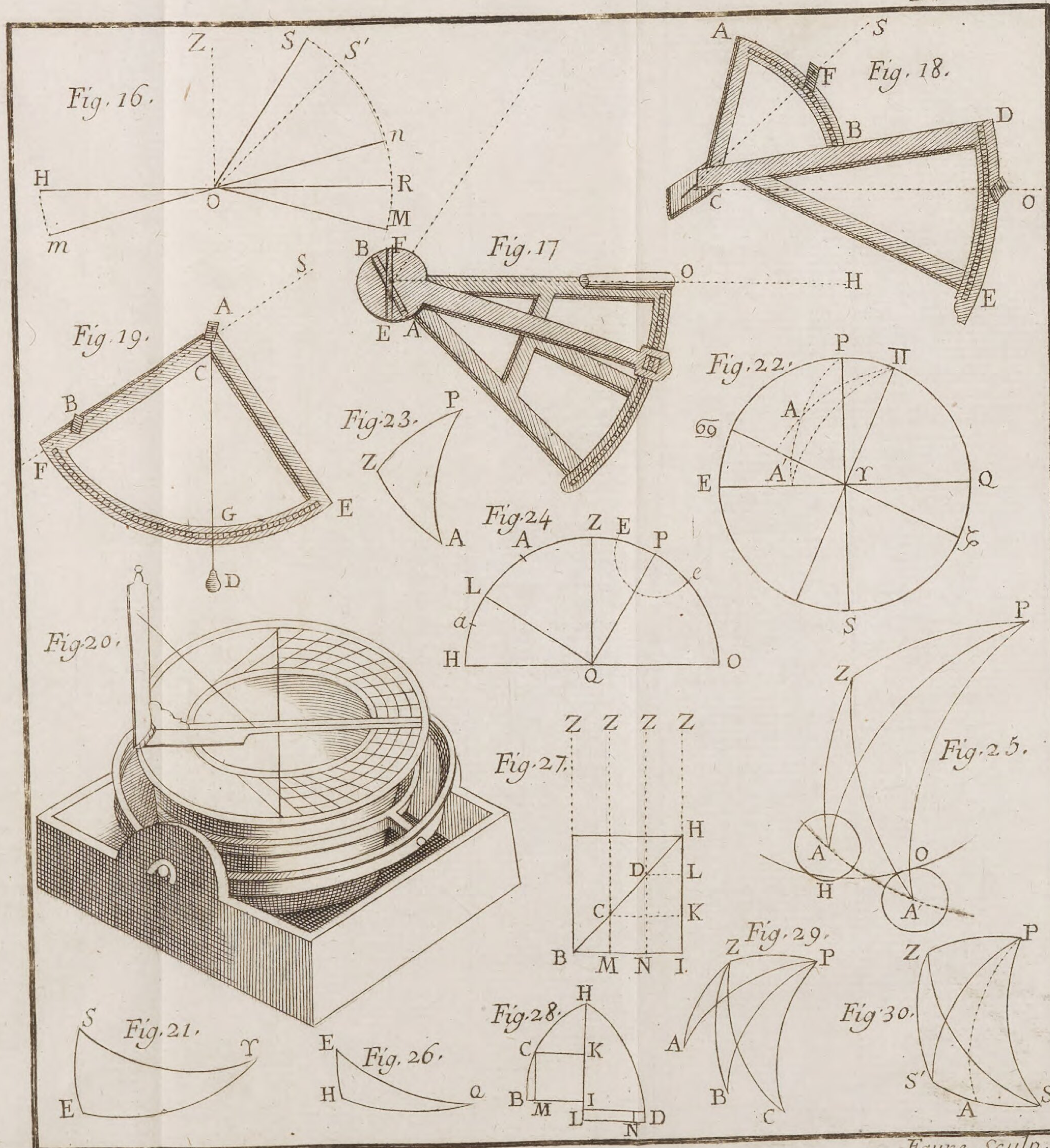


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8
Fig 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

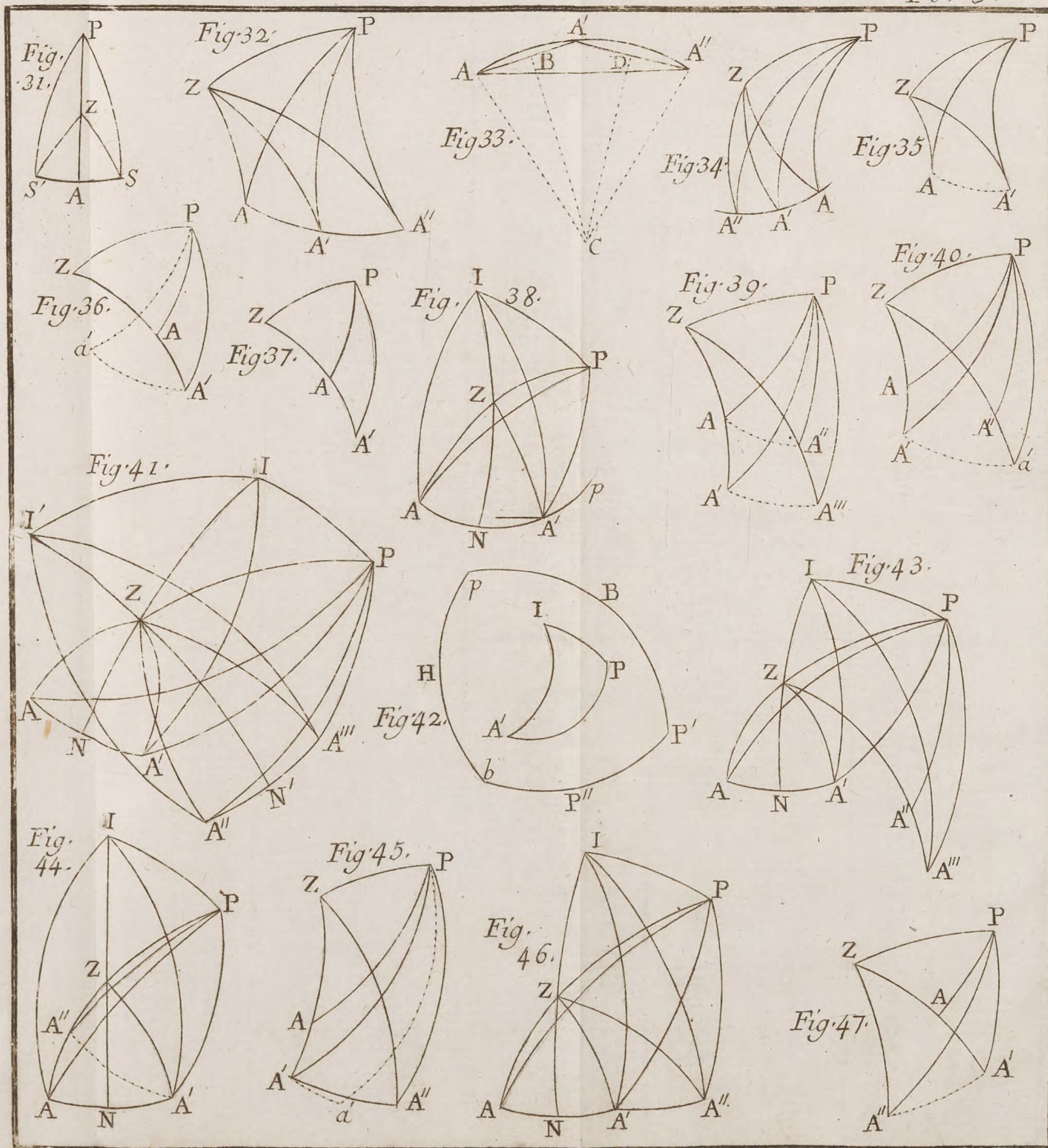

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

Pl. 2.



Faure Sculp.

Pl. 3.


Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.

Pl. 4.

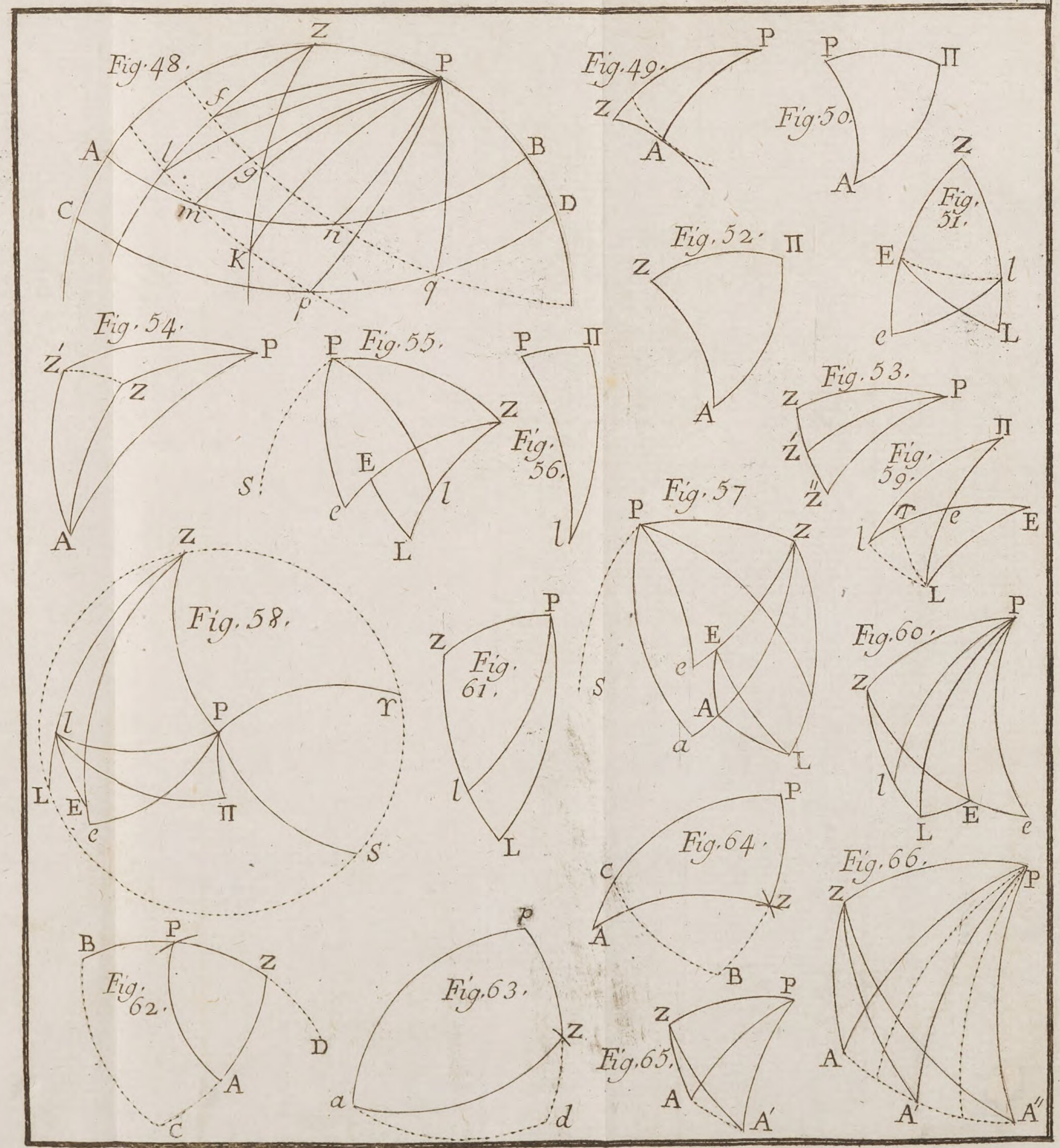
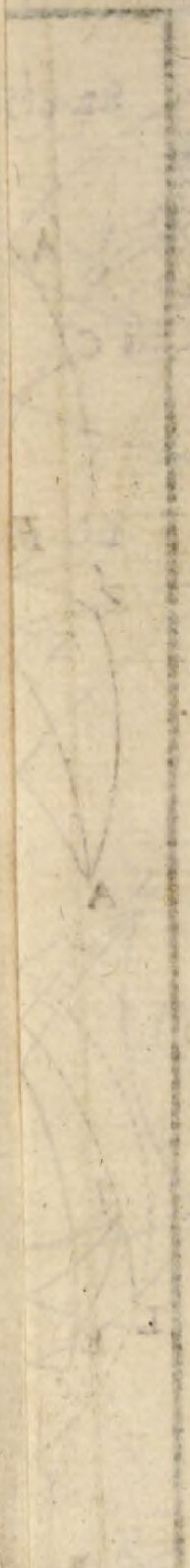
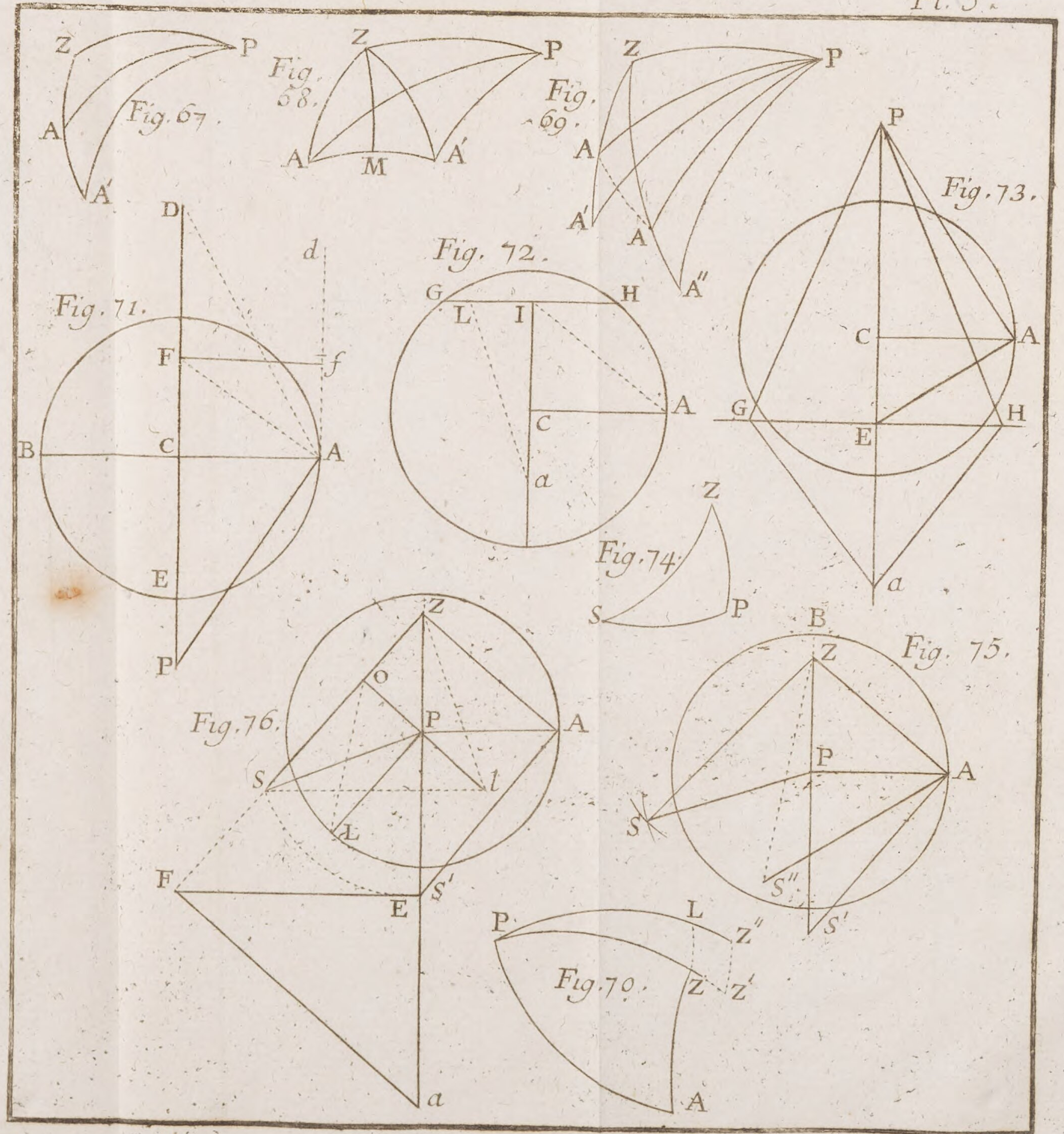
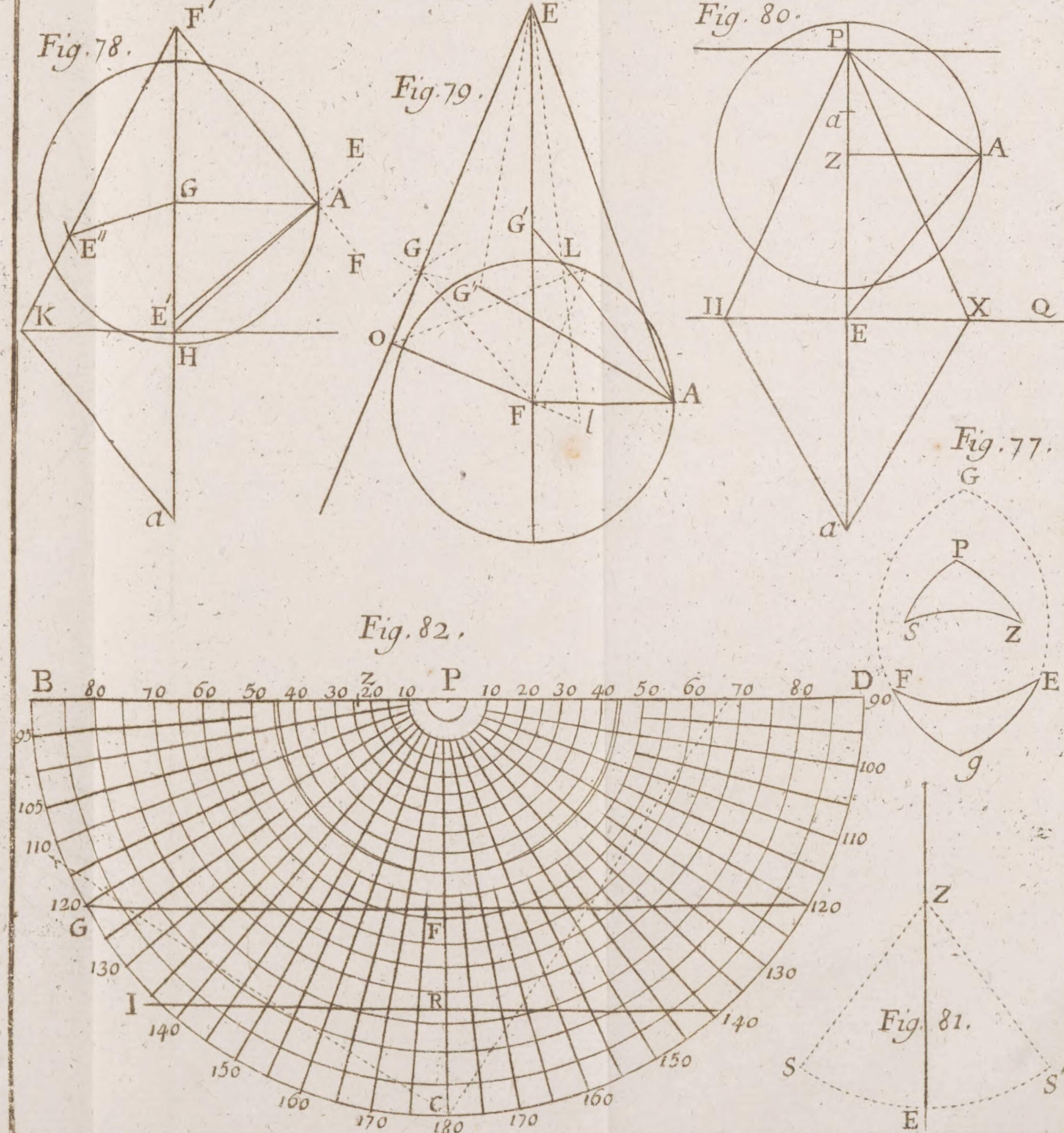


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.



Pl. 5.


Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.


Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 77.
Fig. 82.
Fig. 81.

Pl. 7.

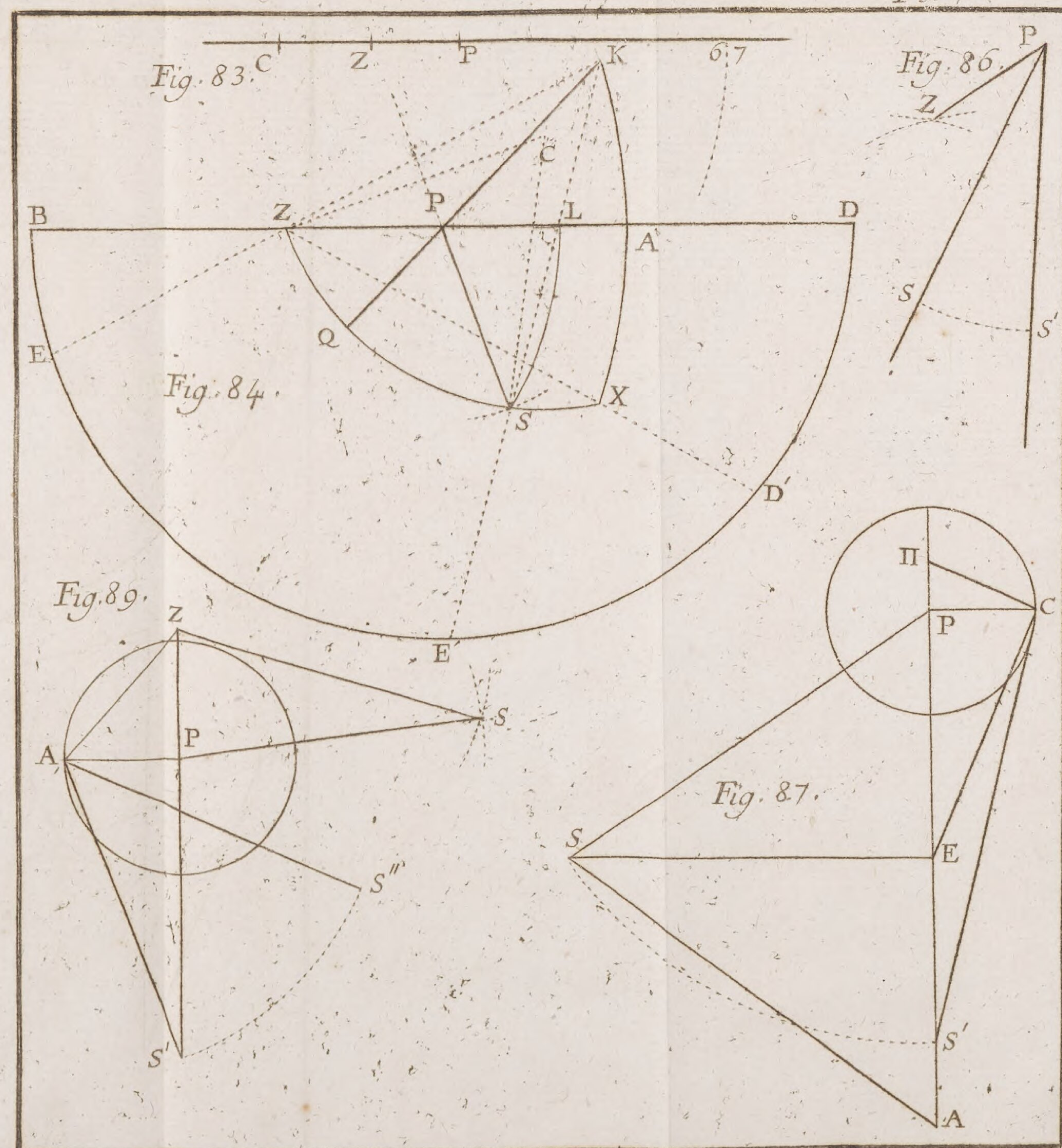
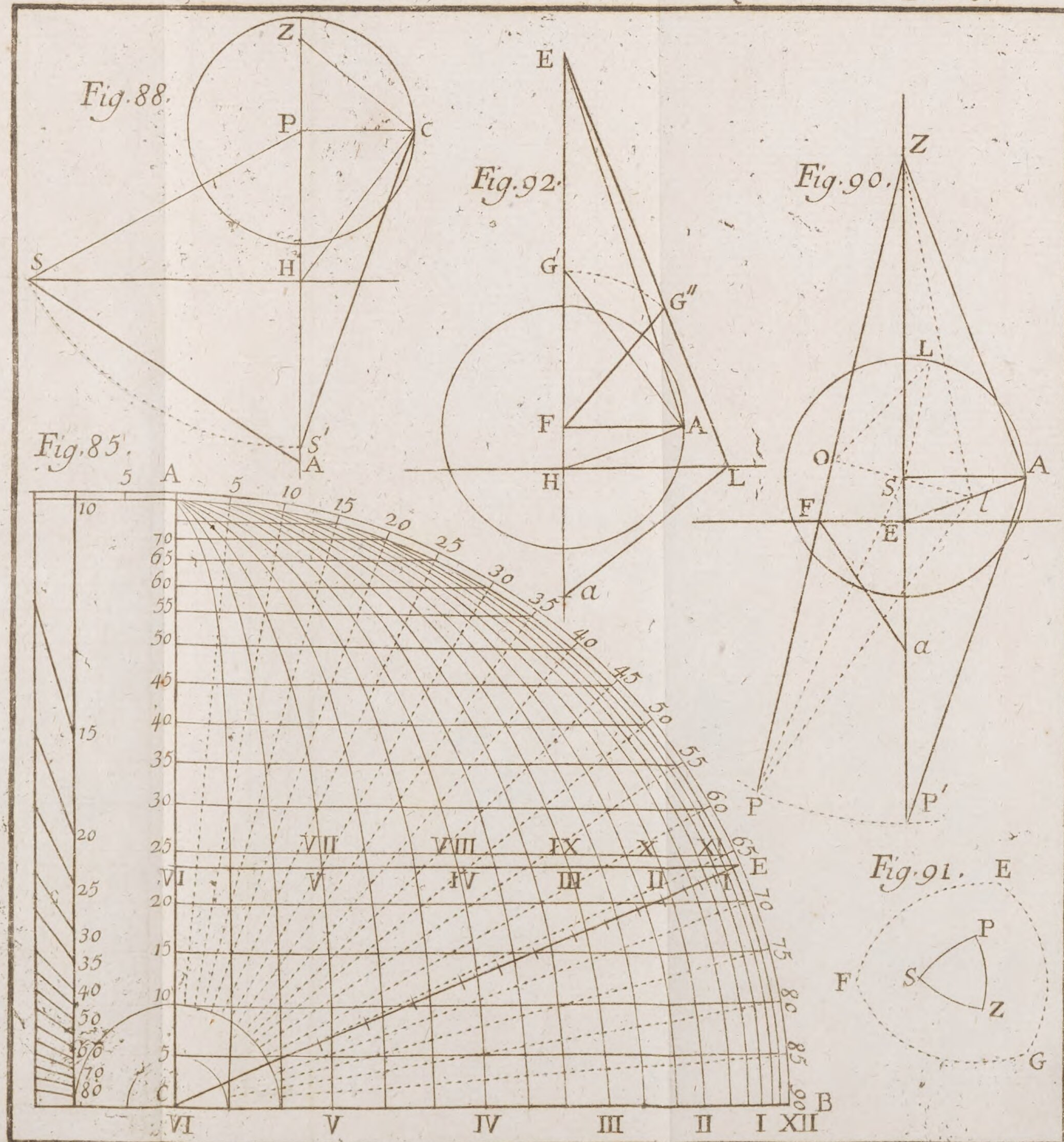


Fig. 83.
C
Z
P
K
67
Fig. 84.
B
Z
P
L
A
D
C
E
Q
S
X
D'
E'
Fig. 86.
P
Z
S
S'
Fig. 89.
Z
A
P
S
S''
S'
Fig. 87.
Π
P
C
S
E
S'
A

Pl. 8.



Faure Sculp.

Pezenas, Esprit

Astronomie des marins

Avignon 1766

Astr.u. 2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10060819-8